

**Résultats préliminaires.**

1. **a.** Si  $f$  est périodique, continue par morceaux et de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux alors sa série de Fourier converge simplement sur  $\mathbb{R}$  vers sa régularisée de Dirichlet  $\tilde{f} : x \mapsto \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$ .  $\square$

**b.** Si  $f$  n'est pas continue alors la convergence ne saurait être uniforme sur  $\mathbb{R}$  puisqu'alors, par théorème de récupération uniforme de la continuité,  $f$  serait continue.  $\square$

2.  $\varphi$  n'est pas de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$  car  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi'(x) = +\infty$ .  $\square$

3. **a.** Comme  $u_n - \ell$  tend vers 0 on a  $u_n - \ell = o(v_n)$  avec  $v_n = 1$ . Le théorème de sommation de la relation  $o$  fournit alors, puisque la série  $\sum v_n$  est à termes positifs et divergente, que  $\sum_{k=0}^n (u_k - \ell) = o\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$  c'est à dire :

$$\sum_{k=0}^n (u_k - \ell) = o(n+1). \quad \square$$

**b.** Ainsi  $\frac{\sum_{k=0}^n (u_k - \ell)}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  i.e.  $\frac{u_0 + u_1 + \dots + u_n}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ .  $\square$

4. Soit  $f$  continue sur  $\mathbb{R}$  et périodique dont la série de Fourier converge simplement sur  $\mathbb{R}$  vers une fonction notée  $g$ . D'après le théorème de Césàro la suite  $(\sigma_n(f))$  converge également simplement sur  $\mathbb{R}$  vers  $g$ . Mais d'après le théorème de Fejér elle converge uniformément donc a fortiori simplement sur  $\mathbb{R}$  vers  $f$ . Ainsi  $g = f$ .  $\square$

5. Soit  $(u_n)$  une suite de réels positifs qui converge vers 0. Notons  $d_n = \sup_{k \geq n} \{u_k\}$  ce qui a bien un sens puisque, comme la suite  $(u_n)$  est convergente, elle est bornée.

On a bien sûr  $0 \leq u_n \leq d_n$  pour tout  $n$ .

Par ailleurs la suite  $(d_n)$  est évidemment décroissante.

En outre elle tend vers 0. En effet soit  $\varepsilon > 0$  donné quelconque. Comme la suite  $(u_n)$  tend vers 0, il existe un entier  $N_\varepsilon$  tel que  $0 \leq u_n \leq \varepsilon$  pour tout  $n \geq N_\varepsilon$ . Ainsi  $0 \leq d_{N_\varepsilon} \leq \varepsilon$  ce qui prouve bien que la suite  $(d_n)$  tend vers 0 puisqu'elle est décroissante.  $\square$

**Un exemple de série de Fourier divergente en un point.**

6. On a évidemment  $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$  pour tout  $n$  et tout  $x \in [0, \pi]$  ce qui prouve bien que la série  $\sum f_n$  converge normalement sur  $[0, \pi]$ .  $\square$

REMARQUE : Comme  $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  est continue sur  $[0, \pi]$  par théorème de récupération uniforme de la continuité, la fonction  $f$  définie déjà sur  $[-\pi, \pi]$  par parité puis sur  $\mathbb{R}$  par  $2\pi$ -périodicité est bien continue sur  $\mathbb{R}$ .  $\square$

7. **a.** Nous avons  $2 \sin\left(\frac{2k+1}{2}t\right) \cos(pt) = \sin\left(\left(\frac{2k+1}{2} + p\right)t\right) + \sin\left(\left(\frac{2k+1}{2} - p\right)t\right)$  d'où immédiatement :

$$I_{p,k} = \frac{1}{2k+1+2p} + \frac{1}{2k+1-2p} = \frac{1}{2(k-p)+1} + \frac{1}{2(k+p)+1}. \quad \square$$

7. **b.** Il en découle que  $T_{q,k} = \frac{1}{2k+1} + \sum_{j=k-q}^{j=k+q} \frac{1}{2j+1}$ .  $\square$

Si  $q \leq k$  cette somme est évidemment positive.

Sinon elle s'écrit  $T_{q,k} = \frac{1}{2k+1} + \sum_{j=-(q-k)}^{-1} \frac{1}{2j+1} + \sum_{j=0}^{k+q} \frac{1}{2j+1} = \frac{1}{2k+1} - \sum_{j=1}^{q-k} \frac{1}{2j-1} + \sum_{j=1}^{k+q+1} \frac{1}{2j-1}$

donc  $T_{q,k} = \frac{1}{2k+1} + \sum_{j=q-k+1}^{q+k+1} \frac{1}{2j-1}$  et est donc encore positive.

Ainsi on a bien  $T_{q,k} \geq 0$  pour tout couple  $(q, k)$  d'entiers naturels.  $\square$

7. **c.** On a classiquement par comparaison à une intégrale :  $\int_0^{N+1} \frac{dt}{2t+1} \leq \sum_{k=0}^N \frac{1}{2k+1} \leq 1 + \int_0^N \frac{dt}{2t+1}$  i.e.

$$\frac{1}{2} \ln(2N+3) \leq \sum_{k=0}^N \frac{1}{2k+1} \leq 1 + \frac{1}{2} \ln(2N) \text{ d'où, par le principe des gendarmes, } \sum_{k=0}^N \frac{1}{2k+1} \sim \frac{1}{2} \ln N. \quad \square$$

7. **d.** Nous avons  $T_{k,k} = \frac{1}{2k+1} + \sum_{j=0}^{2k} \frac{1}{2j+1}$  donc  $T_{k,k} \sim \frac{1}{2} \ln(2k) \sim \frac{1}{2} \ln k$ .  $\square$

8. Comme  $f$  est paire, nous avons :

$$a_p(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(pt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(pt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\left(2^{n^3} + 1\right) \frac{t}{2}\right) \cos(pt) \right) dt.$$

Or la série qui figure sous l'intégrale étant normalement convergente sur  $[0, \pi]$  (même démonstration qu'à la question 6) on peut intégrer terme à terme d'où (en remarquant que  $2^{n^3} + 1 = 2k + 1$  avec  $k = 2^{n^3-1}$ ) :

$$a_p(f) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} I_{p, 2^{n^3-1}}. \quad \square$$

REMARQUE : Cette relation est également vraie pour  $p = 0$  et pas simplement pour  $p$  entier naturel non nul comme il est demandé dans l'énoncé !

9. Nous avons  $S_{2^{p^3-1}}(f)(0) = -\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=0}^{2^{p^3-1}} a_k(f) = -\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=0}^{2^{p^3-1}} \left( \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} I_{k, 2^{n^3-1}} \right)$ .

Donc (par linéarisation de séries convergentes) :

$$S_{2^{p^3-1}}(f)(0) = -\frac{a_0(f)}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{2^{p^3-1}} I_{k, 2^{n^3-1}} \right) = -\frac{a_0(f)}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} T_{2^{p^3-1}, 2^{n^3-1}}.$$

Or cette dernière série est à termes positifs donc sa somme est supérieure en particulier à son terme de rang  $p$  d'où  $S_{2^{p^3-1}}(f)(0) \geq -\frac{a_0(f)}{2} + \frac{2}{\pi p^2} T_{2^{p^3-1}, 2^{p^3-1}}$ .  $\square$

D'après la question 7.d, nous avons  $T_{2^{p^3-1}, 2^{p^3-1}} \sim \frac{1}{2} \ln(2^{p^3-1}) = \frac{\ln 2}{2} (p^3 - 1) \sim \frac{\ln 2}{2} p^3$ .

Il découle alors immédiatement de l'inégalité ci-dessus que  $S_{2^{p^3-1}}(f)(0) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} +\infty$ .

Il en résulte que la suite  $(S_n(f)(0))$  diverge puisqu'il existe une suite extraite tendant vers  $+\infty$ .  $\square$

### Fonctions à variations bornées. Théorème de Jordan.

10. Commençons par remarquer que la "subdivision"  $\sigma_n$  proposée est bien une subdivision de  $[0, 1]$  ! Il vient :

$$V(\sigma_n, f) = \underbrace{\left| \frac{1}{2n} \cos(n\pi) \right|}_{1/2n} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \left| \frac{1}{2(n-k)} \cos((n-k)\pi) - \frac{1}{2(n+1-k)} \cos((n+1-k)\pi) \right|}_{V_n} + \underbrace{\left| -\frac{1}{2} \cos(\pi) \right|}_{1/2}.$$

Or  $\cos((n-k)\pi) = (-1)^{n-k}$  et  $\cos((n-k+1)\pi) = (-1)^{n-k+1}$  de sorte que  $V_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{1}{2(n-k)} + \frac{1}{2(n-k+1)} \right)$

c'est à dire  $V_n = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^n \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$ .

En conclusion  $V(\sigma_n, f) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \sim \ln n$  ce qui prouve bien que  $f$  n'est pas à variations bornées.  $\square$

11.a. Il est immédiat que si  $f$  est monotone sur  $[a, b]$  alors  $V(\sigma, f) = |f(b) - f(a)|$  pour toute subdivision  $\sigma$  de  $[a, b]$  de sorte que  $f$  est à variations bornées et que  $V([a, b], f) = |f(b) - f(a)|$ .  $\square$

11.b. Il est également immédiat que si  $\sigma$  est une subdivision de  $[a, b]$  on a  $V(\sigma, f + g) \leq V(\sigma, f) + V(\sigma, g)$ .

Ainsi la somme de deux fonctions à variations bornées (et en particulier de deux fonctions monotones) sur  $[a, b]$  est-elle à variations bornées.  $\square$

11.c. Si  $f$  est continue et de classe  $C^1$  par morceaux, on a  $f(x_{i+1}) - f(x_1) = \int_{x_1}^{x_{i+1}} f'(t) dt$  d'après la relation

fondamentale primitivation-intégration. De sorte que  $|f(x_{i+1}) - f(x_1)| \leq M_1(x_{i+1} - x_1)$  en notant  $M_1 = \sup_{t \in [a, b]} |f'(t)|$  (par la majoration fondamentale du calcul intégral).

Ainsi  $V(\sigma, f) \leq M_1(b - a)$  pour toute subdivision  $\sigma$  de  $[a, b]$  de sorte que  $f$  est à variations bornées.  $\square$

12. Si  $\sigma_1$  est une subdivision quelconque de  $[a, c]$  et  $\sigma_2$  de  $[c, b]$  alors  $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$  est une subdivision de  $[a, b]$  et  $V(\sigma_1, f) + V(\sigma_2, f) = V(\sigma, f) \leq V([a, b], f)$ . Ce qui prouve que  $V(\sigma_1, f) \leq V([a, b], f)$  donc que  $f$  est bien à variations bornées sur  $[a, c]$ . De même sur  $[c, b]$ . En outre en passant au sup dans l'inégalité ci-dessus pour  $\sigma_1$  puis  $\sigma_2$  on obtient  $V([a, c], f) + V([c, b], f) \leq V([a, b], f)$ .  $\square$

REMARQUE : l'égalité annoncée dans l'énoncé est très facile à établir. En effet soit  $f$  à variations bornées sur  $[a, c]$  et  $[c, b]$  et soient  $\sigma$  une subdivision quelconque de  $[a, b]$  et  $\sigma'$  la subdivision obtenue en rajoutant (éventuellement) le point  $c$ . Par inégalité triangulaire il est clair que  $V(\sigma, f) \leq V(\sigma', f)$ . Soient alors  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  les subdivisions de  $[a, c]$  et  $[c, b]$  telles que  $\sigma' = \sigma_1 \cup \sigma_2$ . Nous avons  $V(\sigma', f) = V(\sigma_1, f) + V(\sigma_2, f) \leq V([a, c], f) + V([c, b], f)$ . Ainsi  $V(\sigma, f) \leq V([a, c], f) + V([c, b], f)$  ce qui prouve bien que  $f$  est à variations bornées sur  $[a, b]$  et que  $V([a, b], f) \leq V([a, c], f) + V([c, b], f)$ .

En conclusion finale,  $f$  est à variations bornées sur  $[a, b]$  si et seulement si elle l'est sur  $[a, c]$  et  $[c, b]$  et alors  $V([a, b], f) = V([a, c], f) + V([c, b], f)$ .  $\square$

**13.a.** Remarquons d'une manière générale que si  $f$  est à variations bornées sur  $[a, b]$  alors  $|f(x) - f(y)| \leq V([a, b], f)$  pour tout couple  $(x, y)$  d'éléments de  $[a, b]$ .

Donc ici  $\left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(t) - f(x_k)) e^{-int} dt \right| \leq \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t) - f(x_k)| dt \leq V_k(f)(x_k - x_{k-1})$ .

D'où évidemment  $\underbrace{\left| \sum_{k=1}^{|n|N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(t) - f(x_k)) e^{-int} dt \right|}_{\stackrel{\text{DEF}}{=} \alpha_n} \leq \sum_{k=1}^{|n|N} V_k(f)(x_k - x_{k-1})$ .  $\square$

REMARQUE :  $\sum_{k=1}^{|n|N} V_k(f)(x_k - x_{k-1}) = \frac{2\pi}{|n|N} \sum_{k=1}^{|n|N} V_k(f) \leq \frac{2\pi}{|n|N} V(\sigma, f) \leq \frac{2\pi}{|n|N} V([0, 2\pi], f)$  d'après la question 12.

**13.b.** On a  $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k) e^{-int} dt = \frac{i}{n} f(x_k) (e^{-i\varepsilon \times 2k\pi/N} - e^{-i\varepsilon \times 2(k-1)\pi/N})$  avec  $\varepsilon = \frac{n}{\text{DEF}} |n|$ . Donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{|n|N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k) e^{-int} dt &= \frac{i}{n} \left( \sum_{k=1}^{|n|N} f(x_k) e^{-i\varepsilon \times 2k\pi/N} - \sum_{k=0}^{|n|N-1} f(x_{k+1}) e^{-i\varepsilon \times 2k\pi/N} \right) \\ &= \frac{i}{n} \left( f(2\pi) - f(x_1) + \sum_{k=1}^{|n|N-1} (f(x_k) - f(x_{k+1})) e^{-i\varepsilon \times 2k\pi/N} \right) \\ &= \frac{i}{n} \left( f(0) - f(x_1) + \sum_{k=1}^{|n|N-1} (f(x_k) - f(x_{k+1})) e^{-i\varepsilon \times 2k\pi/N} \right) \\ &= \frac{i}{n} \sum_{k=0}^{|n|N-1} (f(x_k) - f(x_{k+1})) e^{-i\varepsilon \times 2k\pi/N} \end{aligned}$$

Ainsi  $\underbrace{\left| \sum_{k=1}^{|n|N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k) e^{-int} dt \right|}_{\stackrel{\text{DEF}}{=} \beta_n} \leq \frac{1}{|n|} \sum_{k=0}^{|n|N-1} |f(x_k) - f(x_{k+1})| = \frac{1}{|n|} V(\sigma, f) \leq \frac{1}{|n|} V([0, 2\pi], f)$ .  $\square$

**13.c.** Par la relation de Chasles nous avons  $2\pi c_n(f) = \alpha_n + \beta_n$ .

Or  $|\beta_n| \leq \frac{1}{|n|} V([0, 2\pi], f)$  par la question 13.b. et  $|\alpha_n| \leq \frac{2\pi}{|n|N} V([0, 2\pi], f)$  d'après la remarque de la question 13.a.

Donc  $2\pi |c_n(f)| \leq \frac{1}{|n|} V([0, 2\pi], f) + \frac{2\pi}{|n|N} V([0, 2\pi], f)$  et cela pour tout entier relatif  $n$  non nul et tout entier  $N > 0$ .

En fixant  $n$  dans cette inégalité et en faisant tendre  $N$  vers  $+\infty$  il vient :

$|c_n(f)| \leq \frac{1}{2|n|\pi} V([0, 2\pi], f)$  pour tout entier relatif non nul.  $\square$

**14.a.** En utilisant la définition de  $\sigma_n$  il vient par un calcul immédiat que :

$$\begin{aligned} k(S_n - L) - (n+k)(\sigma_{n+k-1} - L) + n(\sigma_{n-1} - L) &= S_n + \dots + S_{n+k-1} - kS_n \\ &= u_{n+1} + (u_{n+1} + u_{n+2}) + \dots + (u_{n+1} + \dots + u_{n+k-1}). \end{aligned} \quad (1) \quad \square$$

**14.b.** Comme par hypothèse  $|u_{n+p}| \leq \frac{A}{n+p+1} \leq \frac{A}{n+2}$  pour tout entier  $p \geq 1$ , la valeur absolue du membre de droite de l'égalité (1) ci-dessus est majorée par  $\frac{k(k-1)}{2} \times \frac{A}{n+2}$ .

Par ailleurs  $|(n+k)(\sigma_{n+k-1} - L) + n(\sigma_{n-1} - L)| \leq (n+k)d_{n+k-1} + nd_{n-1} \leq (k+2n)d_{n-1}$  (car  $(d_n)$  décroît). L'égalité (1) prouve alors par inégalité triangulaire que :

$$|S_n - L| \leq \left(1 + \frac{2n}{k}\right) d_{n-1} + A \frac{k-1}{2(n+2)} \text{ pour tout entier } n \geq 1 \text{ et tout entier } k \geq 1. \quad (2) \quad \square$$

**14.c.** Fixons  $n$  dans l'inégalité ci-dessus et choisissons  $k = 1 + \text{Int}(2n\sqrt{d_{n-1}})$  i.e.  $(k-1)^2 \leq 4n^2 d_{n-1} < k^2$ .

Il vient alors  $\frac{2n}{k} < \frac{1}{\sqrt{d_{n-1}}}$  et  $\frac{k-1}{2(n+2)} < \frac{k-1}{2n} \leq \sqrt{d_{n-1}}$ .

Il découle alors de (2) que  $|S_n - L| \leq d_{n-1} + (1+A)\sqrt{d_{n-1}}$ .  $\square$

Ainsi la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  est-elle convergente de somme  $L$ .  $\square$

En d'autres termes si une série de nombres complexes  $\sum u_n$  converge au sens de Césàro et si  $u_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$  alors la série converge (évidemment vers la même somme par le théorème de Césàro).

**15.** Comme  $F$  est continue, d'après le théorème de Fejér sa série de Fourier converge uniformément au sens de Cesàro vers  $f$ . C'est à dire que la suite  $\left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |\sigma_n(f)(x) - f(x)|\right)$  tend vers 0. D'après la question 5, cette suite est majorée par une suite  $(d_n)$  décroissante de limite nulle. Ainsi  $|\sigma_n(f)(x) - f(x)| \leq d_n$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

• Notons  $u_n(x) \stackrel{\text{DEF}}{=} c_{-n}(f)e^{-inx} + c_n(f)(x)e^{inx}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $u_0(x) = c_0(f)$ .

D'après la question 13.c, on a  $|u_n(x)| \leq \frac{V([0, 2\pi], f)}{n\pi}$  pour  $n \geq 1$  et tout  $x \in \mathbb{R}$ . Or  $\frac{1}{n} \leq \frac{2}{n+1}$  pour  $n \geq 1$ .

Ainsi  $|u_n(x)| \leq \frac{2V([0, 2\pi], f)}{\pi} \times \frac{1}{n+1}$  pour  $n \geq 1$  et tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Donc  $|u_n(x)| \leq \frac{A}{n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in \mathbb{R}$  avec  $A = \max \left\{ |c_0(f)|, \frac{2V([0, 2\pi], f)}{\pi} \right\}$ .

• Nous sommes alors dans la situation de la question 14 pour la suite  $(u_n(x))$  avec la même constante  $A$  et la même suite  $(d_n)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Il en découle que  $|S_n(f)(x) - f(x)| \leq d_{n-1} + (1+A)\sqrt{d_{n-1}}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  ce qui prouve bien que la série de Fourier de  $f$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$  vers  $f$ .  $\square$

**16.** Il suffit de prouver que  $f$  est à variations bornées sur  $[-\pi, \pi]$  (ce qui entraîne par périodicité qu'elle l'est sur  $[0, 2\pi]$ ). Or pour  $x \in [-\pi, \pi]$  on a  $\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$  avec  $\varphi_1(x) = \sqrt{-x}$  si  $x \in [-\pi, 0]$  et 0 sinon et  $\varphi_2(x) = \sqrt{x}$  si  $x \in [0, \pi]$  et 0 sinon. La fonction  $\varphi_1$  est décroissante sur  $[-\pi, \pi]$  et  $\varphi_2$  croissante. Il en découle que  $f$  est à variations bornées sur  $[-\pi, \pi]$  par la question 11.b.  $\square$

**17.** En remarquant qu'une fonction lipschitzienne sur un intervalle y est à variations bornées (immédiat) et bien sûr continue, on a immédiatement la conclusion de cette question..  $\square$

————— FIN —————