

2024 - CCINP - MP - MATHÉMATIQUES 1

ÉNONCÉ

EXERCICE I

X est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} d'espérance finie.

Q1. Exprimer, pour k non nul, $P(X = k)$ en fonction de $P(X > k - 1)$ et de $P(X > k)$.

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=1}^n kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n).$$

Démontrer le résultat de cours :
$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k).$$

Q2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On effectue, de façon équiprobable, p tirages successifs avec remise et on note X le plus grand nombre obtenu.

Calculer, pour tout entier naturel k , $P(X \leq k)$, puis donner la loi de X .

Q3. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p$, puis en utilisant la **Q1.**, déterminer un équivalent pour n au voisinage de $+\infty$ de $E(X)$.

EXERCICE II

On considère les équations différentielles :

$$(E) : x^2 y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$$

$$(H) : x^2 y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 0$$

On note $I =]0, +\infty[$, $\mathcal{S}_I(E)$ l'ensemble des solutions de l'équation (E) sur I et $\mathcal{S}_I(H)$ l'ensemble des solutions de l'équation (H) sur I .

Q4. Donner, en justifiant, la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_I(H)$.

Q5. Démontrer qu'il existe une unique solution f de (E) sur I développable en série entière sur \mathbb{R} .

Vérifier que pour tout $x \in I$, $f(x) = \frac{\text{ch}(x) - 1}{x^2}$.

Q6. On note pour $x \in I$, $g(x) = -\frac{1}{x^2}$ et $h(x) = \frac{\text{sh}(x)}{x^2}$.

On admet dans cette question que $g \in \mathcal{S}_I(E)$ et $h \in \mathcal{S}_I(H)$.

Donner, sans calculs, l'ensemble $\mathcal{S}_I(E)$.

Q7. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H)$ (solutions de (H) sur \mathbb{R}) ?

PROBLÈME

Il existe de nombreuses méthodes pour déterminer la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Ce problème propose deux méthodes différentes de recherche de la valeur de cette somme.

Q8. Question préliminaire.

Si on admet que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, que vaut la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$?

PARTIE I

Q9. On note, pour tout entier naturel n , $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^n dx$.

Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto (\sin(x))^{n+1}$, puis déterminer une relation entre W_{n+2} et W_n .

En déduire, pour tout entier naturel n , que $W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Q10. Déterminer sur l'intervalle $] -1, 1[$ le développement en série entière des fonctions $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $x \mapsto \text{Arcsin}(x)$.

Q11. En déduire que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin x)^{2n+1}$.

Q12. Justifier que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin x)^{2n+1} \right] dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin x)^{2n+1} dx$.

Q13. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

PARTIE II

Q14. Donner sur l'intervalle $] -1, 1[$ le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$,

puis calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1} dx$.

On donnera le résultat sous la forme de la somme d'une série numérique.

Q15. On pose pour $x \in [0, +\infty[$, $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(xt)}{1+t^2} dt$.

Démontrer que la fonction f est bien définie et est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Q16. Etablir que cette fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle $]0, 1[$ et exprimer $f'(x)$ comme une intégrale.

Q17. Réduire au même dénominateur l'expression $\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2 t}{1+t^2 x^2}$, et en déduire que pour tout $x \in]0, 1[$,

$$f'(x) = \frac{\ln(x)}{x^2-1}.$$

Q18. Calculer $f(1)$, puis en déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

2024 - CCINP - MP - MATHÉMATIQUES 1

UN CORRIGÉ

EXERCICE I

Q1. • Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} d'espérance finie. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

On a $[X > k - 1] = [X = k] \sqcup [X > k]$ avec union disjointe.

Donc $P(X > k - 1) = P(X = k) + P(X > k)$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = P(X > k - 1) - P(X > k).$$

• Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n kP(X = k) &= \sum_{k=1}^n k(P(X > k - 1) - P(X > k)) \\ &= \sum_{k=1}^n kP(X > k - 1) - \sum_{k=1}^n kP(X > k) \\ &= \sum_{k=0}^n (k + 1)P(X > k) - \sum_{k=1}^n kP(X > k) \\ &= P(X > 0) - nP(X > n) + \sum_{k=1}^{n-1} ((k + 1) - k)P(X > k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n). \end{aligned}$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^n kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n).$

• **Méthode 1 pour le résultat de cours.** Remarquons que

$$0 \leq nP(X > n) = n \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X = k) \leq (n + 1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X = k) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X = k),$$

et le terme de droite est une série convergente car X admet une espérance.

De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X = k) = 0$ car le reste de la série définissant l'espérance tend vers 0.

Par le théorème des gendarmes, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} nP(X > n) = 0$. On a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^n kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n).$$

Par passage à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, la série $\sum_{k \geq 0} P(X > k)$ converge et $E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$.

• **Méthode 2 pour le résultat de cours.** On pose

$$\forall (n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad a_{n,k} = \begin{cases} P(X = k) & \text{si } k \geq n. \\ 0 & \text{si } k < n. \end{cases}$$

Par le théorème de Fubini positif, pour une famille de réels positifs :

$$\begin{aligned} \sum_{(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2} a_{n,k} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} a_{n,k} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=n}^{+\infty} P(X = k) \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P \left(\bigsqcup_{k=n}^{+\infty} [X = k] \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n,k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^k P(X = k) \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X = k) = E(X). \end{aligned}$$

Donc $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X > n-1) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n)$. Finalement, $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n)$.

Q2. • On effectue, dans l'urne contenant n boules numérotées de 1 à n , de façon équiprobable, p tirages successifs avec remise.

Pour $\ell \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on note Y_ℓ le résultat du p -ième tirage, c'est-à-dire le numéro de la ℓ -ième boule tirée. Puisque les tirages sont équiprobables, chaque Y_ℓ suit la loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.

En effet, $Y_\ell(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ et $\forall q \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $P(Y_\ell = q) = \frac{1}{n}$.

On note X le plus grand nombre obtenu : $X = \max_{1 \leq \ell \leq p} Y_\ell$.

Puisque $Y_\ell(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$, on a déjà $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$.

• Soit $k \in \mathbb{N}$.

Si $k = 0$, alors $P(X \leq 0) = 0$.

Si $k \geq n$, alors $P(X \leq k) = 1$.

Si $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, puisque l'union suivante est disjointe :

$$\forall \ell \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad P(Y_\ell \leq k) = P\left(\bigsqcup_{q=1}^k [Y_\ell = q]\right) = \sum_{q=1}^k P(Y_\ell = q) = \sum_{q=1}^k \frac{1}{n} = \frac{k}{n}.$$

Les tirages successifs sont indépendants, donc les variables aléatoires $(Y_\ell)_{1 \leq \ell \leq p}$ sont indépendantes et l'on a :

$$P(X \leq k) = P\left(\left(\max_{1 \leq \ell \leq p} Y_\ell\right) \leq k\right) = P\left(\bigcap_{\ell=1}^p [Y_\ell \leq k]\right) \stackrel{\text{indépendance des } Y_\ell}{=} \prod_{\ell=1}^p P(Y_\ell \leq k) = \prod_{\ell=1}^p \frac{k}{n} = \left(\frac{k}{n}\right)^p.$$

Cette formule est également valable pour $k = 0$. D'où

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X \leq k) = \begin{cases} \left(\frac{k}{n}\right)^p & \text{si } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket. \\ 1 & \text{si } k \geq n. \end{cases}$$

• Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a $[X \leq k] = [X = k] \sqcup [X \leq k-1]$ avec union disjointe.

Donc $P(X \leq k) = P(X = k) + P(X \leq k-1)$ et :

$$P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k-1) = \left(\frac{k}{n}\right)^p - \left(\frac{k-1}{n}\right)^p.$$

La loi de X vaut :

$$X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(X = k) = \left(\frac{k}{n}\right)^p - \left(\frac{k-1}{n}\right)^p.$$

Q3. • On pose $\forall x \in [0, 1], f(x) = x^p$. La fonction f est continue sur le segment $[0, 1]$.

Par le théorème sur les sommes de Riemann,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^p dx = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+1}.$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p = \frac{1}{p+1}$.

• Puisque $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$, X est une variable aléatoire finie donc X est d'espérance finie.

• Soit $k \in \mathbb{N}$. Si $k \geq n$, on a $P(X > k) = 0$.

Si $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a :

$$P(X > k) = 1 - P(X \leq k) = 1 - \left(\frac{k}{n}\right)^p.$$

D'après la question **Q1.** :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \left(\frac{k}{n}\right)^p\right) = n - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p.$$

Donc

$$\frac{1}{n}E(X) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{p+1} = \frac{p}{p+1}.$$

On en déduit que lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$E(X) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{p}{p+1} n.$$

EXERCICE II

Q4. Pour $x > 0$, l'équation (H) est équivalente à :

$$(H) : \quad \forall x > 0, \quad x^2 y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall x > 0, \quad y'' + \frac{4}{x}y' + \frac{2 - x^2}{x^2}y = 0.$$

Les coefficients de cette équation différentielle $x \mapsto \frac{4}{x}$ et $x \mapsto \frac{2 - x^2}{x^2}$ sont continus sur $I = \mathbb{R}_+^*$.

Donc (H) est une **équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 homogène à coefficients continus** sur I . D'après le cours, la dimension de l'ensemble des solutions de l'équation (H) sur I vaut 2.

Donc $\dim(\mathcal{S}_I(H)) = 2.$

Q5. Soit f la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$, que l'on note $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$

Alors f est de classe C^∞ sur $] - R, R[$ et l'on a :

$$\forall x \in] - R, R[, \quad \begin{cases} x^2 f''(x) &= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n. \\ 4x f'(x) &= 4x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} &= \sum_{n=1}^{+\infty} 4n a_n x^n. \\ (2 - x^2)f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} &= \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n. \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \forall x \in] - R, R[, \quad x^2 f''(x) + 4x f'(x) + (2 - x^2)f(x) &= 2a_0 + 6a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left((n(n-1) + 4n + 2)a_n - a_{n-2} \right) x^n \\ &= 2a_0 + 6a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left((n^2 + 3n + 2)a_n - a_{n-2} \right) x^n \\ &= 2a_0 + 6a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left((n+1)(n+2)a_n - a_{n-2} \right) x^n. \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, si f est solution de l'équation différentielle

$(E) : x^2 f''(x) + 4x f'(x) + (2 - x^2)f(x) = 1$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$, alors nécessairement :

$$\begin{cases} 2a_0 = 1. \\ a_1 = 0. \\ \forall n \geq 2, \quad (n+1)(n+2)a_n - a_{n-2} = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = \frac{1}{2}. \\ a_1 = 0. \\ \forall n \geq 2, \quad a_n = \frac{1}{(n+2)(n+1)} a_{n-2}. \end{cases}$$

Les coefficients pairs a_{2n} s'expriment en fonction de a_0 , et les coefficients impairs a_{2n+1} en fonction de a_1 .

En particulier, les coefficients impairs sont nuls : $\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n+1} = 0$.

Montrons par récurrence sur $n \geq 0$ que $a_{2n} = \frac{1}{(2n+2)!}$.

Initialisation : cas $n = 0$. On a bien $a_0 = \frac{1}{2}$ ce qui correspond à la formule proposée.

Hérédité. Supposons le résultat vrai au rang $n - 1$ et montrons-le au rang n . Par hypothèse de récurrence :

$$a_{2n} = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} a_{2n-2} = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \frac{1}{(2n-1)+2)!} = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \frac{1}{(2n)!} = \frac{1}{(2n+2)!},$$

ce qui achève la récurrence.

Finalement, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n} = \frac{1}{(2n+2)!}$ et $a_{2n+1} = 0$.

La règle de D'Alembert montre que la série entière obtenue $\sum_{n \geq 0} a_{2n} x^{2n}$ est de rayon de convergence $R = +\infty$.

En effet, posons $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^*, u_n(x) = a_{2n} x^{2n} \neq 0$. Alors

$$\left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \frac{a_{2n+2}}{a_{2n}} |x|^2 = \frac{(2n+2)!}{(2n+4)!} |x|^2 = \frac{1}{(2n+3)(2n+4)} |x|^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell = 0.$$

Par règle de D'Alembert pour les séries numériques, la série entière converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $R = +\infty$.

On a donc trouvé une solution développable en série entière sur \mathbb{R} , solution de (E) sur I , et la solution obtenue est unique par unicité des coefficients $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ obtenus.

Il existe une unique solution f de (E) sur I développable en série entière sur \mathbb{R} qui vaut $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$.

De plus,

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+2)!} = \frac{1}{x^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} = \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{x^2} (\text{ch}(x) - 1).$$

Ainsi $\forall x \in I = \mathbb{R}_+^*, f(x) = \frac{\text{ch}(x) - 1}{x^2}$.

Q6. • On a :

$$\forall x \in I, \begin{cases} f(x) = \frac{\text{ch}(x) - 1}{x^2} \\ g(x) = -\frac{1}{x^2} \\ (f - g)(x) = \frac{\text{ch}(x)}{x^2} \\ h(x) = \frac{\text{sh}(x)}{x^2} \end{cases}$$

• D'après l'énoncé, $f \in \mathcal{S}_I(E)$ et $g \in \mathcal{S}_I(E)$ donc par linéarité de l'équation différentielle, $(f - g) \in \mathcal{S}_I(H)$: $(f - g)$ est solution sur I de l'équation différentielle homogène (H) associée à (E).

• D'après l'énoncé, $h \in \mathcal{S}_I(H)$.

• Montrons que $(f - g, h)$ est une famille libre de $\mathcal{S}_I(H)$.
Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall x \in I, 0 = \lambda(f - g)(x) + \mu h(x) = \frac{\lambda \text{ch}(x) + \mu \text{sh}(x)}{x^2}.$$

Pour $x \in I = \mathbb{R}_+^*$, on a $x \neq 0$ d'où :

$$\forall x \in I, 0 = \lambda \text{ch}(x) + \mu \text{sh}(x) = \frac{1}{2} ((\lambda + \mu)e^x + (\lambda - \mu)e^{-x}).$$

En multipliant par $e^{-x} > 0$:

$$\forall x \in I, \quad (\lambda + \mu) + (\lambda - \mu)e^{-2x} = 0.$$

En passant à la limite quand $x \rightarrow +\infty$, on obtient : $\lambda + \mu = 0$. Alors

$$\forall x \in I, \quad (\lambda - \mu)e^{-x} = 0.$$

Donc $\lambda - \mu = 0$. Finalement $\lambda = \mu = 0$ et la famille $(f - g, h)$ est libre sur I .

- Ainsi $(f - g, h)$ est une famille libre et de cardinal 2 de $\mathcal{S}_I(H)$, qui est de dimension 2 d'après la question **Q4**.
Donc $\boxed{(f - g, h) \text{ est une base de } \mathcal{S}_I(H)}$: $\mathcal{S}_I(H) = \text{Vect}(f - g, h)$.
- Puisque l'on connaît une solution particulière f de (E) sur I , l'ensemble $\mathcal{S}_I(E)$ vaut

$$\boxed{\mathcal{S}_I(E) = f + \mathcal{S}_I(H) = f + \text{Vect}(f - g, h) = \{f + \lambda(f - g) + \mu h, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}}.$$

Plus simplement, puisque $\text{Vect}(\text{ch}, \text{sh}) = \text{Vect}(e^x, e^{-x})$, on a $\boxed{\mathcal{S}_I(H) = \text{Vect}\left(x \mapsto \frac{e^x}{x^2}, x \mapsto \frac{e^{-x}}{x^2}\right)}$ et

$$\boxed{\mathcal{S}_I(E) = f + \mathcal{S}_I(H) = \left\{x \mapsto \frac{\text{ch}(x) - 1}{x^2} + \frac{\lambda e^x + \mu e^{-x}}{x^2}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}}.$$

- Q7.** On peut montrer de même, par un calcul, que $\left(x \mapsto \frac{e^x}{x^2}, x \mapsto \frac{e^{-x}}{x^2}\right)$ forme également une famille libre et de cardinal 2 de l'ensemble des solutions de E sur \mathbb{R}_-^* . D'où

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}_+^*}(H) = \text{Vect}\left(x \mapsto \frac{e^x}{x^2}, x \mapsto \frac{e^{-x}}{x^2}\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}_-^*}(H) = \text{Vect}\left(x \mapsto \frac{e^x}{x^2}, x \mapsto \frac{e^{-x}}{x^2}\right)}.$$

Soit $f \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H)$.

Alors f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} , donc continue sur \mathbb{R} et en particulier, f admet une limite finie en 0.

De plus, $f|_{\mathbb{R}_+^*} \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}_+^*}(H)$ et $f|_{\mathbb{R}_-^*} \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}_-^*}(H)$.

On en déduit qu'il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$\begin{cases} \forall x > 0, & f(x) = \frac{ae^x + be^{-x}}{x^2}. \\ \forall x < 0, & f(x) = \frac{ce^x + de^{-x}}{x^2}. \end{cases}$$

On effectue un développement limité à droite en 0 :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{ae^x + be^{-x}}{x^2} \\ &= \frac{(a+b) + (a-b)x + \frac{a+b}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2} \quad \underset{x \rightarrow 0^+}{=} \quad \frac{1}{x^2} \left(a \left(1 + x + \frac{x^2}{2} \right) + b \left(1 - x + \frac{x^2}{2} \right) + o(x^2) \right) \\ &= \frac{a+b}{x^2} + \frac{a-b}{x} + \frac{a+b}{2} + o(1). \end{aligned}$$

Donc f admet une limite finie à droite en 0 si et seulement si $(a+b = a-b = 0) \Leftrightarrow (a = b = 0)$.

Par un calcul analogue, f admet une limite finie à gauche en 0 si et seulement si $(c = d = 0)$.

Donc f est nulle sur \mathbb{R}_+^* et sur \mathbb{R}_-^* , donc sur \mathbb{R} par continuité en 0.

Ainsi la seule solution de (H) sur \mathbb{R} est la fonction nulle.

Finalement, $\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H) = \{x \mapsto 0\}}$ et $\boxed{\text{la dimension de l'espace vectoriel } \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H) \text{ est nulle.}}$

PROBLÈME

Q8. Lorsque $n \rightarrow +\infty$, on a $\frac{1}{(2n+1)^2} \sim \frac{1}{4n^2}$ et $\frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4n^2}$.

Or la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ avec $\alpha = 2 > 1$ converge.

Par la règle des équivalents pour les séries à termes positifs, les deux séries $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n)^2}$ convergent.

De plus,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n \text{ pair}} \frac{1}{n^2} + \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Ainsi

$$\frac{3}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad \text{d'où} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{4}{3} \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Si on admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, alors on en déduit que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

PARTIE I

Q9. • Par composition de fonctions usuelles, la fonction $x \mapsto (\sin(x))^{n+1}$ est dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée :

$$\frac{d}{dx}((\sin(x))^{n+1}) = (n+1) \cos(x)(\sin(x))^n.$$

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Une intégration par parties, en intégrant $x \mapsto \cos(x)(\sin(x))^n$ et en dérivant $x \mapsto \cos(x)$, donne :

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{n+2} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^n (1 - \cos^2(x)) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^n dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \times \cos(x)(\sin(x))^n dx \\ &= W_n - \left(\left[\cos(x) \frac{(\sin(x))^{n+1}}{n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \frac{(\sin(x))^{n+1}}{n+1} dx \right) \\ &= W_n - \frac{1}{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{n+2} dx \\ &= W_n - \frac{1}{n+1} W_{n+2}. \end{aligned}$$

Donc $\frac{n+2}{n+1} W_{n+2} = W_n$ ce qui donne la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$

• Montrons par récurrence sur $n \geq 0$ que $W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Initialisation. Pour $n = 0$, on a

$$W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx = \left[-\cos(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 + 1 = 1,$$

ce qui correspond à la formule donnée pour $n = 0$.

Hérédité. Supposons le résultat vrai au rang n et montrons-le au rang $n+1$.

Par hypothèse de récurrence, $W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

D'après la formule obtenue précédemment :

$$\begin{aligned} W_{2n+3} &= \frac{2n+2}{2n+3} W_{2n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{(2n+2)^2}{(2n+3)(2n+2)} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \\ &= 2^2(n+1)^2 \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+3)!} = \frac{2^{2n+2}((n+1)!)^2}{(2n+3)!} = \frac{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2}{(2(n+1)+1)!}, \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

On a montré que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Q10. • D'après le cours, pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière sur $] -1, 1[$, avec un rayon de convergence $R = 1$, et :

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \text{ avec } a_n = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k).$$

• On a ici $\alpha = -1/2$. On en déduit le développement en série entière sur $] -1, 1[$ de $x \mapsto (1-x^2)^{-1/2}$:

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad (1-x^2)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (-x^2)^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (-1)^n x^{2n}.$$

Pour $n \geq 1$, les coefficients a_n valent :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2} - k \right) = \frac{(-1)^n}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2k+1}{2} = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{(2n)!}{\prod_{k=1}^n (2k)} \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{(2n)!}{2^n n!} = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2}. \end{aligned}$$

Cette expression donne 1 pour $n = 0$. Il vient :

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n}.$$

• La fonction Arcsin est dérivable sur $] -1, 1[$ et

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad \text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n}.$$

Par intégration terme à terme de la série entière, et puisque $\text{Arcsin}(0) = 0$, on obtient

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad \text{Arcsin}(x) = \text{Arcsin}(0) + \int_0^x \text{Arcsin}'(t) dt = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}.$$

Donc Arcsin est développable en série entière sur $] -1, 1[$ et

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad \text{Arcsin}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}.$$

Q11. Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ fixé. Posons $t = \sin(x)$. Alors $t \in [0, 1[$ et $-1, 1[$. D'après la question **Q10.**,

$$x = \text{Arcsin}(\sin(x)) = \text{Arcsin}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{(\sin(x))^{2n+1}}{(2n+1)}.$$

On a donc $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} (\sin x)^{2n+1}$.

Q12. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \boxed{f_n(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} (\sin x)^{2n+1} .}$$

On pose également $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

- (i) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction \sin est positive sur I donc f_n est une fonction positive sur I .
 f_n est continue (donc continue par morceaux) sur I .
 Chaque f_n est intégrable sur I , car f_n se prolonge en une fonction continue sur le segment I , en posant $f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)}$.
 Donc chaque f_n est une fonction positive, continue par morceaux et intégrable sur I .
- (ii) D'après la question **Q11.**, la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur I vers la fonction $S : x \mapsto x$, avec S continue (donc continue par morceaux) sur I .

On applique le **théorème d'intégration terme à terme pour une série de fonctions à valeurs positives** :

$$\text{dans } [0, +\infty], \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right] dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx .$$

Autrement dit,
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} (\sin x)^{2n+1} \right] dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} (\sin x)^{2n+1} dx .$$

Q13. On reprend les mêmes notations que dans la question **Q12.**

D'après la question **Q9.** pour l'expression de W_{2n+1} :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} (\sin x)^{2n+1} dx \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2n+1} dx \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} W_{2n+1} \\ &\stackrel{\text{Q9.}}{=} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} \times \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!} \\ &= \frac{1}{(2n+1)^2} . \end{aligned}$$

Or la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge, donc la série $\sum_{n \geq 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx$ converge.

En particulier, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt < +\infty$ donc $S : x \mapsto x$ est intégrable sur I (ce qu'on savait déjà).

D'après la question **Q12.** pour l'interversion série-intégrale, puis la question **Q11.** pour l'expression de la somme de la série de fonctions :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx \stackrel{\text{Q12.}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} S(x) dx \\ &\stackrel{\text{Q11.}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8} . \end{aligned}$$

On a donc $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$. D'après la question **Q8.**, on en déduit que $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$.

PARTIE II

Q14. La fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est développable en série entière sur $] -1, 1[$ car il s'agit de la somme de la série entière géométrique, qui est de rayon de convergence $R = 1$. De plus :

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

Pour $x \in] -1, 1[$, on a $x^2 \in] -1, 1[$ donc la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$ est aussi développable en série entière sur $] -1, 1[$:

$$\frac{1}{x^2-1} = -\frac{1}{1-x^2} = -\sum_{n=0}^{+\infty} (x^2)^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}. \quad \boxed{\forall x \in] -1, 1[, \quad \frac{1}{x^2-1} = -\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}.}$$

• Posons $\forall x \in]0, 1[, S(x) = \frac{\ln(x)}{x^2-1}$. S est continue sur $]0, 1[$.

Quand $x \rightarrow 0$, $S(x) = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

Quand $x \rightarrow 1$, $S(x) = \frac{\ln(x)}{x^2-1} = \frac{\ln(1+(x-1))}{(x-1)(x+1)} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{(x-1)}{(x-1)(x+1)} \sim \frac{1}{2}$ donc S admet une limite finie à gauche en 1.

Ainsi l'intégrale $\int_0^1 S(x) dx$ converge.

• D'après le développement en série entière précédent, pour $x \in]0, 1[$:

$$S(x) = \frac{\ln(x)}{x^2-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-\ln(x)x^{2n}).$$

Posons $\boxed{\forall n \geq 0, \quad \forall x \in]0, 1[, \quad f_n(x) = -\ln(x)x^{2n}.}$

• 1) $\forall n \geq 0$, f_n est positive, continue par morceaux (car continue) et intégrable sur $]0, 1[$.

En effet, f_n se prolonge en une fonction continue sur $]0, 1]$ et quand $x \rightarrow 0$, on a $f_n(x) = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

• 2) La série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement vers S sur $]0, 1[$, avec S continue par morceaux sur $]0, 1[$.

• 3) Une intégration par parties, justifiée car le crochet admet des limites finies (nulles) en 0 et en 1, donne :

$$\int_0^1 f_n(x) dx = -\int_0^1 \ln(x)x^{2n} dx = \left[-\ln(x) \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{x} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} dx = \frac{1}{2n+1} \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

On a $\frac{1}{(2n+1)^2} \sim \frac{1}{4n^2}$, donc la série $\sum_{n \geq 0} \int_0^1 f_n(x) dx = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge.

On peut donc appliquer le **théorème d'intégration terme à terme** : S est intégrable sur I et

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1} dx = \int_0^1 S(x) dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Donc $\boxed{\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.}$

Q15. On pose pour $x \in [0, +\infty[$, $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(xt)}{1+t^2} dt$.

Posons de plus $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \boxed{g(x, t) = \frac{\text{Arctan}(tx)}{1+t^2}.}$

La fonction Arctan est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, \text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$.

Donc Arctan est strictement croissante sur \mathbb{R} avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Arctan}(x) = -\frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(x) = +\frac{\pi}{2}$.

En particulier, $\forall x \in \mathbb{R}, |\text{Arctan}(x)| \leq \frac{\pi}{2}$.

(i) $\forall x \in \mathbb{R}_+, t \mapsto g(x, t)$ est continue par morceaux (car continue) sur \mathbb{R}_+ .

(ii) $\forall t \in \mathbb{R}_+, x \mapsto g(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}_+ .

(iii) **Hypothèse de domination** : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall t \in \mathbb{R}_+, |g(x, t)| = \left| \frac{\text{Arctan}(tx)}{1+t^2} \right| \leq \frac{\pi}{2(1+t^2)} = \varphi_0(t)$.

φ_0 est continue sur $[0, +\infty[$ et quand $t \rightarrow +\infty, \varphi_0(t) \sim \frac{\pi}{2t^2}$, donc φ_0 est intégrable sur \mathbb{R}_+ .

Ainsi φ_0 est une fonction positive, continue par morceaux (car continue) et intégrable sur \mathbb{R}_+ , indépendante de x .

Par le **théorème de continuité des intégrales à paramètre**, f est bien définie et continue sur \mathbb{R}_+ .

Q16. (i) $\forall t \in \mathbb{R}_+, x \mapsto g(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ et $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{1+t^2} \frac{t}{1+t^2x^2}$.

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}_+, t \mapsto g(x, t)$ est continue par morceaux (car continue) et intégrable sur \mathbb{R}_+ (l'intégrabilité provient de la domination par φ_0 dans la question **Q15**).

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}_+, t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux (car continue) sur \mathbb{R}_+ .

(iv) **Hypothèse de domination sur tout segment $[a, b]$ de \mathbb{R}_+^*** . Soit $0 < a < b$.

$\forall x \in [a, b], \forall t \in \mathbb{R}_+, \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{1}{1+t^2} \frac{t}{1+t^2a^2} = \varphi_1(t)$.

φ_1 est continue sur $[0, +\infty[$ et quand $t \rightarrow +\infty, \varphi_1(t) \sim \frac{1}{a^2t^3}$, donc φ_1 est intégrable sur \mathbb{R}_+ .

Ainsi φ_1 est une fonction positive, continue par morceaux (car continue) et intégrable sur \mathbb{R}_+ , indépendante de x .

Par le **théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre**, f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* ,

donc f est de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle $]0, 1[$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)(1+t^2x^2)} dt$.

Q17. Réduisons au même dénominateur l'expression suivante :

$$\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2t}{1+t^2x^2} = \frac{t(1+t^2x^2) - x^2t(1+t^2)}{(1+t^2)(1+t^2x^2)} = \frac{t(1-x^2)}{(1+t^2)(1+t^2x^2)} = (1-x^2) \frac{t}{(1+t^2)(1+t^2x^2)}$$

Soit $x \in]0, 1[$. Le calcul précédent donne la décomposition en éléments simples :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \frac{t}{(1+t^2)(1+t^2x^2)} = \frac{1}{1-x^2} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2t}{1+t^2x^2} \right)$$

D'où pour $x \in]0, 1[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1-x^2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2t}{1+t^2x^2} \right) dt = \frac{1}{1-x^2} \left[\frac{1}{2} \ln(1+t^2) - \frac{1}{2} \ln(1+t^2x^2) \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{1-x^2} \left[\ln \left(\frac{1+t^2}{1+t^2x^2} \right) \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-x^2} (-\ln(x^2)) \\ &= \frac{\ln(x)}{x^2-1} \end{aligned}$$

D'où $\forall x \in]0, 1[, f'(x) = \frac{\ln(x)}{x^2-1}$.

Q18. On remarque que $\text{Arctan}(0) = 0$ donc $f(0) = 0$. Ainsi

$$\forall x \in]0, 1[, \quad f(x) = \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \frac{\ln(t)}{t^2 - 1} dt.$$

Calculons $f(1)$ de deux manières différentes.

D'une part, pour $x = 1$, on peut déterminer une primitive de la fonction sous l'intégrale :

$$f(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(t)}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} \text{Arctan}(t) \text{Arctan}'(t) dt = \left[\frac{1}{2} (\text{Arctan}(t))^2 \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 = \frac{\pi^2}{8}.$$

Le crochet admet des limites finies car $\text{Arctan}(0) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(t) = \frac{\pi}{2}$.

D'autre part, puisque f est continue sur \mathbb{R}_+ donc en 1 (question **Q15.**), et en utilisant la question **Q17.** puis la question **Q14.** :

$$f(1) = \int_0^1 f'(x) dx \stackrel{\text{Q17.}}{=} \int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} dx \stackrel{\text{Q14.}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

On a donc $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = f(1) = \frac{\pi^2}{8}}$. D'après la question **Q8.**, on en déduit que $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$.