

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE, DE TECHNIQUES AVANCÉES
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS, DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE,
DE LA MÉTALLURGIE ET DE L'INDUSTRIE DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (OPTION T.A.)



CONCOURS D'ADMISSION 1981

ÉPREUVE PRATIQUE DE MATHÉMATIQUES

OPTIONS M, P' ET T.A.

(Durée 2 heures)

PREAMBULE

N.B - Les différentes questions du problème sont, dans une large mesure, indépendantes les unes des autres

1°) Par convention, pour tout réel A , $\sqrt[3]{A}$ désigne l'unique réel B vérifiant $B^3 = A$; $\sqrt[3]{A}$ est donc défini même pour A négatif et dans ce dernier cas, $\sqrt[3]{A} = -\sqrt[3]{|A|}$. Il en résulte que $f_3(x) = \sqrt[3]{\sin^2 x \cdot \operatorname{tg} x}$ est défini pour tout x appartenant à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ et que $f_3(x)$ admet un développement limité à n'importe quel ordre au voisinage de 0.

2°) A titre d'information, l'origine du problème est résumé ci-dessous.

Au dix-septième siècle (et donc avant l'usage des séries), des mathématiciens (HUYGHENS, SNELLIUS, GRUNBERGER) entreprirent de calculer des valeurs décimales approchées de π par des méthodes trigonométriques élémentaires : il s'agissait d'améliorer la double inégalité classique $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ valable pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$ en introduisant des fonctions

a - qui s'expriment simplement à l'aide des fonctions trigonométriques usuelles.

b - peu différentes de x pour x voisin de zéro.

Les fonctions f_1 et f_4 du texte sont celles de Snellius, f_2 et f_3 sont celles de Huyghens.

°°

1°) Soient a et b deux réels positifs ou nuls. On pose :

$$m(a, b) = \frac{2a + b}{3}, \quad g(a, b) = \sqrt[3]{a^2 b}$$

En calculant $[m^3(a, b) - g^3(a, b)]$, trouver le signe de $[m(a, b) - g(a, b)]$ lorsque $a \neq b$. Donner une condition nécessaire et suffisante très simple pour que $m(a, b) = g(a, b)$.

.../...

2°) Dans cette question et dans toute la suite du problème, on désigne par x un réel appartenant à l'intervalle $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$; on pose :

$$f_1(x) = \frac{3 \sin x}{2 + \cos x} \quad ; \quad f_2(x) = \frac{1}{3} (8 \sin \frac{x}{2} - \sin x) ;$$

$$f_3(x) = \sqrt[3]{\sin^2 x \cdot \operatorname{tg} x} \quad ; \quad f_4(x) = \frac{1}{3} (2 \sin x + \operatorname{tg} x).$$

Calculer les développements limités, à l'ordre 5 inclus, de $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ au voisinage de 0.

En déduire l'existence d'un réel strictement positif η tel que l'on ait, pour tout x appartenant à $]0, \eta[$, l'inégalité :

$$f_1(x) < f_2(x) < x < f_3(x) < f_4(x).$$

3°) On suppose ici que $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Quel est le signe de $[f_4(x) - f_3(x)]$?

4°) On pose :

$$u(x) = 3(2 + \cos x) \cdot [f_2(x) - f_1(x)]$$

Montrer qu'il existe des réels finis $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, que l'on calculera, tels que :

$$u(x) = \alpha \sin 2x + \beta \sin \frac{3x}{2} + \gamma \sin x + \delta \sin \frac{x}{2}.$$

Calculer $u'(x)$ et vérifier que :

$$u'(x) = P \left(\cos \frac{x}{2} \right)$$

où P est un polynôme de degré 4 en $\cos \frac{x}{2} = y$.

Expliciter $P(y)$ et le décomposer en un produit de facteurs réels. En déduire le signe de $u'(x)$ et, pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$, celui de $f_2(x) - f_1(x)$.

5°) On pose :

$$v(x) = x - f_2(x),$$

calculer $v'(x)$ et montrer que :

$$v'(x) = Q \left(\cos \frac{x}{2} \right)$$

où Q est un polynôme. En déduire le signe de $v'(x)$ et, pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$, celui de $v(x)$.

... / ...

6°) On pose :

$$w(x) = f_3(x) - x$$

Calculer $w'(x)$; montrer que son signe est celui d'une expression trigonométrique simple ; en déduire, pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$, le signe de $w(x)$.

7°) Dans cette question, la valeur de π est supposée inconnue. Les valeurs des lignes trigonométriques en $\pi/4$ et $\pi/6$ sont seules connues.

Calculer des expressions simples par radicaux carrés de $\cos \frac{\pi}{12}$, $\sin \frac{\pi}{12}$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12}$ (on remarquera que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$ et on appliquera les formules de soustraction trigonométriques). On aura soin de rendre les dénominateurs rationnels.

Calculer ensuite une expression de $\sin \frac{\pi}{24}$ par radicaux carrés superposés.

En déduire une expression de :

$$X = 12 f_2 \left(\frac{\pi}{12} \right)$$

par radicaux carrés.

Calculer une valeur décimale approchée de X avec la précision permise par les instruments dont dispose le candidat. Celui-ci indiquera le matériel utilisé.

Calculer ensuite une expression par radicaux de :

$$Y = 12 f_3 \left(\frac{\pi}{12} \right)$$

Calculer une valeur décimale approchée de Y , avec la précision indiquée plus haut.

Déduire des résultats précédents un encadrement de π .

Quelles remarques vous suggère le résultat (étant rappelé que Huyghens ne disposait pas des méthodes de calcul de l'analyse moderne, fondées essentiellement sur l'emploi des séries) ?

8°) On pose :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_3(x) dx$$

Montrer que I a un sens. La calculer. Vérifier que :

$$I > \frac{\pi^2}{8}.$$

Pouvait-on prévoir aisément ce résultat ?