

Corrigé de l'épreuve math I (Mines-ponts 2006)

Par M. TAIBI Professeur de MP* Lycée Moulay Youssef Rabat Maroc

Partie I : Un vecteur propre strictement positif

$T \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ telle que $T > 0$ et $(I_n + T)^{n-1} > 0$.

1° Soit $x \in B$ ($x > 0$ et $x \neq 0$) Montrons que $\Gamma_x = \{\theta \in \mathbb{R}_+ / \theta x \leq Tx\}$ est un ensemble non vide fermé et borné.

$0 \in \Gamma_x$ car $Tx \geq 0 = 0 \cdot x$, donc Γ_x est non vide.

Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, l'application $\varphi_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\theta \mapsto (Tx)_i - \theta \cdot x_i$ est continue sur \mathbb{R} , donc $\Gamma_x = \bigcap_{1 \leq i \leq n} \varphi_i^{-1}\{[0, +\infty[\} \cap \mathbb{R}_+$ est un fermé comme intersection de fermés.

Pour tout $\theta \in \Gamma_x$, et tout $i = 1 \dots n$, on a : $\theta \leq \frac{(Tx)_i}{x_i}$ pour $x_i \neq 0$, donc Γ_x est borné.

On pose $\theta(x) = \max(\Gamma_x)$

2° Soit $x \in B$, montrons que $\theta(x) = \min\{\frac{(Tx)_i}{x_i} / i = 1 \dots n, x_i \neq 0\}$.

Pour tout $\theta \in \Gamma_x$ et pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $x_i \neq 0$, on a : $\theta \leq \frac{(Tx)_i}{x_i}$. Donc $\theta(x) \leq \min\{\frac{(Tx)_i}{x_i} / i = 1 \dots n, x_i \neq 0\}$

D'autre part les réels $\frac{(Tx)_i}{x_i}$ avec $x_i \neq 0$ sont dans Γ_x . D'où $\theta(x) = \min\{\frac{(Tx)_i}{x_i} / i = 1 \dots n, x_i \neq 0\}$.

3° Montrons que pour tous $\alpha > 0$ et $x \in B$, on a : $\theta(\alpha x) = \theta(x)$

Comme T est linéaire, on a : $\{\frac{(T(\alpha x))_i}{(\alpha x)_i} / i = 1 \dots n \text{ et } x_i \neq 0\} = \{\frac{(T(x))_i}{(x)_i} / i = 1 \dots n \text{ et } x_i \neq 0\}$, donc $\theta(\alpha x) = \theta(x)$

4° Montrons que $P(B) \subset B^+$

Soit $x \in B$, posons $y = Px$, $P = (p_{ij})_{ij}$ et $(y)_i = y_i$.

Comme $x \neq 0$ et $x \geq 0$, alors il existe j_0 tel que $x_{j_0} > 0$, Dond, pour tout i , on a : $y_i = \sum_{j=1}^n p_{ij}x_j =$

$p_{ij_0}x_{j_0} + \sum_{j=1, j \neq j_0}^n p_{ij}x_j > 0$ car $P > 0$ et $x \geq 0$. D'où le résultat demandé.

5° Montrons que : $\forall x \in B$, $\theta(Px) \geq \theta(x)$ et $\theta(Px) > 0$

Pour $\theta \in \Gamma_x$, on a : $\theta x \leq Tx$, donc $\theta Px = P(\theta x) \leq P(Tx)$ car $P > 0$ ($\underbrace{P(Tx - \theta x)}_{\geq 0} \geq 0$)

D'où $\theta Px \leq T(Px)$ car $TP = PT$ (P polynôme en T) et par suite $\Gamma_x \subset \Gamma_{Px}$

En conclusion :

$$\theta(x) = \max \Gamma_x \leq \max \Gamma_{Px} = \theta(Px).$$

Reste à vérifier que $\theta(Px) > 0$.

D'après la question 4° $P(B) \subset B^+$, donc $TPx = P(Tx) > 0$ et $Px > 0$ car $Tx \in B$ et puis $\theta(Px) = \min\{\frac{(P(Tx))_{ii}}{(Px)_{ii}}, i = 1 \dots n\} > 0$.

6° Supposons que $x \in B$ est un vecteur propre de T associé à la valeur propre λ , montrons que $\theta(Px) = \theta(x)$.

x étant positif, donc $Tx > 0$ et pour tout $i = 1 \dots n$, $0 \leq (Tx)_i \leq \lambda x_i$.

Pour $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $x_{i_0} \neq 0$, on a $\lambda \geq \frac{(Tx)_{i_0}}{x_{i_0}} \geq 0$.

Comme $P = (I+T)^{n-1}$, il en résulte que $(1+\lambda)^{n-1}$ est une valeur propre de P et $Px = (1+\lambda)^{n-1}x$. D'où $\theta(Px) = \theta((1+\lambda)^{n-1}x) = \theta(x)$ car $(1+\lambda)^{n-1} > 0$.

En conclusion : $\theta(Px) = \theta(x)$

7° Soit $x \in B$ tel que $\theta(Px) = \theta(x)$. Montrons que x est un vecteur propre associé à la valeur propre $\theta(x)$.

Posons $y = Tx - \theta(x)x$, on a $y \geq 0$

Si $y \neq 0$, comme $P > 0$, on a : $0 < Py = P(Tx - \theta(x)x) = P(Tx) - \theta(x)Px = T(Px) - \theta(x)P(x)$ car P et T commutent.

Donc, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $(T(Px))_i - \theta(x)(Px)_i > 0$ et puisque $\theta(x) = \theta(Px)$, on a : $\theta(x) < \min\{\frac{(T(Px))_i}{(Px)_i}, i = 1..n\} = \theta(Px)$ ce qui est absurde. Donc : $y = 0$ et par suite $Tx = \theta(x)x$.

8° Soit $C = B \cap \sum = \{x \in \mathbb{R}^n / x \geq 0 \text{ et } \|x\|_1 = 1\}$. Montrons que $\theta : P(C) \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto \theta(y)$ est continue sur $P(C)$.

Pour $i = 1..n$, soit l'application $\varphi_i : y \mapsto \frac{(Ty)_i}{y_i}$ est bien définie et continue sur $P(C)$ car tout élément y de $P(C)$ est strictement positif. Donc $\theta = \min(\varphi_i)_{1 \leq i \leq n}$ est continue sur $P(C)$.

9° Comme $C = B \cap \sum = \{x \in \mathbb{R}^n / x \geq 0 \text{ et } \|x\|_1 = 1\}$ est un compact (fermé + bornée en dimension finie), et l'application P est continue sur \mathbb{R}^n car linéaire sur un espace de dimension finie, donc $P(C)$ est compact dans \mathbb{R}^n .

L'application θ étant continue sur le compact $P(C)$ à valeur dans \mathbb{R} , il existe donc $x_0 \in P(C)$ tel que

$$\theta(x_0) = \sup_{x \in P(C)} \theta(x)$$

10° Pour $x \in C \subset B$, on a $Px \in P(C) \subset B^+$ et par la question 5) : $\theta(x) \leq \theta(Px)$. Donc :

Pour tout $x \in C = B \cap \sum$, $\theta(x) \leq \theta(Px) \leq \sup_{y \in P(C)} \theta(y)$. et par suite :

$$\sup_{x \in C} \theta(x) \leq \sup_{y \in P(C)} \theta(y)$$

11° Lorsque x décrit B , alors $y = \frac{1}{\|x\|_1}x$ décrit C , donc $\sup_{x \in B} \theta(x) = \sup_{y \in C} \theta(\|x\|_1 y) = \sup_{y \in C} \theta(y)$ car $\|x\|_1 > 0$ (voir question 3°)

12° D'après ce qui précède, on a :

$$\sup_{x \in B} \theta(x) = \sup_{x \in C} \theta(x) \leq \sup_{x \in P(C)} \theta(x) = \theta(x_0) \stackrel{\text{noté}}{=} \theta_0$$

Comme l'application $\left\{ \begin{array}{l} C = B \cap \sum \rightarrow P(C) \\ x \mapsto Px \end{array} \right\}$ est bijective, on a :

$$\sup_{x \in C} \theta(x) = \sup_{x \in P(C)} \theta(x)$$

13° $x_0 \in P(C)$, donc $x_0 > 0$. On rappelle que $C = B \cap \sum = \{x \in \mathbb{R}^n / x \geq 0 \text{ et } \|x\|_1 = 1\}$ est compact

On a aussi $y = Tx_0 - \theta_0 x_0 \geq 0$.

Si $y > 0$, alors pour tout $i = 1..n$; $(Tx_0)_i - \theta_0(x_0)_i > 0$, donc $\theta_0 < \{\frac{(Tx_0)_i}{(x_0)_i}, i = 1..n\}$ et apr suite :

$$\theta_0 < \min\{\frac{(Tx_0)_i}{(x_0)_i}, i = 1..n\} = \theta(x_0) = \theta_0 \text{ ce qui absurde. D'où } Tx_0 = \theta_0 x_0.$$

Par $\theta(Px) > 0$ pour tout $x \in B \cap \sum = C$ et que θ est continue sur le compact $P(C)$, on déduit que $\theta_0 = \sup_{x \in P(C)} \theta(x) > 0$.

Partie II : Une méthode d'approximation

T est une matrice stochastique positive telle que $P = (I_n + T)^{n-1} > 0$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ et $x^+ = (|x_1|, \dots, |x_n|)$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $R_k = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} T^j$

14° Soit $\theta \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre de T associé à θ , on a $x \neq 0$ et $Tx = \theta x$

Pour $i = 1..n$; $(Tx)_i = \theta x_i$, donc $|\theta| |x_i| = |(Tx)_i|$.

Si $T = (t_{ij})$, alors $(Tx)_i = \sum_{j=1}^n t_{ij}x_j$ et apr suite : $|(Tx)_i| \leq \sum_{j=1}^n t_{ij}|x_j| \quad ; t_{ij} \geq 0$,.D'où
 $= (Tx^+)_i$

$|\theta| |x_i| \leq (Tx^+)_i$ et par suite :

$$|\theta| x^+ \leq Tx^+$$

15° Comme $x \neq 0$, on a $x^+ \geq 0$ et $x^+ \neq 0$ et $|\theta| x^+ \leq Tx^+$ (question 14). Donc $|\theta| \leq \theta(x^+) \leq \theta_0$.

16° On a $|\theta| \|x\|_1 = |\theta| \sum_{i=1}^n |x_i| = \sum_{i=1}^n |\theta| |x_i|$. Or $Tx = \theta x$, donc :

$$\begin{aligned} |\theta| \|x^+\|_1 &= |\theta| \|x\|_1 = \|\theta x\|_1 = \|Tx\|_1 = \sum_{i=1}^n |(Tx)_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n t_{ij} |x_j| \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\underbrace{\sum_{i=1}^n t_{ij}}_{=1} \right) |x_j| \\ &= \sum_{j=1}^n |x_j| = \|x^+\|_1 \end{aligned}$$

En conclusion :

$$|\theta| \|x^+\|_1 \leq \|x^+\|_1$$

Comme $x \neq 0$, on a $\|x^+\|_1 > 0$ et puis $|\theta| \leq 1$.

17° Comme T est stochastique ($\forall j, \sum_{i=1}^n t_{ij} = 1$), alors $\theta = 1$ est une valeur propre de T associée au vecteur propre $x = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$, donc $\theta = 1 \leq \theta_0$ (question 15). or θ_0 est valeur propre de T (question 13) et puis apr la question 16, on a :

$$\theta_0 = 1$$

18° Montrons que pour tout $k \geq 1$, T^k et R_k sont stochastiques.

Première méthode : On utilise les résultats suivants

(1) Une matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ et stochastique si et seulement si $u = (1, \dots, 1)$ est vecteur propre associé à la valeur propre 1.

(2) Si $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ admet une valeur propre λ associé à un vecteur propre x , alors $Q(\lambda)$ est une valeur propre de $Q(A)$ associé au vecteur propre x .

Et on remarque que T^k et R_k sont des polynômes en la matrice stochastique T .

Deuxième méthode : Utiliser une récurrence

$T^0 = I_n$ et T^1 sont stochastiques

Si, pour $k \geq 1$ la matrice T^k est stochastique, alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (T^{k+1})_{ij} &= \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n (T)_{il} (T^k)_{lj} = \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^n (T)_{il} (T^k)_{lj} \\ &= \sum_{l=1}^n \underbrace{\sum_{i=1}^n (T)_{il}}_{=1} (T^k)_{lj} \\ &= \sum_{l=1}^n (T^k)_{lj} = 1 \quad (\text{par hypothèse de récurrence}) \end{aligned}$$

Donc T^{k+1} est aussi stochastique.

$$R_k = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} T^j, \text{ donc } \sum_{i=1}^n (R_k)_{ij} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} (T^j)_{ij} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{k} \underbrace{\sum_{i=1}^n (T^j)_{ij}}_{=1} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{k} = 1.$$

19° Montrons les inégalités : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\|T^k\|_1 \leq 1$ et $\|R_k\|_1 \leq 1$

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $x \neq 0$, et $k \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\|T^k x\|_1 &= \sum_{i=1}^n |(T^k x)_i| \\
&= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n (T^k)_{ij} x_j \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |(T^k)_{ij}| |x_j| = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \underbrace{(T^k)_{ij}}_{\geq 0} |x_j| \quad \text{Car } T \geq 0 \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \underbrace{(T^k)_{ij}}_{=1} |x_j| \quad \text{car } T \text{ est stochastique} \\
&= \sum_{j=1}^n |x_j| = \|x\|_1
\end{aligned}$$

On en déduit que $\|T^k\|_1 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T^k x\|_1}{\|x\|_1} \leq 1$.

De même $\|R_k\|_1 \leq 1$ car R_k est aussi stochastique.

20° Montrons que : $\forall k \in \mathbb{N}^* ; \|TR_k - R_k\| \leq \frac{2}{k}$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, Si $k = 1$, alors $R_1 = I_n$, donc $TR_1 - R_1 = T - I_n$ et par suite $\|TR_1 - R_1\|_1 = \|T - I_n\|_1 \leq \|T\|_1 + \|I_n\|_1 = 1 + 1 = \frac{2}{1}$

Si $k > 1$, on a :

$$\begin{aligned}
TR_k - R_k &= \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} T^{j+1} - \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} T^j = \frac{1}{k} \left(\sum_{j=1}^k T^j - \sum_{j=0}^{k-1} T^j \right) = \frac{1}{k} (T^k - I_n), \text{ donc } \|TR_k - R_k\|_1 = \\
&\| \frac{1}{k} (T^k - I_n) \|_1 \leq \frac{1}{k} (\|T^k\|_1 + \|I_n\|_1) \leq \frac{2}{k}
\end{aligned}$$

21° Soit $x \in \mathbb{C}^n$, montrons que la suite vectorielle $(R_k x)_k$ a au moins une valeur d'adhérence

Comme R_k est stochastique pour tout $k > 0$, on a d'après la question 19) : $\|R_k x\|_1 \leq \|R_k\|_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_1$. La suite $(R_k x)_k$ est bornée dans l'espace de dimension finie \mathbb{C}^n , donc par le théorème de Bolzano-Weierstrass, la suite $(R_k x)_k$ admet au moins une valeur d'adhérence dans \mathbb{C}^n .

22° Soit y une valeur d'adhérence de la suite $(R_k x)_{k \geq 1}$ et $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$, $k \mapsto \varphi(k)$ une extraction telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} R_{\varphi(k)} x = y$. Or $\|TR_{\varphi(k)} x - R_{\varphi(k)} x\|_1 \leq \|TR_{\varphi(k)} - R_{\varphi(k)}\|_1 \|x\|_1 \leq \frac{2}{\varphi(k)} \|x\|_1 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, donc $\lim_{k \rightarrow \infty} (TR_{\varphi(k)} x - R_{\varphi(k)} x) = 0$ (toutes les normes sur \mathbb{C}^n sont équivalentes) et comme T est continue sur \mathbb{C}^n (application linéaire sur un espace de dimension finie) et que $\lim_{k \rightarrow \infty} R_{\varphi(k)} x = y$, il en résulte que $\lim_{k \rightarrow \infty} TR_{\varphi(k)} x = Ty$ et puis $Ty = y$.

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, $T^j y = y$ (y point fixe de T), donc $R_k y = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} T^j y = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} y = y$.

23° Soient y et z deux valeurs d'adhérence de la suite $(R_k x)_k$ et m, l deux entiers naturels, on a :

$R_l(R_m x - z) - R_m(R_l x - y) = -R_l z + R_m y = y - z$ (résultat de la question 20) et du fait que R_l et R_m commutent car des polynômes en T).

24° Montrons que la suite $(R_k x)_k$ admet une seule valeur d'adhérence.

Si y et z sont des valeurs d'adhérence de la suite $(R_k x)_k$, alors d'après la question 23)

$$\begin{aligned}
\|y - z\|_1 &= \|R_l(R_m x - z) - R_m(R_l x - y)\|_1 \\
&\leq \|R_l(R_m x - z)\|_1 + \|R_m(R_l x - y)\|_1 \\
&\leq \|R_l\|_1 \|R_m x - z\|_1 + \|R_m\|_1 \|R_l x - y\|_1 \\
&\leq \|R_m x - z\|_1 + \|R_l x - y\|_1 \quad \text{car } \|R_k\|_1 \leq 1
\end{aligned}$$

On prend alors $l = \varphi(k)$ et $m = \psi(k)$ où φ et ψ sont deux extractions telles que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|R_{\psi(k)} x - z\|_1 = 0$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} \|R_{\varphi(k)} x - y\|_1 = 0$, pour déduire que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|y - z\|_1 = 0$ et puis $y = z$.

25° Soit $x \in \mathbb{C}^n$, la suite $(R_k x)_k$ est bornée et admet une unique valeur d'adhérence dans \mathbb{C}^n , donc converge dans \mathbb{C}^n . Sa limite dépend à priori de x , notons la $Rx : Rx = \lim_{k \rightarrow \infty} R_k x$.

Par linéarité de R_k et de la limite, on déduit que R est linéaire (R est donc une matrice, d'après l'identification faite au début du problème).

Si l'on prend $x = E_j$ où $(E_j)_{1 \leq j \leq n}$ est la base canonique de C^n , on a : $\lim_k R_k E = RE_j$, donc les suites composantes de $(R_k)_k$ convergent vers les composantes de R et par suite $(R_k)_k$ converge vers R ..

26° Montrons que T et R commutent .

T et R_k commutent car R_k est un polynôme en T . Comme $TR_k = R_k$ pour tout $k \geq 1$ et que les applications $M_{n,n}(\mathbb{C}) \rightarrow M_{n,n}(\mathbb{C})$ et $M_{n,n}(\mathbb{C}) \rightarrow M_{n,n}(\mathbb{C})$ sont continues (car linéaires sur

$$M \mapsto MT \quad M \mapsto TM$$

un espace de dimensions finie), on a donc : $TR = \lim_k TR_k = \lim_k R_k T = RT$.

27° Montrons que $RT = R$ et $R^2 = R$.

D'après al question 20) la suite $(TR_k - R_k)_k$ converge vers 0 et par la question 25) la suite $(R_k)_k$ converge vers R , donc $(TR_k)_k$ converge vers R . Mais $(TR_k)_k$ converge aussi vers TR , donc $TR = R$..

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $R_k R = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} T^j R = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} RT^j$ et puisque $RT = R$, on a aussi $RT^j = R$ pour tout

$j \geq 0$, donc $R_k R = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} R = R$.

On fait tendre alors k vers $+\infty$ (l'application $M \mapsto MR$ est continue), il en résulte que $R^2 = R$.

28° Par $TR = R$, on a : $(T - I_n)R = R(T - I_n) = 0$ (T et R commutent). Donc : $\begin{cases} \text{Im}(T - I_n) \subset \ker(R) \\ \text{Im}(R) \subset \ker(T - I_n) \end{cases}$

De plus $R^2 = R$, donc R est un projecteur tel que $\text{Im}(R) \subset \ker(T - I_n)$.

29° On suppose que $\ker(T - I_n) = 1$, alors par la question 28) , $rg(R) \leq 1$.

Notons $u = (1, \dots, 1)$, on a : $R_k u = u$ pour tout $k \geq 1$ car R_k est stochastique. Donc $Ru = \lim_{k \rightarrow \infty} R_k u = u$ et par suite $R \neq 0$ (R est même stochastique).

D'où $rg(R) \geq 1$.

On conclut que $\text{Im}(R) = \ker(T - I_n)$ et $\ker(R) = \text{Im}(T - I_n)$.

On sait que x_0 est un vecteur propre de T associé à la valeur propre 1 (voir questions 13 et 17), donc $\ker(T - I_n) = \text{vect}(x_0)$.

Soit $x \in B$, on a $Rx \in \text{Im}(R) = \ker(T - I_n) = \text{vect}(x_0)$, donc il existe $\lambda \in R$ tel que $Rx = \lambda x_0$ (**).

De (**) on déduit que $\lambda \geq 0$ car $R \geq 0$ et $x_0 > 0$

$$\begin{aligned} \text{De plus } |\lambda| \|x_0\|_1 &= \|Rx\|_1 = \sum_{i=1}^n (Rx)_i && \text{car } R \geq 0 \text{ et } x \geq 0 \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (R)_{ij} x_j \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (R)_{ij} x_j \\ &= \sum_{j=1}^n \underbrace{\sum_{i=1}^n (R)_{ij}}_{=1} x_j && R \text{ est stochastique} \\ &= \sum_{j=1}^n x_j = \|x\|_1 \end{aligned}$$

Donc $\lambda = |\lambda| = \frac{\|x\|_1}{\|x_0\|_1}$ et par suite $Rx = \frac{\|x\|_1}{\|x_0\|_1} x_0$

Remaque : Si $y \in B \cap \sum = C$, alors $y \in B$ et $\|y\|_1 = 1$, et par suite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R_k y = Ry = \frac{x_0}{\|x_0\|_1}.$$