

MATHÉMATIQUES 1

Corrigé par Taoufik said

A. Préliminaires

1. Soient X une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, \dots, n\}$ et $m \in \{1, \dots, n\}$.

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \sum_{k=1}^{m-1} kP(X=k) + \sum_{k=m}^n kP(X=k) \\
 &\leq \sum_{k=1}^{m-1} (m-1)P(X=k) + \sum_{k=m}^n nP(X=k) \\
 &= (m-1) \underbrace{\sum_{k=1}^{m-1} P(X=k)}_{\leq 1} + n \underbrace{\sum_{k=m}^n P(X=k)}_{=P(X \geq m)} \\
 &\leq m-1 + nP(X \geq m)
 \end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
 n \ln n - n + 1 &= [t \ln t - t]_1^n = \int_1^n \ln t dt = \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \ln t dt \\
 &\leq \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \ln k dt = \sum_{k=2}^n \ln k = \sum_{k=1}^n \ln k
 \end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{n}{e}\right)^n &= \exp\left(n \ln\left(\frac{n}{e}\right)\right) = \exp(n \ln(n) - n) \\
 &\leq \exp(n \ln(n) - n + 1) \\
 &\leq \exp\left(\sum_{k=1}^n \ln k\right) \\
 &= \exp(\ln(n!)) = n!
 \end{aligned}$$

B. Le lemme de sous-additivité de Fekete

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble U_n est borné est non vide, donc il admet une borne supérieure et une borne inférieure.

On a : $U_{n+1} \subseteq U_n$, donc

$$\begin{cases} \bar{u}_{n+1} = \sup U_{n+1} \leq \sup U_n = \bar{u}_n \\ \underline{u}_{n+1} = \inf U_{n+1} \geq \inf U_n = \underline{u}_n \end{cases}$$

d'où $\underline{u}$ est $\nearrow$ et $\bar{u}$ est $\searrow$. Elles sont respectivement majorée et minorée car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\underline{u}_1 \leq \underline{u}_n \leq \bar{u}_n \leq \bar{u}_1$$

D'où la convergence de $\underline{u}$ et $\bar{u}$.

4. • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq \sup U_n = \bar{u}_n$ et $\bar{u}$ est $\searrow$, donc $\bar{u}$ est une suite décroissante plus grande que u .

• Soit v une suite décroissante plus grande que u . Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\forall k \geq n, u_k \leq v_k \leq v_n \quad (\text{car } v \searrow)$$

donc $\bar{u}_n = \sup U_n \leq v_n$, ceci pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'où $\bar{u}$ est la plus petite suite qui est décroissante et plus grande que u .

De même façon, on montre que $\underline{u}$ est la plus grande suite qui est croissante et plus petite que u (ou bien en utilisant le fait que $\underline{u} = -(-u)$).

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\forall k \geq n, u_k \leq v_k \leq \bar{v}_k \leq \bar{v}_n$$

donc $\bar{u}_n = \sup\{u_k, k \geq n\} \leq \bar{v}_n$, ceci pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'où

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{u}_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{v}_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

par passage à la limite.

6. Comme $\bar{u}$ est $\searrow$ et $\underline{u}$ est $\nearrow$ donc $\bar{u}$ et $\underline{u}$ sont adjacentes si et seulement si $\lim(\bar{u} - \underline{u}) = 0$.

Supposons que $\lim(\bar{u} - \underline{u}) = 0$ et montrons que u est convergente :

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n > N, 0 \leq \bar{u}_n - \underline{u}_n = |\bar{u}_n - \underline{u}_n| < \varepsilon$$

Soit $(k, k') \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que $k, k' > N$. Posons $n = \min(k, k') > N$ et supposons que $u_k \geq u_{k'}$ (k et k' jouent un rôle symétrique). On a :

$$|u_k - u_{k'}| = u_k - u_{k'} \leq \bar{u}_n - \underline{u}_n < \varepsilon$$

La suite u est donc de Cauchy, donc elle est convergente.

Supposons la convergence de u vers un réel l et montrons que

$\lim(\bar{u} - \underline{u}) = 0$:

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n > N, l - \varepsilon < u_n < \varepsilon + l$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > N$. Pour tout $k \geq n$, on a :

$$l - \varepsilon < u_k < \varepsilon + l$$

donc $l - \varepsilon < u_n \leq \bar{u}_n \leq \varepsilon + l$, d'où la suite $\bar{u}$ est convergente vers l .

De même, on montre que $\underline{u}$ converge vers l , puis, on en déduit que

$$\lim(\bar{u} - \underline{u}) = 0$$

7. Comme $qn + r = m \geq 2n$ alors $(q - 1)n \geq n - r > 0$ donc $q > 1$.
Par sous-additivité, on a

$$u_m \leq u_{n(q-1)} + u_{n+r}$$

on vérifie par une récurrence facile que la sous-additivité entraîne

$$u_{(q-1)n} \leq (q - 1)u_n$$

d'où $u_m \leq (q - 1)u_n + u_{n+r}$.

En divisant par m et en utilisant la définition de (q, r) , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{u_m}{m} &\leq (q - 1) \cdot \frac{u_n}{m} + \frac{u_{n+r}}{m} \\ &= \frac{m - n - r}{n} \cdot \frac{u_n}{m} + \frac{u_{n+r}}{m} \\ &\leq \frac{m - n - r}{m} \cdot \frac{u_n}{n} + \frac{\max\{u_n, \dots, u_{2n-1}\}}{m} \end{aligned}$$

8. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $M = \max\{u_n, \dots, u_{2n-1}\}$. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m \geq 2n$, on écrit la division euclidienne par n et on obtient :

$$0 \leq \frac{u_m}{m} \leq \frac{m - n}{m} \cdot \frac{u_n}{n} + \frac{M}{m} \quad (*)$$

La suite $\left(\frac{m-n}{m} \cdot \frac{u_n}{n} + \frac{M}{m}\right)_{m \geq 2n}$ converge, donc elle est majorée puis $\left(\frac{u_m}{m}\right)_{m \geq 2n}$ est bornée, d'où la bornétude de la suite $\left(\frac{u_m}{m}\right)_{m \geq 1}$.

En utilisant **Q.5**, le passage à la limite supérieure dans l'inégalité (*) entraîne

$$\begin{aligned}\overline{\lim}_{m \rightarrow +\infty} \frac{u_m}{m} &\leq \overline{\lim}_{m \rightarrow +\infty} \frac{m-n}{m} \cdot \frac{u_n}{n} + \frac{\max\{u_n, \dots, u_{2n-1}\}}{m} \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{m-n}{m} \cdot \frac{u_n}{n} + \frac{\max\{u_n, \dots, u_{2n-1}\}}{m} \quad (\text{ car convergente : Q.6}) \\ &= \frac{u_n}{n}\end{aligned}$$

Ceci pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

9. On pose $v_n = \frac{u_n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \geq n, \overline{\lim}_{m \rightarrow +\infty} \frac{u_m}{m} \leq v_k$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \overline{\lim}_{m \rightarrow +\infty} \frac{u_m}{m} \leq v_n$, ce qui donnera

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow +\infty} \frac{u_m}{m} \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{u_m}{m}$$

Comme $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{u_m}{m} \leq \overline{\lim}_{m \rightarrow +\infty} \frac{u_m}{m}$, alors la limite supérieure et la limite inférieure sont égales, ce qui donne la convergence de la suite par **Q.6**.

C. Une application probabiliste

10. • On suppose que $P(X_1 < x) = 1$ et on pose $\Omega' = \bigcap_{i=1}^n (X_i < x)$.

Par indépendance, on a

$$P(\Omega') = P\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i < x)\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i < x)$$

Comme les X_i ont même loi alors, pour tout $i = 1, \dots, n$,

$$P(X_i < x) = P(X_1 < x)$$

D'où $P(\Omega') = (P(X_1 < x))^n = 1$.

Si $\omega \in \Omega'$, alors $\sum_{i=1}^n X_i(\omega) < nx$ donc $Y_n(\omega) < x$. On a donc $\Omega' \subseteq (Y_n < x)$

d'où $P(Y_n < x) = 1$.

- On suppose que $P(X_1 \geq x) > 0$. Pour $\omega \in \bigcap_{i=1}^n (X_i \geq x)$, on a

$$Y_n(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i(\omega) \geq x$$

D'où $P(Y_n \geq x) \geq P(\bigcap_{i=1}^n (X_i \geq x)) = \prod_{i=1}^n P(X_i \geq x) = (P(X_1 \geq x))^n > 0$.

11. Soit $\omega \in (Y_m \geq x) \cap \left(\frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geq x \right)$. On a : $\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m X_k(\omega) \geq x$ et

$$\frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} X_k(\omega) \geq x$$

donc $\sum_{k=1}^m X_k(\omega) \geq mx$ et $\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k(\omega) \geq nx$, d'où $Y_{n+m} \geq x$ et $\omega \in (Y_{n+m} \geq x)$.

On en déduit que $P(\{Y_{n+m} \geq x\}) \geq P(\{Y_m \geq x\} \cap \{\frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geq x\})$ Les

X_i sont indépendantes donc Y_m et $\frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} X_k$ le sont aussi, puis $P(\{Y_m \geq$

$x\}) \cap \{\frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geq x\}) = P(\{Y_m \geq x\}) \cdot P(\{\frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geq x\})$ Les X_i ont la

même loi donc $\frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} X_k$ et $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ ont la même loi, donc $P(\{\frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geq x\}) = P(\{Y_n \geq x\})$ puis

$$P(\{Y_{n+m} \geq x\}) \geq P(\{Y_n \geq x\}) \cdot P(\{Y_m \geq x\})$$

12. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Cas 1 : Si $P(X_1 < x) = 1$

Dans ce cas, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(P(Y_n \geq x))^{\frac{1}{n}} = (1 - P(Y_n < x))^{\frac{1}{n}} = 0$.

D'où la convergence de la suite $\left((P(Y_n \geq x))^{\frac{1}{n}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Cas 2 : Si $0 \leq P(X_1 < x) < 1$

Dans ce cas, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < P(Y_n \geq x) \leq 1$.

On pose $u_n = -\ln(P(Y_n \geq x)) \geq 0$. Par **Q.11**, la suite (u_n) est sous-additive, donc $(\frac{u_n}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente (par **Q.9**). L'image de cette suite

par la fonction continue $\exp$ n'est que la suite $\left((P(Y_n \geq x))^{\frac{1}{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$, d'où sa convergence.

D. Le théorème de Erdős-Szekeres

13. • Pour $s = 1$, il n'y a rien à démontrer.
 • Supposons que la propriété est valable jusqu'au rang s et montrons la au rang $s + 1$:
 Soit z une valeur de la dernière pile. Il existe une valeur b_s dont le jeton est à la s -ème pile tel que $b_s > z$ car sinon on ne va pas mettre le jeton de valeur z à la $(s + 1)$ -ème pile. On pose $b_{s+1} = z$ et on supprime tous les éléments de la dernière pile de la liste a sans changer l'ordre des autres, la liste obtenue sera notée a' . Si on applique le processus énoncé sur a' , on va obtenir les s premières piles du processus initial, l'hypothèse de récurrence entraîne qu'il existe pour la valeur b_s une suite $b' = (b_1, \dots, b_s)$ extraite de a' , décroissante telle que b_i est la valeur d'un jeton qui se trouve à la i -ème pile. La suite $b = b', z$ répond bien à notre question.
14. Si a possède une liste extraite croissante de longueur $p + 1$, alors c'est ce qu'on veut, sinon, les $p + 1$ premiers éléments ne seront pas tous dans la première pile, soit v_1 la première valeur entre eux qui va être dans la deuxième pile. On a aussi $v_1, a_{p+2}, \dots, a_{2p+1}$ n'est pas croissante, donc l'une au moins des valeurs $a_{p+2}, \dots, a_{2p+1}$ ne sera pas dans la deuxième pile, en itérant, on trouve que énoncé précédemment donnera au moins $q + 1$ piles, d'où l'existence d'une suite extraite de a , à $q + 1$ éléments et décroissante, d'après **Q.13**.

E. Comportement asymptotique d'une suite aléatoire

15. On a $P(A_1 = 1) = P(B \in \{\sigma \in S_n, \sigma(1) = 1\}) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$
 (et de même $P(A_2 = 1) = \frac{1}{n}$) donc $0 = P(A_1 = 1, A_2 = 1) \neq P(A_1 = 1).P(A_2 = 1)$ d'où les $A_1, \dots, A_n$ ne sont pas indépendantes.
16. $P(A^s) = P(A_{s_1} < \dots < A_{s_k}) = P(B \in E)$ avec $E = \{\sigma \in S_n, \sigma(s_1) < \dots < \sigma(s_k)\}$
 donc $P(A^s) = \frac{\text{Card}(E)}{\text{Card}(S_n)}$. Le choix d'un élément $\sigma \in E$ consiste à choisir une k -partie de $\{1, \dots, n\}$ avec $\binom{n}{k}$ possibilité puis l'ordonner et choisir $(n - k)$ éléments deux à deux distincts dans le reste de $\{1, \dots, n\}$ avec $(n - k)!$

possibilités,

d'où $Card(E) = \binom{n}{k} (n-k)! = \frac{n!}{k!}$, par suite $P(A^s) = \frac{1}{k!}$.

17. Pour $k = 1, \dots, n$, on note par E_c^k , l'ensemble de $\sigma \in S_n$ tel que la plus longue liste croissante extraite de $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$, est de longueur k . On note aussi par E_d^k , l'ensemble de $\sigma \in S_n$ tel que la plus longue liste décroissante extraite de $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$, est de longueur k . On considère aussi la bijection φ qui associe à chaque $\sigma \in S_n$, la permutation $\varphi(\sigma)$ définie par :

$$\varphi(\sigma) = (\sigma(n), \dots, \sigma(1))$$

On a bien $\varphi(E_c^k) = E_d^k$ donc $Card(E_c^k) = Card(E_d^k)$.

D'où, pour tout $k = 1, \dots, n$,

$$P(C_n = k) = P(B \in E_c^k) = \frac{Card(E_c^k)}{n!} = \frac{Card(E_d^k)}{n!} = P(B \in E_d^k) = P(D_n = k)$$

Montrons que $E(C_n) \geq \frac{\sqrt{n}}{2}$:

Si $n = 1 + pq$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$, alors, par Le théorème de Erdős-Szekeres, on a

$$P[(C_n \geq p+1) \cup (D_n \geq q+1)] = 1$$

Par sous-additivité de probabilité, on a :

$$P(C_n \geq p+1) + P(D_n \geq q+1) \geq 1$$

L'inégalité de Marcov et le fait que C_n et D_n ont même loi permettent d'écrire

$$\begin{aligned} 1 &\leq P(C_n \geq p+1) + P(D_n \geq q+1) \\ &\leq \frac{E(C_n)}{p+1} + \frac{E(D_n)}{q+1} \\ &= E(C_n) \left(\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} \right) \end{aligned}$$

Si $\sqrt{n} = k \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ (i.e. $n \geq 4$), on pose $p = k+1$ et $q = k-1$, on a $n = pq + 1$ donc

$$1 \leq E(C_n) \left(\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} \right) = E(C_n) \left(\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k} \right) \leq \frac{2E(C_n)}{k} = \frac{2E(C_n)}{\sqrt{n}}$$

Si $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$, on pose $p = q = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ et $n' = pq + 1$. L'étude précédente permet d'écrire

$$E(C_{n'}) \geq \frac{p+1}{2} \geq \frac{\sqrt{n}}{2}$$

D'autre part l'inégalité $p < \sqrt{n}$ entraîne $n' - 1 = p^2 < n$ donc $n' \leq n$ puis $C_{n'} \leq C_n$ et par suite $E(C_{n'}) \leq E(C_n)$ et l'inégalité est établie.

18. Notons $L_c^k = \{s \in [1, n]^k, s \nearrow\}$. On a :

$$\begin{aligned}\omega \in (C_n \geq k) &\iff \exists s = (s_1, \dots, s_k) \in L_c^k \text{ tel que } (A_{s_1}(\omega), \dots, A_{s_k}(\omega)) \nearrow \\ &\iff \exists s = (s_1, \dots, s_k) \in L_c^k \text{ tel que } \omega \in A^s \\ &\iff \omega \in \bigcup_{s \in L_c^k} A^s\end{aligned}$$

$$\text{D'où } P(C_n \geq k) = P\left(\bigcup_{s \in L_c^k} A^s\right) \leq \sum_{s \in L_c^k} P(A^s).$$

Le choix d'un $s \in L_c^k$ consiste à choisir une k -partie de $[1, n]$ et l'ordonner, ce qui donne $\text{Card}(L_c^k) = \binom{n}{k}$. Par **Q.16**, on a $\forall s \in L_c^k, P(A^s) = \frac{1}{k!}$.
D'où

$$P(C_n \geq k) \leq \frac{\binom{n}{k}}{k!}$$

19. On pose $k = -\lceil -\alpha e \sqrt{n} \rceil$. On suppose que $n \geq 2$ (le cas où $n = 1$ est trivial), puisque $\alpha > 1$ alors $\alpha \sqrt{n} e > 3$ donc $-k \leq -4$ puis $k \geq 4$, par définition de la partie entière, on a :

$$k - 1 < \alpha e \sqrt{n} \leq k$$

On a $P(C_n \geq \alpha e \sqrt{n}) \leq P(C_n \geq k - 1)$, et par **Q.18**, on a :

$$\begin{aligned}P(C_n \geq k - 1) &\leq \frac{\binom{n}{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \frac{\frac{n!}{(n-k+1)!}}{((k-1)!)^2} \\ &\leq \frac{n!}{(n-k+1)!} \cdot \left(\frac{e}{k-1}\right)^{2k-2} \quad (\text{Q.2})\end{aligned}$$

On a $\frac{1}{\alpha \sqrt{n}} < \frac{e}{k-1} < 1$ et $6 \leq 2k - 2 \leq 2\alpha e \sqrt{n}$ donc

$$\left(\frac{e}{k-1}\right)^{2k-2} \leq \left(\frac{1}{\alpha \sqrt{n}}\right)^{2k-2} \leq \left(\frac{1}{n}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2\alpha e \sqrt{n}}$$

Par suite

$$\frac{n!}{(n-k+1)!} \cdot \left(\frac{e}{k-1}\right)^{2k-2} \leq \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+2}{n} \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2\alpha e \sqrt{n}} \leq \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2\alpha e \sqrt{n}}$$

D'où l'inégalité cherchée.

20. • Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\alpha_n = 1 + n^{-1/4} > 1$. Par **Q.19**, il existe un entier non nul k_n vérifiant $k_n - 1 < \alpha_n e \sqrt{n} \leq k_n$ et aussi

$$P(C_n \geq k_n) \leq P(C_n \geq \alpha_n e \sqrt{n}) \leq \left(\frac{1}{\alpha_n} \right)^{2\alpha_n e \sqrt{n}}$$

L'inégalité de **Q.1** reste valable même si $m > n$ donc

$$E(C_n) \leq k_n - 1 + nP(C_n \geq k_n)$$

puis

$$E(C_n) \leq \alpha_n e \sqrt{n} + nP(C_n \geq k_n) = \sqrt{n}[(1 + n^{-1/4})e + \underbrace{\sqrt{n}P(C_n \geq k_n)}_{:=\varepsilon_n}]$$

D'où

$$\frac{E(C_n)}{\sqrt{n}} \leq (1 + n^{-1/4})e + \varepsilon_n \quad (**)$$

Il suffit de montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \left(\frac{1}{\alpha_n} \right)^{2\alpha_n e \sqrt{n}} = 0$:

On a

$$\alpha_n \ln(\alpha_n) = \frac{1}{n^{1/4}} + \frac{1}{n^{1/2}} + o\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right)$$

donc

$$\exp(2e\sqrt{n}\alpha_n \ln(\alpha_n)) = \exp(2e + o(n^{1/4})) \exp(n^{1/4})$$

d'où

$$\sqrt{n} \left(\frac{1}{\alpha_n} \right)^{2\alpha_n e \sqrt{n}} = \frac{n^{1/2}}{\exp(n^{1/4})} \cdot \frac{1}{\exp(2e + o(n^{1/4}))} \rightarrow 0$$

• L'inégalité (**) entraîne que la suite $\left(\frac{E(C_n)}{\sqrt{n}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée car elle est plus petite qu'une suite convergente. Elle est aussi minorée par 0 car C_n prend des valeurs positives, d'où la bornétude de $\left(\frac{E(C_n)}{\sqrt{n}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

D'après **Q.3**, une suite bornée admet une limite supérieure, d'où l'existence de $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(C_n)}{\sqrt{n}}$. Le passage à la limite supérieure dans (**) et la convergence de la suite de droite vers e nous donne l'inégalité cherchée.

Pour vos remarques, contactez moi sur "taoufiki-maths@hotmail.fr"