

E 3 A, MP, 2001, Mathématiques II

(6 pages)

Exercice 1

- 1°. $\diamond \mathcal{L}(E)$ étant une algèbre, on a directement $u^+ \in \mathcal{L}(E)$.
 $\diamond$ Soit $h \in G$. L'application $\delta_h : g \longmapsto gh$ est une bijection de G dans G . On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} u^+ h &= \left(\frac{1}{m} \sum_{g \in G} g^{-1} u g \right) h = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} g^{-1} u g h = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} h h^{-1} g^{-1} u g h = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} h (\delta_h(g))^{-1} u (\delta_h(g)) \\ &= h \left(\frac{1}{m} \sum_{g \in G} (\delta_h(g))^{-1} u \delta_h(g) \right) = h \left(\frac{1}{m} \sum_{g' \in G} g'^{-1} u g' \right) = h u^+ \quad \text{en posant } g' = \delta_h(g) \end{aligned}$$

donc $\forall h \in G, \quad u^+ h = h u^+$.

- 2°. Ainsi, $(u^+)^+ = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} g^{-1} u^+ g = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} g^{-1} g u^+ = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} u^+ = \frac{1}{m} m u^+$ soit $\underline{(u^+)^+ = u^+}$.

- 3°. On a $\forall g \in G, \text{Tr}(g^{-1} u g) = \text{Tr}(u)$ donc, par linéarité de la trace $\underline{\text{Tr}(u^+) = \text{Tr}(u)}$.

- 4°. Soit $x \in F = \text{Im } p$, on a donc $p^+(x) = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} g^{-1} p g(x)$. Or, pour tout $g \in G$, F est stable par G donc $g(x) \in F = \text{Im } p$ et donc $p(g(x)) = g(x)$. Ainsi, $p^+(x) = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} g^{-1} g(x) = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} x = x$ donc $x \in \text{Im } p^+$.
Donc $\underline{F \subset \text{Im } p^+}$.

- 5°. D'après [4], $\forall y \in F, g^{-1} p g(y) = y$. Or $\forall x \in E, p h(x) \in \text{Im } p = F$ donc $h^{-1} p h(x) \in F$ car F est stable par $h^{-1} \in G$. On a, par conséquent, $\forall x \in E, g^{-1} p g(h^{-1} p h(x)) = h^{-1} p h(x)$ donc $\underline{g^{-1} p g h^{-1} p h = h^{-1} p h}$.

- 6°. On a $(p^+)^2 = \left(\frac{1}{m} \sum_{g \in G} g^{-1} p g \right) \left(\frac{1}{m} \sum_{h \in G} h^{-1} p h \right) = \frac{1}{m^2} \sum_{g \in G} \sum_{h \in G} g^{-1} p g h^{-1} p h$
 $= \frac{1}{m^2} \sum_{g \in G} \sum_{h \in G} h^{-1} p h$ d'après [5]
 $= \frac{1}{m^2} \sum_{g \in G} m p^+ = \frac{1}{m^2} m^2 p^+ = p^+$

donc $\underline{p^+}$ est un projecteur .

- 7°. On a vu en [5] que, pour tout $x \in E$ et tout $h \in G, h^{-1} p h(x) \in F$ donc $p^+(x) = \frac{1}{m} \sum_{h \in G} h^{-1} p h(x) \in F$
donc $\text{Im } p^+ \subset F$ et, avec le résultat de [4], $\underline{\text{Im } p^+ = F = \text{Im } p}$.

On peut aussi utiliser le fait que, puisque p^+ est un projecteur, on a $\text{rg } p^+ = \text{Tr}(p^+)$. Or, [3] donne $\text{Tr}(p^+) = \text{Tr}(p) = \text{rg } p$ donc $\text{rg } p^+ = \text{rg } p$ et l'inclusion de [4] donne l'égalité voulue.

- 8°. $\diamond$ Puisque p^+ est un projecteur, $\text{Ker } p^+$ est un supplémentaire de $F = \text{Im } p^+$.
 $\diamond$ Pour tout $g \in G$, g et p^+ commutent d'après [1], donc $\text{Ker } p^+$ est stable par g .
- 9°. Si F est stable par tout $g \in G$, il suffit de choisir un projecteur d'image F (qui existe car F admet des supplémentaires) et d'appliquer [8].
Tout sous-espace stable par tout $g \in G$ admet au moins un supplémentaire stable par tout $g \in G$.

Exercice 2

- 1°. Munissons $\mathbb{R}^2$ de son produit scalaire canonique et posons $\vec{V} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $\vec{E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{E}' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
 L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit $|\langle \vec{V} | \vec{E} \rangle| \leq \|\vec{V}\| \|\vec{E}\|$ et $|\langle \vec{V} | \vec{E}' \rangle| \leq \|\vec{V}\| \|\vec{E}'\|$ ce qui donne le résultat : $|u+v| \leq \rho\sqrt{2}$ et $|u-v| \leq \rho\sqrt{2}$.

2°. • **Méthode 1 :**

On a $D(u, v) = 2(u^2 + v^2 + 2u + 2v + 2) = 2\rho^2 + 4(u+v) + 4 \geq 2\rho^2 - 4\sqrt{2}\rho + 4 = \varphi(\rho)$ d'après [1] et $\varphi'(\rho) = 4(\rho - \sqrt{2}) < 0$ pour $\rho \in]0, 1]$ donc $\forall \rho \in]0, 1]$, $\varphi(\rho) \geq \varphi(1) = 6 - 4\sqrt{2}$. Or

$$6 - 4\sqrt{2} - \frac{1}{3} = \frac{17 - 12\sqrt{2}}{3} = \frac{(17)^2 - (12\sqrt{2})^2}{3(17 + 12\sqrt{2})} = \frac{289 - 288}{3(17 + 12\sqrt{2})} > 0$$

donc pour tout (u, v) tel que $0 < \sqrt{u^2 + v^2} \leq 1$, $3D(u, v) > 1$.

• **Méthode 2 :**

$\frac{\partial D}{\partial u}(u, v) = 4(u+1)$, $\frac{\partial D}{\partial v}(u, v) = 4(v+1)$ donc D n'a pas de point critique dans la boule ouverte $B_o(\vec{0}, 1)$ et donc les extremums de D sur le compact $B_f(\vec{0}, 1)$ sont atteints sur le cercle $\rho = 1$. Et on a $D(\cos t, \sin t) = 6 + 4(\cos t + \sin t) = 6 + 2\sqrt{2}\cos(t - \frac{\pi}{4})$ dont le minimum vaut $6 - 2\sqrt{2}$ et on conclut comme ci-dessus.

- 4°. $|N(u, v)| \leq |u^2 - v^2| (u^2 + v^2) + 4|uv||u - v| \leq (u^2 + v^2)^2 + 4|uv||u - v|$. Or, $2|uv| \leq u^2 + v^2$ et, d'après [1], $|u - v| \leq \rho\sqrt{2}$, donc $|N(u, v)| \leq \rho^4 + 2\sqrt{2}\rho^3$.

5°.
$$\begin{aligned} g(u, v) &= \frac{(1+u)^2 - (1+v)^2}{(1+u)^2 + (1+v)^2} - (u-v) - \frac{v^2 - u^2}{2} \\ &= \frac{2(1+u)^2 - 2(1+v)^2 - 2(u-v)[(1+u)^2 + (1+v)^2] + (u^2 - v^2)[(1+u)^2 + (1+v)^2]}{D(u, v)} \\ &= \frac{2(u-v)[(u+v+2) - (1+u)^2 - (1+v)^2] + (u^2 - v^2)[u^2 + v^2] + (u^2 - v^2)[2u + 2v + 2]}{D(u, v)} \\ &= \frac{2(u-v)[-u^2 - v^2 - u - v] + (u^2 - v^2)[u^2 + v^2] + 2(u-v)(u+v)[u+v+1]}{D(u, v)} \\ &= \frac{2(u-v)[-u^2 - v^2 - u - v + (u+v)^2 + (u+v)] + (u^2 - v^2)[u^2 + v^2]}{D(u, v)} \\ &= \frac{N(u, v)}{D(u, v)} \end{aligned}$$

donc $|g(u, v)| = \left| \frac{N(u, v)}{D(u, v)} \right| \leq 3[\rho^4 + 2\sqrt{2}\rho^3] \leq 3\rho^3[\rho + 2\sqrt{2}] \leq 3\rho^3[1 + 2\sqrt{2}]$ donc $\frac{|g(u, v)|}{\rho^3} \leq 12$.

5°. Un calcul simple conduit à $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4 \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -4 \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}.$

6°. De même, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 4 \frac{y^2(y^2 - 3x^2)}{(x^2 + y^2)^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 4 \frac{x^2(3y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 8 \frac{xy(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3}.$

7°. En particulier, $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = -1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) = -1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 1) = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1) = 0$ donc

$$g(u, v) = f(1 + u, 1 + v) - df(1, 1)[(u, v)] - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) u^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1) uv + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 1) v^2 \right]$$

est le reste de la formule de Taylor à l'ordre 2.

Le résultat de [4] peut s'écrire $g(u, v) = O(\rho^3)$ quand $(u, v) \rightarrow (0, 0)$, résultat meilleur que le résultat général où on a seulement $g(u, v) = o(\rho^2)$ quand $(u, v) \rightarrow (0, 0)$.

8°. Posons $h(x, y, z) = f(x, y) - z$, le plan tangent à la surface d'équation $h(x, y, z) = 0$ en (x, y, z) est normal au vecteur $\overrightarrow{\text{grad}} h(x, y, z)$ et, par définition, l'angle (non orienté) de deux plans de $\mathbb{R}^3$ est égal à l'angle entre deux vecteurs normaux à ces plans. En notant $\vec{k} = (0, 0, 1)$, on a donc $\cos \theta = \frac{|\vec{k} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} h(x, y, z)|}{\|\overrightarrow{\text{grad}} h(x, y, z)\|}.$

Comme $\overrightarrow{\text{grad}} h(x, y, z) = \left(4 \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, -4 \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}, -1 \right)$, on a

$$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \quad \text{et} \quad \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} - 1 = 16x^2 y^2 \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^4} + 1 - 1$$

$$\text{donc } \tan \theta = 4 \frac{|xy|}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

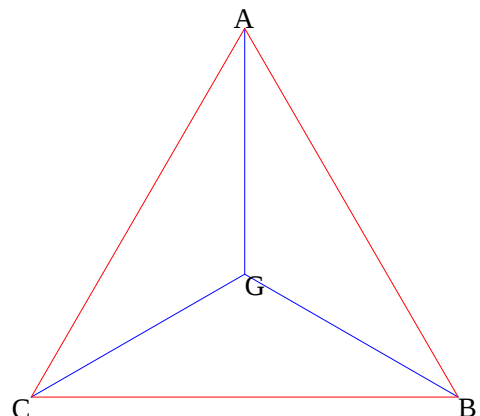
9°. Soit $\vec{u}(\alpha)$ un vecteur unitaire directeur de la demi-droite parcourue par le point mobile. On peut écrire ce point sous la forme $M(t) = 0 + t \vec{u}(\alpha)$ avec $t \in]0, +\infty[$, soit $M(t) = (t \cos \alpha, t \sin \alpha, 0)$ et le point correspondant sur la surface est $P(t) = (t \cos \alpha, t \sin \alpha, \cos(2\alpha))$ car $f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = \cos(2\alpha)$. Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, le plan Π_t tangent à la surface en $P(t)$ contient la droite Δ de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha)$ passant par $(0, 0, \cos(2\alpha))$.

Π_t est l'image du plan $z = \cos(2\alpha)$ par la rotation d'axe Δ et d'angle $\theta(t) = \text{Arctan} \left(2 \frac{|\sin(2\alpha)|}{t} \right).$

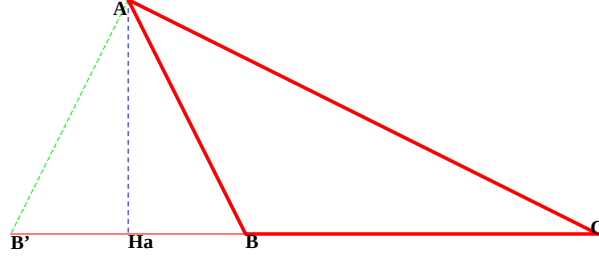
On remarque que $t \mapsto \theta(t)$ est décroissante sur $]0, +\infty[$ avec $\lim_{t \rightarrow 0+} \theta(t) = \frac{\pi}{2}$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = 0$.

Exercice 3

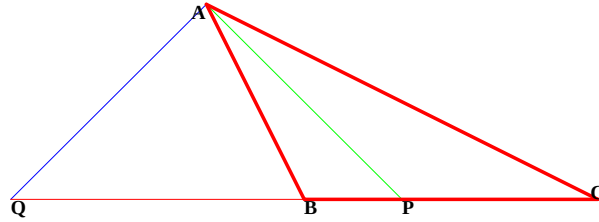
1°. Comme on le voit sur la figure ci-contre, si le triangle ABC est équilatéral, soit $G = \frac{A+B+C}{3}$, le centre de gravité du triangle, les trois triangles AGC , BGC , AGB sont isométriques (images l'un d'un autre par rotation de centre G et d'angle $\pm \frac{2\pi}{3}$) et ont pour angles $\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}$. Comme $\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, ces trois triangles répondent à la question.



- 2°. Dans le triangle $AB'C$, rectangle en A , l'angle en B' vaut $\frac{\pi}{2} - \widehat{C}$. Si on considère le triangle ABB' , l'angle en B' est donc $\frac{\pi}{2} - \widehat{C}$, celui en B est $\pi - \widehat{B} = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \widehat{C}\right)$ et les deux angles sont égaux donc ce triangle est isocèle. Ainsi $\frac{B+B'}{2}$ est la pied de la hauteur issue de A .



- 3°. Notons P (respectivement: Q) l'intersection de la bissectrice intérieure (respectivement: extérieure) avec (BC) et $\alpha = \frac{\widehat{A}}{2}$. Dans le triangle ABP , l'angle en P vaut $\omega = \pi - \widehat{B} - \alpha = \pi - \widehat{B} - \frac{\pi - \widehat{B} - \widehat{C}}{2} = \frac{\pi - \widehat{B} + \widehat{C}}{2} = \frac{\pi}{4}$. Et le triangle APQ est rectangle en A donc, dans le triangle ABQ , l'angle en Q vaut $\frac{\pi}{2} - \omega = \frac{\pi}{4}$. Donc les angles des bissectrices de l'angle en A avec (BC) ont pour mesure $\frac{\pi}{4} \bmod \pi$.



- 4°. $\diamond$ On a $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi$ et $\widehat{C} = \widehat{B} - \frac{\pi}{2}$ donc $\widehat{B} = \frac{3\pi}{4} - \frac{\widehat{A}}{2}$ et $\widehat{C} = \frac{\pi}{4} - \frac{\widehat{A}}{2}$.

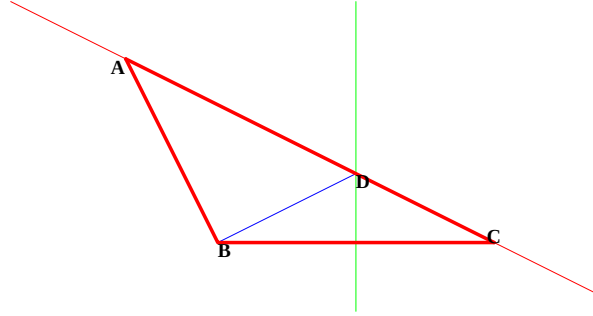
$\diamond$ Notons Ω le centre du cercle circonscrit. L'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ a pour mesure $\varepsilon \widehat{A}$ modulo 2π avec $\varepsilon = \pm 1$ et, alors, l'angle orienté $(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C})$ a pour mesure $2\varepsilon \widehat{A}$. Et on a

$$a^2 = \|\overrightarrow{\Omega C} - \overrightarrow{\Omega B}\|^2 = \|\overrightarrow{\Omega C}\|^2 + \|\overrightarrow{\Omega B}\|^2 - 2\|\overrightarrow{\Omega C}\|\|\overrightarrow{\Omega B}\|\cos(2\varepsilon \widehat{A}) = 2R^2 - 2R^2 \cos(2\widehat{A}) = 4R^2 \sin^2(\widehat{A})$$

donc $a = 2R \sin(\widehat{A})$ et, de même, $b = 2R \sin(\widehat{B})$ et $c = 2R \sin(\widehat{C})$.

$\diamond$ On a $S = \frac{1}{2} a (b \sin(\widehat{C}))$ donc $S = 2R^2 \sin(\widehat{A}) \sin(\widehat{B}) \sin(\widehat{C})$.

- 5°. $\diamond$ D'après [4], il est nécessaire que $\widehat{C} \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ pour que la construction soit possible ($\widehat{C} = \frac{\pi}{4} - \frac{\widehat{A}}{2}$). Puisqu'on connaît $\widehat{C}$ qu'on suppose donc dans $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$, on peut tracer la droite passant par C qui fait l'angle $\widehat{C}$, modulo π , avec (BC) . On peut aussi tracer la médiatrice du segment $[BC]$. Ces deux droites se coupent car $\widehat{C} \neq \frac{\pi}{2}$: notons D le point d'intersection. Le triangle CDB est isocèle car $DC = DB$ donc l'angle $\widehat{DBC} = \widehat{C}$ et il suffit de tracer la perpendiculaire (Δ) en B à (DB) pour obtenir le point A comme intersection de cette droite avec la droite (CD) sauf dans le cas où $\Delta \parallel (CD)$ c'est à dire sauf si $\widehat{DBC} + \frac{\pi}{2} = \pi - \widehat{C}$ soit $\widehat{C} = \frac{\pi}{4}$ ce qui est exclu.

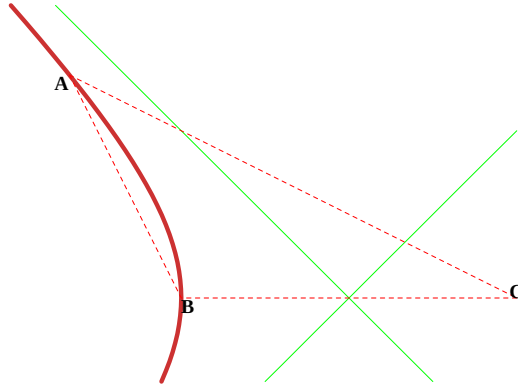


◊ Prenons un repère orthonormée avec comme origine le milieu de $[B, C]$ et comme axe des abscisses la droite (BC) . La droite (AC) a pour équation $y = \varepsilon \tan \widehat{C} \left(x - \frac{a}{2}\right)$ et la droite (AB) a pour équation $y = \varepsilon \frac{1}{\tan \widehat{C}} \left(x + \frac{a}{2}\right)$ avec $\varepsilon = \pm 1$ suivant l'orientation choisie. Ceci donne les coordonnées de A : $x_A = \frac{a}{2} \frac{1 + \tan^2 \widehat{C}}{1 - \tan^2 \widehat{C}}$ et $y_A = -\varepsilon a \frac{\tan \widehat{C}}{1 - \tan^2 \widehat{C}}$ soit $x_A = \frac{a}{2} \frac{1}{\cos(2\widehat{C})}$ et $y_A = -\varepsilon \frac{a}{2} \tan(2\widehat{C})$. $\widehat{C}$ variant dans $]0, \frac{\pi}{4}[$ et ε dans $\{-1, 1\}$, x_A décrit $]0, +\infty[$ et y_A décrit $\mathbb{R}^*$. De plus,

$$x_a^2 = \frac{a^2}{4} \frac{1}{\cos^2(2\widehat{C})} = \frac{a^2}{4} (1 + \tan^2(2\widehat{C})) = \frac{a^2}{4} + y_a^2$$

donc A appartient à la courbe $(\mathcal{H})$ d'équation $x^2 - y^2 = \frac{a^2}{4}$. Or, $(\mathcal{H})$ est une hyperbole équilatère d'axe focal (BC) qui contient B et C .

A décrit la branche d'hyperbole équilatère de sommets B, C qui contient B privée de B .



6°. Comme au [4], soit Ω le centre du cercle circonscrit et posons, ici, T_A la tangente en A à ce cercle et θ une mesure modulo π de l'angle orienté de droites $((AB), T_A)$. Cet angle intercepte le même arc de cercle que l'angle $((CB), (CA))$ donc $\theta \equiv ((CB), (CA)) \equiv \varepsilon \widehat{C}$ modulo π . Notons K le point d'intersection de T_A avec (BC) . On a donc $\widehat{BAK} = \widehat{C}$, $\widehat{ABK} = \pi - \widehat{B}$ donc $\widehat{AKB} = \pi - (\widehat{C} + (\pi - \widehat{B})) = \widehat{B} - \widehat{C} = \frac{\pi}{2}$.

Donc la tangente en A au cercle circonscrit est la hauteur issue de A . (voir figure à la question suivante)

7°. Notons H_A, H_B, H_C les pieds des hauteurs issues respectivement de A, B, C et H l'orthocentre. On a, avec la notation du [2], $(AB') \parallel (BH_B) = (BH)$ car ces deux droites sont orthogonales à (AC) . Les deux triangles $B'H_A A$ et $BH_A H$ sont donc semblables et, puisque, d'après [2], $B'H_A = H_A B$, le rapport de similitude vaut 1 et donc $AH_A = H_A H$.

Ainsi, l'orthocentre est l'image de A par la réflexion d'axe (BC) .

