

CENTRALE-SUPÉLEC PSI 2004
MATHÉMATIQUES II

Partie I : Étude de trajectoires

I.A. Dans F , le problème de Cauchy $\mathcal{P}(f_F, x_0) : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_F(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ admet une solution unique

$x : \mathbb{R} \rightarrow F$ de classe $\mathcal{C}^1$. Cette solution vérifie aussi le problème de Cauchy $\mathcal{P}(f, x_0)$, c'est donc la f -trajectoire de x_0 , et elle est contenue dans F .

I.B. La droite vectorielle $F = \mathbb{R}x_0$ est stable par f ; la f -trajectoire de x_0 est donc contenue dans F , on peut écrire $x(t) = \alpha(t) x_0$, où $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Les conditions $\mathcal{P}(f, x_0)$ donnent alors $\alpha(0) = 1$ et, par linéarité de f ,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} x_0 = f(x) = f(\alpha(t) x_0) = \alpha(t) \lambda x_0 ,$$

d'où $\frac{d\alpha}{dt} = \lambda \alpha(t)$. La fonction scalaire α est la solution du problème de Cauchy $\begin{cases} \alpha' = \lambda \alpha \\ \alpha(0) = 1 \end{cases}$,

donc $x(t) = e^{\lambda t} x_0$.

I.C. Le plan $F = \text{Vect}(x_0, f(x_0))$ est stable par f , et la famille $(x_0, f(x_0))$ en est une base. D'après **I.A.**, on peut écrire $x(t) = \alpha(t) x_0 + \beta(t) f(x_0)$ avec $\alpha, \beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. La condition initiale $x(0) = x_0$ donne $\alpha(0) = 1$ et $\beta(0) = 0$, tandis que

$$x'(t) = \alpha'(t) x_0 + \beta'(t) f(x_0) = f(\alpha(t) x_0 + \beta(t) f(x_0)) = \alpha(t) f(x_0) ,$$

d'où $\alpha'(t) = 0$ et $\beta'(t) = \alpha(t)$.

On en tire $\alpha(t) = 1$, $\beta(t) = t$, donc $x(t) = x_0 + t f(x_0)$: la f -trajectoire de x_0 est la droite affine passant par x_0 et de vecteur directeur $f(x_0)$, soit $\mathcal{D} = x_0 + \mathbb{R} f(x_0)$.

I.D.1) Si la famille $(x_0, f(x_0))$ était liée, on aurait $f(x_0) = \lambda x_0$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, puis $f^2(x_0) = \lambda^2 x_0$ et enfin $(\lambda^2 - 2k\lambda \cos \varphi + k^2) x_0 = 0$, d'où $(\lambda - k \cos \varphi)^2 + k^2 \sin^2 \varphi = 0$, ce qui entraîne notamment $k \sin \varphi = 0$, absurde.

Par ailleurs, le plan $F = \text{Vect}(x_0, f(x_0))$ est stable par f , d'où $x(t) = u(t) x_0 + v(t) f(x_0)$ avec u et v de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (et non dans E) de classe $\mathcal{C}^1$ comme en **I.C.**

I.D.2) L'équation $x' = f(x)$ donne

$$x'(t) = u'(t) x_0 + v'(t) f(x_0) = u(t) f(x_0) + v(t) [(2k \cos \varphi) f(x_0) - k^2 x_0] ,$$

donc u et v sont solutions du système différentiel $\begin{cases} u' = -k^2 v \\ v' = u + (2k \cos \varphi) v \end{cases}$. Il en résulte que

u et v sont de classe $\mathcal{C}^2$ et que

$$u'' - (2k \cos \varphi) u' + k^2 u = 0 . \quad (*)$$

Comme en **I.C.**, on a les conditions initiales $\begin{cases} u(0) = 1 \\ v(0) = 0 \end{cases}$, soit encore $\begin{cases} u(0) = 1 \\ u'(0) = 0 \end{cases}$. L'équation

caractéristique de $(*)$ a deux racines distinctes, complexes conjuguées $ke^{i\varphi}$ et $ke^{-i\varphi}$, donc les solutions réelles de $(*)$ sont de la forme

$$u(t) = e^{kt \cos \varphi} (A \cos(kt \sin \varphi) + B \sin(kt \sin \varphi)) ,$$

avec A et B réels. Les conditions initiales imposent, après quelques calculs, $A = 1$ et $B = -\cotan \varphi$. On obtient finalement

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad u(t) = \frac{e^{kt \cos \varphi}}{\sin \varphi} \sin(\varphi - kt \sin \varphi) .$$

Ce n'est pas demandé, mais on a aussi $v(t) = \frac{e^{kt \cos \varphi}}{k \sin \varphi} \sin(kt \sin \varphi)$.

I.D.3) Les expressions obtenues ci-dessus montrent clairement que

- si $\cos \varphi > 0$, alors les fonctions u et v ne sont pas bornées au voisinage de $+\infty$;
- si $\cos \varphi < 0$, alors les fonctions u et v ne sont pas bornées au voisinage de $-\infty$;
- si $\cos \varphi = 0$, alors les fonctions u et v sont bornées sur $\mathbb{R}$.

Si cette dernière condition est réalisée, on a alors, en posant $\sin \varphi = \varepsilon = \pm 1$,

$$u(t) = \varepsilon \sin(\varphi - k\varepsilon t) = \cos kt \quad ; \quad v(t) = \frac{1}{k} \sin kt .$$

La f -trajectoire x est alors une ellipse de centre O . Notons que, le repère $(O ; x_0, f(x_0))$ n'étant pas a priori orthonormal, il n'est pas simple de préciser les axes.

Le centre de l'ellipse étant O , il s'agira d'un cercle si et seulement si $\|x(t)\|$ est constant. Or,

$$\begin{aligned} \|x(t)\|^2 &= \|u(t)x_0 + v(t)f(x_0)\|^2 \\ &= (\cos^2 kt) \|x_0\|^2 + \frac{1}{k^2} (\sin 2kt) (x_0 | f(x_0)) + \frac{1}{k^2} (\sin^2 kt) \|f(x_0)\|^2 , \end{aligned}$$

donc (encore un peu de calcul) :

$$\frac{d}{dt} (\|x(t)\|^2) = 2 \cos(2kt) (x_0 | f(x_0)) + \frac{1}{k} \sin(2kt) (\|f(x_0)\|^2 - k^2 \|x_0\|^2) .$$

On voit donc que la trajectoire est un cercle si et seulement si on a les deux conditions

$$\begin{cases} (x_0 | f(x_0)) = 0 \\ \|f(x_0)\| = k \|x_0\| . \end{cases}$$

I.E.1) $f(x_0) \in G \subset F = \text{Vect}(G)$; $f^2(x_0) = g(x_0) - k^2 x_0 \in F$; f et g commutent car g est un polynôme en f donc $fg(x_0) = gf(x_0) \in G \subset F$; enfin, $fgf(x_0) = gf^2(x_0) = g^2(x_0) - k^2 g(x_0) = -k^2 g(x_0) \in F$. Les quatre éléments de G ont une image par f appartenant à $\text{Vect}(G)$, donc $F = \text{Vect}(G)$ est stable par f .

I.E.2) Si $g(x_0) = 0$, la famille G est évidemment liée.

Si $g(x_0) \neq 0$, alors montrons d'abord que la sous-famille $G' = (g(x_0), gf(x_0))$ est libre : en effet, si elle était liée, on aurait $gf(x_0) = \lambda g(x_0)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, puis $fgf(x_0) = \lambda fg(x_0)$ soit (cf. question précédente) $-k^2 g(x_0) = \lambda fg(x_0) = \lambda gf(x_0) = \lambda^2 g(x_0)$ et enfin $\lambda^2 = -k^2 < 0$, absurde. Montrons alors que G est libre : supposons $a x_0 + b f(x_0) + c g(x_0) + d gf(x_0) = 0$ avec a, b, c, d réels ; en appliquant g , puisque $g^2 f(x_0) = f g^2(x_0) = 0$, on trouve $a g(x_0) + b gf(x_0) = 0$, donc a et b sont nuls puisque la famille G' est libre ; il reste $c g(x_0) + d gf(x_0) = 0$ donc c et d sont nuls.

I.E.3) F étant stable par f , la f -trajectoire de x_0 est contenue dans F , d'où l'existence de quatre fonctions u, v, w, h de classe $\mathcal{C}^1$ telles que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad x(t) = u(t)x_0 + v(t)f(x_0) + w(t)g(x_0) + h(t)gf(x_0) .$$

L'équation $x' = f(x)$ donne

$$\begin{aligned} x'(t) &= u'(t)x_0 + v'(t)f(x_0) + w'(t)g(x_0) + h'(t)gf(x_0) \\ &= u(t)f(x_0) + v(t)(g(x_0) - k^2 x_0) + w(t)gf(x_0) - k^2 h(t)g(x_0) . \end{aligned}$$

En identifiant les coordonnées dans la base G de F , on obtient le système différentiel **(S)** :

$$\begin{cases} u' = -k^2 v \\ v' = u \\ w' = v - k^2 h \\ h' = w \end{cases} . \text{ On a par ailleurs les conditions initiales}$$

$$\{u(0) = 1, v(0) = 0, w(0) = 0, h(0) = 0\} .$$

Les deux premières équations de **(S)** donnent immédiatement $u'' = -k^2 u$, puis avec les conditions initiales : $u(t) = \cos kt$; $v(t) = \frac{1}{k} \sin kt$.

Des deux dernières équations de **(S)**, on tire que w et h sont de classe $\mathcal{C}^2$ et que $w''(t) + k^2 w(t) = \cos kt$, ce qui se résout en $w(t) = C \cos kt + D \sin kt + \frac{t}{2k} \sin kt$.

De $w(0) = 0$, on tire $C = 0$. Ensuite $h = \frac{1}{k^2}(v - w')$ et $h(0) = 0$ entraîne $D = 0$ (*je laisse les détails de calcul à l'improbable lecteur... ou à MAPLE*), on obtient finalement

$$w(t) = \frac{t}{2k} \sin kt \quad ; \quad h(t) = \frac{1}{2k^3} \sin kt - \frac{t}{2k^2} \cos kt .$$

Effectivement, les fonctions w et h ne sont pas bornées sur $\mathbb{R}$.

Partie II : Étude des endomorphismes à trajectoires bornées

II.A. Cela résulte de la question **I.B.** Si x_0 est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ , la f -trajectoire de x_0 est définie par $x(t) = e^{\lambda t} x_0$, fonction bornée sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\lambda = 0$.

II.B. S'il existe un élément dans $\text{Ker } f^2 \setminus \text{Ker } f$, sa f -trajectoire x n'est pas bornée puisque son image $x(\mathbb{R})$ est une droite affine, cf. question **I.C.** Donc $\text{Ker } f^2 \subset \text{Ker } f$ et l'autre inclusion est immédiate.

Il suffit alors de montrer que $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0\}$ (considérer les dimensions) ; or, si $x \in \text{Im } f \cap \text{Ker } f$, on a $x = f(y)$ et $f(x) = f^2(y) = 0$ donc $y \in \text{Ker } f^2 = \text{Ker } f$, puis $x = f(y) = 0$. Donc $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$.

II.C. Le polynôme caractéristique χ_f de f annule f (théorème de Cayley-Hamilton). L'ensemble des polynômes annulateurs de f est un idéal non nul de $\mathbb{R}[X]$, donc de la forme $\mathbb{R}[X] \cdot P$ où $P \in \mathbb{R}[X]$ est unitaire, de degré minimal parmi les polynômes annulateurs non nuls de f , c'est du cours même si le terme de **polynôme minimal** n'est pas cité dans le programme de PSI.

II.C.1) On a $P = QR$, avec $\deg R < \deg P$, $R \neq 0$. Donc $0 = P(f) = Q(f) \circ R(f)$. L'endomorphisme $R(f)$ ne peut être nul (cela contredirait la minimalité du degré de P), donc $Q(f)$ n'est pas inversible (sinon, on déduirait $R(f) = (Q(f))^{-1} \circ 0 = 0$, absurde).

II.C.2) Si $P(\lambda) = 0$, alors le polynôme $Q = X - \lambda$ divise P , donc $Q(f) = f - \lambda \text{id}_E$ est non inversible, donc non injectif (dimension finie), ce qui entraîne que λ est valeur propre de f , donc $\lambda = 0$ d'après **II.A.**

Remarque. Ce raisonnement montre de façon plus générale que les valeurs propres d'un endomorphisme f sont exactement les racines de son polynôme minimal.

Soit maintenant r l'ordre de multiplicité de la racine 0 dans le polynôme P ; on a alors $P = X^r Q$ avec $Q(0) \neq 0$, donc les polynômes X^r et Q sont premiers entre eux. De $P(f) = 0$ et du théorème des noyaux (*désormais hors programme PSI*), on déduit que $E = \text{Ker } f^r \oplus \text{Ker } Q(f)$. Mais de la question **II.B.**, on déduit par une récurrence immédiate que $\text{Ker } f^r = \text{Ker } f$, donc $E = \text{Ker } f \oplus \text{Ker } Q(f)$: le polynôme XQ annule alors f , ce qui entraîne $r = 1$ (minimalité de P).

II.C.3) Si P est scindé sur $\mathbb{R}$, alors $P = X$ et ce polynôme annule f , autrement dit $f = 0$.

II.C.4) Les complexes λ et $\bar{\lambda}$ sont racines de P , donc P est divisible par le polynôme réel $Q = (X - \lambda)(X - \bar{\lambda}) = X^2 - (2k \cos \varphi)X + k^2$, l'endomorphisme $Q(f) = f^2 - (2k \cos \varphi)f + k^2 \text{id}_E$ est donc non injectif, d'où l'existence de x_0 . De la question **I.D.3.**, on déduit alors que $\cos \varphi = 0$. Les racines de P sont donc imaginaires pures.

II.C.5) Posons $g = f^2 + k^2 \text{id}_E$. De la question **I.E.**, on déduit que tout élément de $\text{Ker } g^2$ est nécessairement dans $\text{Ker } g$, d'où l'égalité de ces deux noyaux.

II.C.6) Le polynôme P admet au moins une racine non nulle dans $\mathbb{C}$, sinon $P = X$ et $f = 0$, exclu. Soit donc $\lambda = ik$ (avec $k \in \mathbb{R}_+^*$) une racine de P ; alors $\bar{\lambda} = -ik$ est aussi racine de P avec la même multiplicité r . On a alors $P = (X - \lambda)^r (X - \bar{\lambda})^r Q = (X^2 + k^2)^r Q$, le polynôme Q étant premier avec $(X^2 + k^2)^r$. Donc $E = \text{Ker } P(f) = \text{Ker}(f^2 + k^2 \text{id}_E)^r \oplus \text{Ker } Q(f)$. De la question précédente, on tire alors $E = \text{Ker}(f^2 + k^2 \text{id}_E) \oplus \text{Ker } Q(f)$, donc le polynôme $(X^2 + k^2)Q$ annule f , et $r = 1$ par minimalité de P . Suivant que 0 est ou non racine de P , on obtient l'une des deux factorisations proposées par l'énoncé.

II.D.i) • Si $P = \prod_{i=1}^s (X^2 + a_i^2)$, posons $S = \prod_{i=1}^s (X + a_i^2)$. Alors le polynôme S est scindé sur $\mathbb{R}$ à

racines simples et il annule l'endomorphisme f^2 , donc f^2 est diagonalisable et ses valeurs propres sont parmi les racines de S , à savoir les $-a_i^2$ qui sont des réels strictement négatifs.

• Si $P = X \prod_{i=1}^s (X^2 + a_i^2)$, alors le polynôme XP annule aussi f , mais $X P(X) = S(X^2)$

en posant $S = X \prod_{i=1}^s (X + a_i^2)$, donc S est un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples (négatives ou nulles) qui annule f , et de nouveau f est diagonalisable, ses valeurs propres étant maintenant des réels négatifs ou nuls.

ii) On a vu que $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$. Du théorème du rang, on déduit immédiatement que $\text{rg } f = \text{rg } f^2$.

Soit $-a^2$ une valeur propre strictement négative de f^2 (avec $a \in \mathbb{R}_+^*$). Notons K le polynôme caractéristique de f^2 , on a, pour tout $x \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} K(x^2) &= \det(f^2 - x^2 \text{id}_E) = \det((f - x \text{id}_E)(f + x \text{id}_E)) \\ &= (\det(f - x \text{id}_E)) (\det(f + x \text{id}_E)) = \chi_f(x) \chi_f(-x). \end{aligned}$$

En particulier, $0 = K(-a^2) = \chi_f(ia) \chi_f(-ia) = |\chi_f(ia)|^2$ puisque, le polynôme χ_f étant à coefficients réels, les nombres $\chi_f(ia)$ et $\chi_f(-ia)$ sont conjugués. Si r est la multiplicité commune des racines conjuguées ia et $-ia$ dans le polynôme réel χ_f (et donc aussi dans le polynôme $\chi_f(-X)$), on voit qu'il y aura $2r$ facteurs $X^2 + a^2$ dans la décomposition du

polynôme $K(X^2)$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, donc $2r$ facteurs $X + a^2$ dans celle du polynôme $K = \chi_{f^2}$. La multiplicité de la valeur propre $-a^2$ de f^2 (qui est aussi la dimension du sous-espace propre associé puisque f^2 est diagonalisable) est donc paire.

II.E. • Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, non nul, vérifiant **i)** et **ii)**. Comme f est diagonalisable et non nul, il a d'autres valeurs propres que 0. Notons $-a_i^2$ ($1 \leq i \leq s$) les valeurs propres strictement négatives distinctes de f^2 (avec $a_i \in \mathbb{R}_+^*$), et $E_i = \text{Ker}(f^2 + a_i^2 \text{id}_E)$ les sous-espaces propres associés. Comme f^2 est diagonalisable, E est la somme (directe) de ses sous-espaces propres :

$$E = \text{Ker } f^2 \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^s E_i \right) = \text{Ker } f \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^s E_i \right)$$

puisque l'égalité $\text{rg } f = \text{rg } f^2$ entraîne $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$. Les sous-espaces propres E_i sont non nuls et stables par f (car ce sont des noyaux de polynômes en f). On a vu en **II.D.** que la propriété **i)** entraîne que les sous-espaces propres $E_i = \text{Ker}(f^2 + a_i^2 \text{id}_E)$ sont de dimensions paires. Si $x \in E_i$, on a bien $f^2(x) = -a_i^2 x$. On a donc vérifié **(1)** et **(2)**.

• Si $x_0 \in \text{Ker } f$, alors sa f -trajectoire est $\{x_0\}$. Si $x_0 \in E_i \setminus \{0\}$, sa f -trajectoire est une ellipse (question **I.D.3.**), donc est bornée. Si on a $x_0 \in E$ quelconque, on décompose en $x_0 = x_{00} + \sum_{i=1}^s x_{0i}$ avec $x_{00} \in \text{Ker } f$ et $x_{0i} \in E_i$; la linéarité de l'équation différentielle $x' = f(x)$ fait que la solution x du problème de Cauchy $\mathcal{P}(f, x_0)$ dépend linéairement de la condition initiale x_0 , donc est combinaison linéaire de fonctions bornées, donc reste bornée. On a bien $f \in B(E)$.

Partie III : Étude des endomorphismes à trajectoires sphériques

III.A.1) • Si $f^* + f = 0$, alors $(f(x)|y) = -(x|f(y))$ pour tous vecteurs x et y de E ; en particulier, $(f(u)|u) = -(u|f(u))$, donc $(f(u)|u) = 0$ pour tout vecteur u de E .

• Si f vérifie la propriété **b)** alors, pour tous vecteurs x et y de E , on a

$$0 = (x + y|f(x + y)) = (x|f(y)) + (y|f(x))$$

puisque les termes $(x|f(x))$ et $(y|f(y))$ sont nuls. On a donc $(x|f(y)) = -(f(x)|y)$, d'où $f^* = -f$.

III.A.2) On a $\frac{d}{dt}(\|x(t)\|^2) = 2(x(t)|x'(t)) = 2(x(t)|f(x(t))) = 0$, donc $\|x(t)\|$ est constant et toute f -trajectoire x est sphérique. Ainsi, $A(E) \subset SP(E)$.

III.B. Soit $x_0 \in F$. Sa f_F -trajectoire x , qui coïncide avec sa f -trajectoire (puisque celle-ci est contenue dans F), est contenue dans une sphère de E :

$$\exists \gamma \in E \quad \exists r \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} \|x(t) - \gamma\| = r \\ x(t) \in F \end{cases}.$$

Mais l'intersection avec F d'une sphère de E est une sphère de F (si cette intersection est non vide). En effet, si δ est le projeté orthogonal de γ sur F , soit $d = d(\gamma, F) = \|\gamma - \delta\|$, alors pour $x \in F$ on a, par Pythagore,

$$\|x - \gamma\|^2 = \|x - \delta\|^2 + \|\delta - \gamma\|^2 = \|x - \delta\|^2 + d^2$$

donc $\|x - \gamma\| = r \iff \|x - \delta\| = \sqrt{r^2 - d^2}$. La f_F -trajectoire de x_0 est donc contenue dans une sphère de F . Donc $f_F \in SP(F)$.

III.C. Évident, toute sphère est bornée.

III.D.1) Comme $f \in B(E)$, de la question **II.D.**, on déduit que f^2 est diagonalisable avec $\text{Sp}(f^2) \subset \mathbb{R}_-$. Comme $f \neq 0$ et que les sous-espaces propres (autres que le noyau) sont de dimension paire, on déduit que $f^2 = -a^2 \text{id}_E$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$.

III.D.2) L'endomorphisme f et le vecteur non nul x_0 vérifient la condition $(f^2 + a^2 \text{id}_E)(x_0) = 0$ avec $a > 0$. Il résulte alors de la question **I.D.** que la famille $(x_0, f(x_0))$ est libre donc est une base de E (d'où l'existence de α et β)... mais il résulte surtout de **I.D.3.** que, la f -trajectoire de x_0 étant supposée être un cercle, ce cercle est de centre O (donc en fait $a = 0$) et que $(x_0 | f(x_0)) = 0$.

III.D.3) On sait que, de façon générale, $A(E) \subset SP(E)$ et on vient de prouver ici que $SP(E) \subset A(E)$.

III.E.1) Si $v = 0$, alors $\psi : u \mapsto \omega \wedge u$ est antisymétrique : en effet, $\omega \wedge u$ est orthogonal à u , donc $(\psi(u) | u) = 0$ pour tout u .

Réciproquement, si ψ est antisymétrique, alors $\forall u \in E \quad (\psi(u) | u) = 0$, c'est-à-dire $\forall u \in E \quad (u | \omega) (u | v) = 0$, donc $(\mathbb{R}\omega)^\perp \cup (\mathbb{R}v)^\perp = E$, ce qui entraîne que $v = 0$ (car E n'est pas la réunion de deux plans).

III.E.2) Soit x la ψ -trajectoire de x_0 . On a

$$\frac{d}{dt}(x(t) | \omega) = (x'(t) | \omega) = (\psi(x(t)) | \omega) = (\omega \wedge x(t) | \omega) + (x(t) | \omega) (v | \omega) = 0,$$

donc $t \mapsto (x(t) | \omega)$ est une fonction constante, notons C sa valeur.

On cherche maintenant un point de la forme $a = \alpha(\omega + \omega \wedge v)$ tel que $\|x(t) - a\|^2$ soit constant. Or,

$$\begin{aligned} \|x - a\|^2 &= \|x - \alpha(\omega + \omega \wedge v)\|^2 \\ &= \|x\|^2 - 2\alpha(x | \omega) - 2\alpha(x | \omega \wedge v) + \alpha^2 \|\omega + \omega \wedge v\|^2 \\ &= \|x\|^2 - 2\alpha(x | \omega \wedge v) + C' \end{aligned}$$

où C' est une constante. Donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\|x(t) - a\|^2) &= 2(x'(t) | x) - 2\alpha(x'(t) | \omega \wedge v) \\ &= 2(\psi(x) | x) - 2\alpha(\psi(x) | \omega \wedge v) \\ &= 2(\omega \wedge x + (x | \omega) v | x) - 2\alpha(\omega \wedge x + (x | \omega) v | \omega \wedge v) \\ &= 2(x | \omega) (x | v) - 2\alpha(\omega \wedge x | \omega \wedge v). \end{aligned}$$

Un petit calcul classique, en notant $[\cdot, \cdot, \cdot]$ le produit mixte de trois vecteurs et en utilisant la formule du double produit vectoriel, donne

$$(\omega \wedge x | \omega \wedge v) = [\omega, x, \omega \wedge v] = (\omega | x \wedge (\omega \wedge v)) = (\omega | (x | v) \omega - (x | \omega) v) = (x | v) \|\omega\|^2.$$

Finalement, $\frac{d}{dt}(\|x(t) - a\|^2) = 2(x | v) [(x | \omega) - \alpha \|\omega\|^2]$, donc $\|x(t) - a\|$ est constant si on choisit $\alpha = \frac{C}{\|\omega\|^2}$, où C est la valeur constante de $(x(t) | \omega)$ introduite plus haut.

En conclusion, pour tout $x_0 \in E$, la ψ -trajectoire de x_0 est incluse dans une sphère de centre $a = \frac{(x_0|\omega)}{\|\omega\|^2}(\omega + \omega \wedge v)$, et $\psi \in SP(E)$. Tout endomorphisme de la forme $u \mapsto \omega \wedge u + (u|\omega)v$ avec v orthogonal à ω (nul ou non) est à trajectoires sphériques.

III.E.3) Si $f \in SP(E)$, alors $f \in B(E)$ donc, de **II.D.**, on déduit que f^2 est diagonalisable avec $\text{Sp}(f^2) \subset \mathbb{R}_-$, les valeurs propres strictement négatives étant de multiplicité paire. Comme $\dim E = 3$, la seule possibilité est que f^2 admette 0 comme valeur propre simple ($\dim \text{Ker } f^2 = 1$), et une valeur propre double strictement négative $-\mu^2$. Dans une base adaptée $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E , la matrice de f^2 est $\text{diag}(-\mu^2, -\mu^2, 0)$; il apparaît alors que $\text{Im } f^2 = \text{Ker}(f^2 + \mu^2 \text{id}_E) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. D'autre part, on a aussi $\text{Im } f = \text{Im } f^2$ d'après **II.D.**, ce qui permet de conclure.

III.E.4) Posons $F = \text{Im } f = \text{Ker}(f^2 + \mu^2 \text{id}_E)$. On a $\dim F = 2$, soit e_3 un vecteur directeur unitaire de la droite $F^\perp$.

• Si $f(e_3) \neq 0$, posons $e_1 = \frac{f(e_3)}{\|f(e_3)\|} \in F$;

• Si $f(e_3) = 0$, soit e_1 un vecteur unitaire quelconque dans F .

On a alors $\|e_1\| = \|e_3\| = 1$ et $(e_1|e_3) = 0$. En posant $e_2 = e_3 \wedge e_1$, on obtient ainsi une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E , (e_1, e_2) étant une base orthonormale de F . Le plan $F = \text{Im } f$ est stable par f , donc $f_F \in SP(F) = A(F)$ d'après les questions **III.B.** et **III.D.3.** La matrice de f_F dans la base orthonormale (e_1, e_2) est donc antisymétrique et

a pour carré $-\mu^2 I_2$, c'est donc $\begin{pmatrix} 0 & -\mu \\ \mu & 0 \end{pmatrix}$, ou son opposé ce qui ne change rien... Enfin,

$f(e_3) \in \text{Vect}(e_1)$, donc la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -\mu & b \\ \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On reconnaît la matrice dans cette base $\mathcal{B}$ de l'endomorphisme $x \mapsto \mu e_3 \wedge x + b(x|e_3)e_1$, qui est bien de la même forme que ψ avec $\omega = \mu e_3$ (vecteur non nul) et $v = \frac{b}{\mu} e_1$ (orthogonal à ω). Les endomorphismes à trajectoires sphériques en dimension trois sont exactement ceux de la forme ψ .

III.F. Si $f^2 = -\mu^2 \text{id}_E$, alors pour tout vecteur x_0 non nul de E , la famille $(x_0, f(x_0))$ est libre, et le plan P qu'elle engendre est stable par f . On a donc $f_P \in SP(P)$ d'après **III.B.**, puis $(x_0|f(x_0)) = 0$ d'après **III.D.** Ceci étant vrai pour tout vecteur x_0 de E , cela signifie que f est antisymétrique.

III.G. • Si $f \in SP(E)$, alors $f \in B(E)$ donc $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$ d'après **II.B.** Par ailleurs, d'après

II.D., on a $\text{Im } f = \text{Im } f^2 = \bigoplus_{i=1}^s E_i$, avec $E_i = \text{Ker}(f^2 + a_i^2 \text{id}_E)$, les a_i étant des réels

strictement positifs deux à deux distincts. Chaque E_i est stable par f , donc $f_{E_i} \in SP(E_i)$ d'après **III.B.**, puis f_{E_i} est antisymétrique d'après **III.F.** Pour montrer que f_V (en notant $V = \text{Im } f$) est antisymétrique, il suffit de montrer que les sous-espaces E_i sont deux à deux orthogonaux. Or, si $x_i \in E_i$ et $x_j \in E_j$ avec $i \neq j$, on a $f^2(x_i) = -a_i^2 x_i$ et, $(f_{E_j})^2$ étant symétrique, $(f^2)^*(x_j) = ((f_{E_j})^2)^*(x_j) = (f_{E_j})^2(x_j) = -a_j^2 x_j$, donc

$$(x_i|x_j) = -\frac{1}{a_i^2} (f^2(x_i)|x_j) = -\frac{1}{a_i^2} (x_i|(f^2)^*(x_j)) = \frac{a_j^2}{a_i^2} (x_i|x_j)$$

puis $(x_i|x_j) = 0$ car $\frac{a_j^2}{a_i^2} \neq 1$.

• Réciproquement, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant **i)** et **ii)**, soit $x_0 \in E$, on le décompose en $x_0 = y_0 + z_0$ avec $y_0 \in \text{Ker } f$ et $z_0 \in \text{Im } f$. Posons $V = \text{Im } f$. La f -trajectoire x de x_0 est la somme de la f -trajectoire y de y_0 et de la f -trajectoire z de z_0 par linéarité de l'équation différentielle. Or, $y(t) = y_0$ pour tout t , et z est aussi la f_V -trajectoire de z_0 puisque V est stable par f . Comme $f_V \in A(V)$, alors $\|z(t)\|$ est constant d'après **III.A.2**. Mais $z(t) = x(t) - y_0$, ainsi $\|x(t) - y_0\|$ reste constant, et la f -trajectoire de x_0 est contenue dans une sphère de centre y_0 , où y_0 est le projeté de x_0 sur $\text{Ker } f$ parallèlement à $\text{Im } f$. On a donc $f \in SP(E)$.