

e3a - PSI B un corrigé

Exercice 1

1. Le théorème de Cayley-Hamilton dit qu'une matrice est annulée par son polynôme caractéristique. Ici (calcul de déterminant par blocs ou développement par rapport à la dernière ligne)

$$\chi_A = \det(A - XI_3) = -X(X^2 + 1)$$

Ainsi, $X(X^2 + 1)$ annule A .

2. $X(X^2 + 1) = X(X - i)(X + i)$ étant scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ et annulant A , A est $\mathbb{C}$ -diagonalisable.

Le spectre réel de A est composé des racines réelles de χ_A . 0 est donc la seule valeur propre réelle de A . Or, la seule matrice réelle diagonalisable dont 0 est l'unique valeur propre est la matrice nulle. Comme $A \neq 0$, A n'est pas diagonalisable.

3. $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice (dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$) de la rotation d'angle $\pi/2$. On a donc R^k qui est la matrice de la rotation d'angle $k\pi/2$. Un calcul par blocs donne alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, A^k = \begin{pmatrix} \cos(k\pi/2) & -\sin(k\pi/2) & 0 \\ \sin(k\pi/2) & \cos(k\pi/2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut aussi écrire que (le cas A^0 est particulier)

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, A^{2k} = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, A^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{k+1} & 0 \\ (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. $F \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est un sous-espace d'un espace de dimension finie. Il est donc de dimension finie. On montre par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N}, A^k \in \text{Vect}(I_3, A, A^2)$$

- Initialisation : c'est évident pour $k = 0, 1, 2$.
- Hérédité : soit $n \geq 2$ tel que le résultat soit vrai jusqu'au rang n . On a alors l'existence de a, b, c réels tels que $A^n = aA^2 + bA + cI_3$ et $A^{n+1} = aA^3 + bA^2 + cA = bA^2 + (c - a)A \in \text{Vect}(I_3, A, A^2)$. Le résultat est donc vrai au rang $n + 1$.

On aurait aussi pu utiliser la division euclidienne par χ_A pour éviter la récurrence.

On en déduit que

$$F = \text{Vect}(I_3, A, A^2)$$

Supposons que $aA^2 + bA + cI_3 = 0$. $P = aX^2 + bX + c$ annule A et toute valeur propre complexe de A est racine de P . P admet donc au moins trois racines $(0, i, -i)$. Comme il est dans $\mathbb{C}_2[X]$ (qui contient $\mathbb{R}_2[X]$) il est nul. La famille $\mathcal{B} = (I_3, A, A^2)$ est donc libre et c'est finalement une base de F .

5. S_n étant combinaison linéaire d'éléments de F est dans F . Pour exprimer S_n dans $\mathcal{B}$, on remarque que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, A^{2k} = (-1)^{k-1} A^2$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, A^{2k+1} = (-1)^k A$$

Dans la somme qui définit S_n , on particularise le terme d'indice 0 et on découpe la somme selon la parité de l'indice pour les autres termes). On obtient

$$S_n = I_3 + \left(\sum_{0 \leq j \leq \frac{n-1}{2}} (-1)^j \frac{\theta^{2j+1}}{(2j+1)!} \right) A + \left(\sum_{1 \leq j \leq \frac{n}{2}} (-1)^{j-1} \frac{\theta^{2j}}{(2j)!} \right) A^2$$

ce qui donne l'expression de S_n dans la base $\mathcal{B}$.

6. Pour montrer que (S_n) converge il suffit, par théorème d'opérations, de montrer que les suites de coordonnées ci-dessus convergent. Or, on sait que

$$\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\theta^{2j+1}}{(2j+1)!} = \sin(\theta)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\theta^{2j}}{(2j)!} = \cos(\theta)$$

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{0 \leq j \leq \frac{n-1}{2}} (-1)^j \frac{\theta^{2j+1}}{(2j+1)!} \right) = \sin(\theta)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{1 \leq j \leq \frac{n}{2}} (-1)^{j-1} \frac{\theta^{2j}}{(2j)!} \right) = 1 - \cos(\theta)$$

On a donc convergence de (S_n) .

On peut aussi interpréter S_n comme somme partielle d'ordre n de la série de terme général $\frac{\theta^k}{k!} A^k$. En munissant $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ d'une norme multiplicative, et on sait qu'il en existe, on a $\forall k \geq 1$, $\left\| \frac{\theta^k}{k!} A^k \right\| \leq \frac{(|\theta||A|)^k}{k!}$ qui est le terme général d'une série, exponentielle, convergente. Comme $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est de dimension finie, et donc complet, la convergence absolue de la série entraîne sa convergence. Ainsi, (S_n) converge.

7. En outre, on a prouvé que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = I_3 + \sin(\theta)A + (1 - \cos(\theta))A^2$$

8. On a ainsi

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est la matrice de la rotation d'axe dirigé et orienté par e_3 et d'angle θ .

9. Par théorèmes d'opérations, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n^2 = M^2 = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) & 0 \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Une rotation vectorielle n'est une symétrie vectorielle que quand son angle est nul (on a alors l'identité qui est la symétrie par rapport à $\mathbb{R}^3$ de direction $\{0\}$) ou égal à π (on a alors la symétrie orthogonale par rapport à l'axe). La condition cherchée est donc $2\theta = 0[\pi]$ ou encore

$$\theta = 0[\pi/2]$$

B est la matrice d'une symétrie vectorielle quand $B^2 = I_3$. Ici, $(M^2)^2 = M^4$ est la rotation d'angle 4θ et d'axe $\text{Vect}(e_3)$. M^2 est donc la matrice d'une symétrie quand $4\theta = 0[2\pi]$, ce qui redonne la même condition.

Exercice 2

Préliminaires

1. Notons $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. En séparant les termes d'indices pairs de ceux d'indices impair, on a

$$H_{2n+1} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2j} + \sum_{j=0}^n \frac{1}{2j+1} = \frac{1}{2}H_n + \sum_{j=0}^n \frac{1}{2j+1}$$

On en déduit que

$$\sum_{j=0}^n \frac{1}{2j+1} = H_{2n+1} - \frac{1}{2}H_n$$

Avec le résultat admis (et puisque $o(\ln(2n+1)) = o(\ln(n))$ puisque $\ln(2n+1) = \ln(n) + \ln(2) + \ln(1 + \frac{1}{2n}) \sim \ln(n)$) on a alors

$$\sum_{j=0}^n \frac{1}{2j+1} = \ln(2n+1) - \frac{1}{2} \ln(n) + o(\ln(n))$$

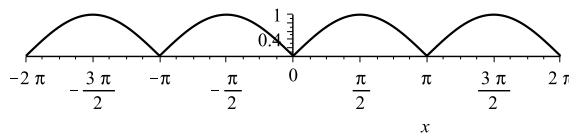
En utilisant encore $\ln(2n+1) = \ln(n) + o(\ln(n))$ on conclut que

$$\sum_{j=0}^n \frac{1}{2j+1} = \frac{1}{2} \ln(n) + o(\ln(n)) \sim \frac{\ln(n)}{2}$$

2. Par croissances comparées, $n^{3/2} \frac{\ln(n)}{n^2} = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$. On en déduit, par comparaison aux séries de Riemann, que $\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$ est absolument convergente.

Enoncé

1. On utilise le graphe de $\sin$ sur $[0, \pi]$. On complète par π -périodicité.



f étant paire, les coefficients “en sinus” sont nuls et ceux “en cosinus” valent (en tenant compte de la positivité du sinus sur $[0, \pi]$)

$$\forall n \geq 1, a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(x) \cos(2nx) dx, a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(x) dx = \frac{2}{\pi}$$

Avec les formules de trigonométrie, on obtient

$$\forall n \geq 1, a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\sin((1+2n)x) + \sin((1-2n)x)) dx = \frac{4}{\pi(1-4n^2)}$$

La fonction f est π -périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Sa série de Fourier converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la régularisée de f qui vaut f car f est continue. On a finalement

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1}$$

2. En prenant la valeur $x = 0$, on obtient

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}$$

3. On peut alors écrire que

$$\frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{4n^2 - 1}$$

4. En regroupant les sommes dans **2**, on a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| = \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{1 - \cos(2nx)}{4n^2 - 1}$$

Comme $1 - \cos(2y) = 2 \sin^2(y)$ on a finalement

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(nx)}{4n^2 - 1}$$

5.a Soit $m \in \mathbb{N}^*$. $x \mapsto \frac{|\sin(mx)|}{\sin(x)}$ est continue sur $]0, \pi/2]$ et prolongable par continuité en 0 par la valeur $|m|$ (en utilisant $\sin(y) \sim_0 y$). ρ_m est donc bien définie (intégrale d'une fonction continue sur un segment).

5.b Fixons $x \in \mathbb{R}$. Comme $\forall y, \sin^2(y) = \frac{1}{2}(\cos(2y) - 1)$, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \sin^2((k+1)x) - \sin^2(kx) = \frac{1}{2}(\cos(2(k+1)x) - \cos(2kx))$$

Comme $\cos(p) - \cos(q) = -2 \sin((p+q)/2) \sin((p-q)/2)$ on peut alors écrire

$$\forall k \in \mathbb{N}, \sin^2((k+1)x) - \sin^2(kx) = \sin((2k+1)x) \sin(x)$$

En sommant ces relations de $k = 0$ à $k = n$, un télescopage s'opère et on obtient

$$\left(\sum_{k=0}^n \sin((2k+1)x) \right) \sin(x) = \sin^2((n+1)x)$$

5.c On a

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2nm-1} = \sum_{k=0}^{2nm-1} \frac{1}{2k+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \ln(2nm-1) \sim \frac{\ln(n)}{2}$$

le second équivalent provenant de $\ln(2nm-1) = \ln(n) + \ln(2m) + \ln(1 - 1/(2nm))$. Ainsi,

$$\frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2nm-1}}{4n^2 - 1} \sim \frac{\ln(n)}{8n^2}$$

est le terme général d'une série absolument convergente (préliminaires).

5.d $m \in \mathbb{N}^*$ est fixé. Avec la question **4** et la définition de ρ_m , on a

$$\rho_m = \frac{16}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \frac{\sin^2(nmx)}{\sin(x)} dx$$

$g_n : x \mapsto \frac{\sin^2(nmx)}{(4n^2-1)(\sin(x))}$ est le terme général d'une suite de fonctions continues sur $]0, \pi/2]$. De plus $\sum (g_n)$ converge simplement sur $]0, \pi/2]$, de somme simple continue sur $]0, \pi/2]$ (cette somme simple est $x \mapsto \frac{\pi}{8} \frac{|\sin(mx)|}{\sin(x)}$). Enfin

$$\int_0^{\pi/2} |g_n(x)| dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nmx)}{|4n^2 - 1|(\sin(x))} dx$$

et avec la question **5.b**,

$$\forall x \in [0, \pi/2], \sin^2(nmx) = \sin(x) \sum_{k=0}^{nm-1} \sin((2k+1)x)$$

ce qui donne

$$\int_0^{\pi/2} |g_n(x)| dx = \frac{1}{|4n^2 - 1|} \sum_{k=0}^{nm-1} \int_0^{\pi/2} \sin((2k+1)x) dx = \frac{1}{|4n^2 - 1|} \sum_{k=0}^{2nm-1} \frac{1}{2k+1}$$

On vient de voir que c'est le teme général d'une série convergente. Le théorème d'interversion somme-intégrale s'applique et donne

$$\rho_m = \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) dx$$

Le même calcul que ci-dessus (sans les modules) donne alors

$$\rho_m = \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2nm-1}}{4n^2 - 1}$$

6.a g est continue sur $]0, \pi/2]$ et

$$g(x) = \frac{x - \sin(x)}{x \sin(x)} \sim_0 \frac{x^3/6}{x^2} = \frac{x}{6} \rightarrow 0$$

g est donc prolongeable par continuité en 0 (par 0).

6.b On a immédiatement

$$\rho_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} |\sin(mx)| \left(g(x) + \frac{1}{x} \right) dx$$

La question précédente permet de découper l'intégrale (les deux morceaux existent comme intégrales de fonctions continues sur le segment $[0, \pi/2]$) et on obtient

$$\rho_m = \alpha_m + \beta_m$$

7.a $t \mapsto \frac{|\sin(t)|}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et prolongeable par continuité en 0 (valeur 1). Elle est donc intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}$. Donc en particulier sur out $[0, u]$ pour $u > 0$. A fortiori, $G(u)$ existe.

7.b Le changement de variable $x = t/m$ (licite puisque $t \mapsto \frac{t}{m}$ est un C^1 difféomorphisme de $]0, m\pi/2[$ dans $]0, \pi/2[$)

$$G\left(\frac{m\pi}{2}\right) = \int_0^{m\pi/2} \frac{|\sin(t)|}{t} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(mx)|}{x} dx = \frac{\pi}{2} \beta_m$$

7.c Par relation de Chasles, on a

$$G(u) = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt + \int_{N\pi}^u \frac{|\sin(t)|}{t} dt$$

v_k n'étant défini que pour $k \geq 1$ (même si la valeur $k = 0$ ne pose en fait pas de problème), on doit mettre de côté le terme d'indice 0. On a alors

$$G(u) = \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt + \sum_{n=1}^{N-1} v_n + \int_{N\pi}^u \frac{|\sin(t)|}{t} dt$$

Ceci est vrai pour tout entier naturel N . Le fait qu'il soit égal à la partie entière de u/π n'intervient pas ici).

7.d Remarquons tout d'abord que (en posant $x = t - k\pi$)

$$v_k = \int_0^\pi \frac{|\sin(x)|}{x + k\pi} dx$$

Comme $\sin$ est positive sur $[0, \pi]$ et comme $k\pi \leq x + k\pi \leq (k+1)\pi$ on a alors

$$\frac{2}{(k+1)\pi} = \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^\pi \sin(x) dx \leq v_k \leq \frac{1}{k\pi} \int_0^\pi \sin(x) dx = \frac{2}{k\pi}$$

On en déduit que

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n+1} \leq \sum_{n=1}^{N-1} v_n \leq \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n}$$

De plus, comme $N = \lfloor u/\pi \rfloor$, on a $N\pi \leq u \leq (N+1)\pi$ et donc

$$0 \leq \int_{N\pi}^u \frac{|\sin(t)|}{t} dt \leq \int_{N\pi}^{(N+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt = v_N \leq \frac{2}{N\pi}$$

Avec la question précédente,

$$\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t} dt + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n+1} \leq G(u) \leq \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t} dt + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$$

Il reste à remarquer que $\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t} dt \geq 0$ pour conclure que

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n+1} \leq G(u) \leq \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t} dt + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$$

7.e Avec le préliminaire, on a $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \sim \ln(N)$ et $\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} \sim \ln(N-1)$ quand $N \rightarrow +\infty$. De plus $\ln(N-1) = \ln(N) + \ln(1 - 1/N) \sim \ln(N)$. Enfin, quand $u \rightarrow +\infty$, $N \rightarrow +\infty$ et $\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t} dt$ est un terme constant négligeable devant $\ln(N)$. On a donc le majorant et le minotant de $G(u)$ tous deux équivalents à $\ln(N)$ et il en est alors de même de $G(u)$.

Comme $\ln(u/\pi - 1) \leq \ln(N) \leq (u\pi)$ on a aisément $\ln(N) \sim \ln(u/\pi) \sim \ln(u)$ ($\ln(u/\pi) = \ln(u) - \ln(\pi)$ et le second terme est négligeable). Finalement,

$$G(u) \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \ln(u)$$

8. On en déduit que

$$\beta_m = \frac{2}{\pi} G\left(\frac{m\pi}{2}\right) \sim \frac{4}{\pi^2} \ln\left(\frac{m\pi}{2}\right) \sim \frac{4 \ln(m)}{\pi^2}$$

De plus $|\alpha_m| \leq \|g\|_{\infty, [0, \pi/2]}$ est borné et donc négligeable devant β_m . On a alors

$$\rho_m \sim \beta_m \sim \frac{4 \ln(m)}{\pi^2}$$

Exercice 3

Préliminaires

1. L'identité proposée est l'égalité de Taylor avec reste intégrale. On la prouve par récurrence sur $n \geq 1$.
 - Initialisation : si $n = 1$, le théorème fondamental de primitivation appliqué à la fonction continue f' donne $f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t) dt$ ce qui donne la relation voulue.

- **Hérédité** : soit $n \geq 1$ tel que le résultat soit vrai au rang n . Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Une intégration par partie donne

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt = \left[-\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) \right]_{t=0}^{t=x} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

ce qui permet immédiatement de passer du résultat au rang n à celui au rang $n+1$.

Si $x \neq 0$, $t \mapsto t/x$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $]0, x[$ dans $]0, 1[$. On peut alors poser $u = t/x$ dans l'intégrale précédente pour obtenir

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt = \int_0^1 \frac{x^{n-1}(1-u)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(xu) x du = \frac{x^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-u)^{n-1} f^{(n)}(xu) du$$

Le résultat reste vrai si $x = 0$ (il se lit $0 = 0$). On a donc bien

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{x^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-1} f^{(n)}(xt) dt$$

2. Le changement de variable $t' = x - t$ donne immédiatement

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x u(x-t)v(t) dt = \int_0^x u(t')v(x-t') dt'$$

(les bornes sont inversées mais un signe moins apparaît dans le changement qui nous permet de les remettre "dans le bon sens")

- 3.a *Il me semble que les hypothèses de l'énoncé sont insuffisantes pour conclure, au moins avec les théorèmes au programme. Je vais supposer EN PLUS DES HYPOTHESES DE L'ENONCE que l'application $(x, t) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur K .*

Fixons $x \in [a, b]$. L'application $t \mapsto f(x, t)$ étant continue sur l'intervalle $[c, d]$, le théorème fondamental indique que $h_2 : y \mapsto H(x, y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que

$$\frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = h_2'(y) = f(x, y)$$

Fixons maintenant $y \in [c, d]$. On veut étudier $h_1 : x \mapsto H(x, y)$. Il s'agit d'une intégrale à paramètre.

- $\forall x \in [a, b]$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur $[c, y]$ et donc intégrable sur ce segment.
- $\forall t \in [c, y]$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de dérivée $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$.
- $\forall x \in [a, b]$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $[c, y]$ (avec l'hypothèse supplémentaire faite).
- $\forall x \in [a, b]$, $\forall t \in [c, y]$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|_{\infty, K}$, la norme infinie existant puisque l'on a une fonction continue sur un compact (avec l'hypothèse supplémentaire faite). Le majorant est constant et donc intégrable sur le segment $[c, y]$.

Le théorème de régularité des intégrales à paramètres s'applique et indique que h_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ avec

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = h_1'(x) = \int_c^y \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$$

- 3.b On a $F : x \mapsto H(x, G(x))$. Pour utiliser les théorèmes d'opérations, on aimerait que H soit différentiable ou, pour faire plus simple, de classe $\mathcal{C}^1$. Comme on sait déjà qu'elle admet des dérivées partielles par rapport à chaque variable, il nous reste à justifier que ces dérivées partielles sont continues.

- $\frac{\partial H}{\partial y} = f$ est bien continue sur K .

- On a

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x_0+h, y_0+k) = \int_c^{y_0+k} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+h, t) dt = \int_c^{y_0} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+h, t) dt + \int_{y_0}^{y_0+k} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+h, t) dt$$

La fonction h_1 de la question précédente étant de classe $\mathcal{C}^1$ (à dérivée continue) le premier terme du membre de droite tend vers $\frac{\partial H}{\partial x}(x_0, y_0)$. On peut majorer le second en module par $|k|$ fois le norme infinie de $\frac{\partial f}{\partial x}$ sur K et ce majorant tend vers 0. Ceci montre la continuité de $\frac{\partial H}{\partial x}$ en (x_0, y_0) .

On peut maintenant affirmer que $F \in \mathcal{C}^1$ et (dérivation composée) que

$$\forall x \in [a, b], F'(x) = \frac{\partial H}{\partial x}(x, G(x)) + G'(x) \frac{\partial H}{\partial y}(x, G(x))$$

Avec la question **3.1** on a finalement

$$\forall x \in [a, b], F'(x) = f(x, G(x))G'(x) + \int_c^{G(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$$

Partie 1

1. Il suffit de choisir

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

2. Comme φ est continue, le cours indique que le système $X' = AX + B$ associé à la condition initiale $X(0) = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$. Admet une unique solution. En notant h la première coordonnée

de X , on obtient une solution de (E_1) telle que $h^{(k)}(0) = a_k$.

Si h_1 et h_2 sont deux telles solutions alors X_1 et X_2 obtenus comme en question précédente sont deux solution du problème de Cauchy précédent et sont donc égales. Il en est de même de leurs premières cordonnées h_1 et h_2 .

On a donc l'existence et l'unicité demandée.

3. Soit h l'unique solution de **2**. h est de classe $\mathcal{C}^n$ et on peut lui appliquer la question bf 1. du préliminaire. On obtient alors directement (puisque $h^{(n)} = \varphi$)

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{k!} x^k + \frac{x^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-1} \varphi(xt) dt$$

Partie 2

1. Une intégration par partie donne

$$g(x) = [s(x-t)\psi_1(t)]_{t=0}^{t=x} + \int_0^x s'(x-t)\psi_1(t) dt$$

Comme $s(0) = \psi_1(0) = 0$, on a donc

$$g(x) = \int_0^x s'(x-t)\psi_1(t) dt$$

2. Notons $G : x \mapsto x$ et $f : (x, y) \mapsto s'(x - y)\psi_1(y)$. Soit $b > 0$. G est de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, b]$ dans $[a, b]$; f vérifie les hypothèses de la partie préliminaire sur $K = [0, b] \times [0, b]$. On en déduit que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, b]$ avec

$$g'(x) = f(x, x) + \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt = s'(0)\psi_1(x) + \int_0^x s''(x - t)\psi_1(t) dt$$

Si $n \geq 3$ alors $s'(0) = 0$ et on a donc

$$g'(x) = \int_0^x s''(x - t)\psi_1(t) dt$$

Ceci montre que g est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et dérivable à droite en 0. On montre de même que g est dérivable sur $\mathbb{R}^{-*}$ et dérivable à gauche en 0 avec la même expression pour la dérivée. Les nombres dérivés à droite et gauche en 0 sont égaux et g est dérivable en 0. On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \int_0^x s''(x - t)\psi_1(t) dt$$

3. Il suffit alors de faire une intégration par parties (toujours en supposant $n \geq 3$ et à partir de la question précédente)

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = [-s'(x - t)\psi_1(t)]_{t=0}^{t=x} + \int_0^x s'(x - t)\psi(t) dt$$

Avec $\psi_1(0) = s'(0) = 0$, on obtient que

$$g'(x) = \int_0^x s'(x - t)\psi(t) dt$$

4. On part de l'expression pour $k = n - 1$:

$$g^{(n-1)}(x) = \int_0^x s^{(n-1)}(x - t)\psi(t) dt$$

On applique la partie préliminaire comme plus haut pour obtenir

$$g^{(n)}(x) = s^{(n-1)}(0)\psi(x) + \int_0^x s^{(n)}(x - t)\psi(t) dt = \psi(x) + \int_0^x s^{(n)}(x - t)\psi(t) dt$$

5. On a alors

$$\begin{aligned} g^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^n c_k g^{(n-k)}(x) &= \psi(x) + \int_0^x s^{(n)}(x - t)\psi(t) dt + \sum_{k=1}^n c_k \int_0^x s^{(n-k)}(x - t)\psi(t) dt \\ &= \psi(x) + \int_0^x \left(s^{(n)}(x - t) + \sum_{k=1}^n c_k s^{(n-k)}(x - t) \right) \psi(t) dt \\ &= \psi(x) \end{aligned}$$

puisque s est solution de (H_2) .

6. En partie 1 on est dans le cas où $c_1 = \dots = c_n = 0$ et $\psi = \varphi$. Dans ce cas, (H_2) s'écrit $y^{(n)} = 0$ et $s : x \mapsto \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ est solution de (H_2) avec $s(0) = \dots = s^{(n-2)}(0) = 0$ et $s^{(n-1)}(0) = 1$. On vient donc de voir que

$$g : x \mapsto \int_0^x \frac{(x - t)^{n-1}}{(n - 1)!} \varphi(t) dt$$

est solution de (E_1) . Un changement de variable comme en question 1 du préliminaire montre que

$$g : x \mapsto \frac{x^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-1} \varphi(xt) dt$$

De plus, $g(0) = \dots = g^{(n-1)}(0) = 0$ avec les expressions admises plus haut.

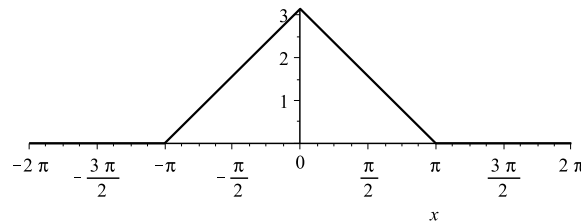
Enfin, $x \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{k!} x^k$ est solution de l'équation homogène associée à (E_1) . On peut donc dire que

$$h : x \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{k!} x^k + \frac{x^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-1} \varphi(xt) dt$$

est solution de (E_1) et on a $h^{(k)}(0) = a_k$ pour $k = 0, \dots, n-1$.

Application

1. La fonction est affine par morceaux et continue et sa représentation est la suivante



2. On est dans le cas $c_1 = 0$ et $c_2 = 1$. On a $s = \sin$ et une solution de (E_3) est

$$g : x \mapsto \int_0^x \sin(x-t) \alpha(t) dt$$

On a alors (avec des intégrations par parties)

$$\forall x \in [0, \pi], g(x) = \int_0^x \sin(x-t)(\pi-t) dt = \pi - x + \sin(x) - \pi \cos(x)$$

$$\forall x \in [-\pi, 0], g(x) = \int_0^x \sin(x-t)(\pi+t) dt = \pi + x - \sin(x) - \pi \cos(x)$$

et comme α est nulle hors de $[-\pi, \pi]$,

$$\forall x \geq \pi, g(x) = \int_0^\pi \sin(x-t)(\pi-t) dt = 2 \sin(x) - \pi \cos(x)$$

$$\forall x \leq -\pi, g(x) = \int_0^{-\pi} \sin(x-t)(\pi+t) dt = -2 \sin(x) - \pi \cos(x)$$

3. Comme $\cos$ et $\sin$ sont deux solutions indépendantes de l'équations homogène, l'ensemble des solutions est

$$g + \text{Vect}(\cos, \sin)$$