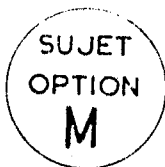


Concours d'Admission 1974

Quatre pages dactylographiées



MATHEMATIQUES I

La partie III peut être traitée indépendamment des parties I et II

1ère PARTIE

On considère la matrice à éléments dans le corps  $\mathbb{C}$  des nombres complexes

$$H = \begin{pmatrix} c & 0 & b & a \\ 0 & c & -a' & b' \\ b' & -a & -c & 0 \\ a' & b & 0 & -c \end{pmatrix}$$

où  $a, b, a', b'$  et  $c$  sont des nombres complexes donnés, tels que  $aa' + bb' \neq 0$

I.1. Calculer  $H^2$  et  $\det H$ . Etudier le rang de  $H$ .

I.2. Montrer que les valeurs propres de  $H$  sont les racines carrées du nombre complexe  $aa' + bb' + c^2$ .

Montrer qu'à chacune d'elles correspond un plan de vecteurs propres : si  $\lambda$  est une valeur propre et si  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  est un vecteur propre associé, on exprimera chacun des couples  $(x_1, x_2)$  et  $(x_3, x_4)$  en fonction de l'autre.

La matrice  $H$  est-elle diagonalisable ?

2ème PARTIE

Soit  $E$  l'espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  dont les éléments sont les applications indéfiniment dérivables d'un ouvert donné de  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{C}$ .

On convient qu'étant donnée la matrice carrée d'ordre 4

$$\mathcal{C} = (\tau_{h,k}) \quad 1 \leq h \leq 4, \quad 1 \leq k \leq 4$$

à éléments dans l'ensemble des endomorphismes de  $E$ , l'écriture matricielle

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \dots & \tau_{14} \\ \vdots & & \vdots \\ \tau_{41} & \dots & \tau_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix}$$

représente l'endomorphisme de  $E^4$  qui au quadruplet  $(f_k)_{1 \leq k \leq 4}$  associe le quadruplet  $(g_h)_{1 \leq h \leq 4}$  défini par

$$g_h = \tau_{h,1} (f_1) + \tau_{h,2} (f_2) + \tau_{h,3} (f_3) + \tau_{h,4} (f_4)$$

Le point générique de  $R^4$  étant noté  $(x, y, z, t)$ , on désigne par  $\partial_x, \partial_y, \partial_z$  et  $\partial_t$  les endomorphismes de  $E$  qui à l'application  $f \in E$  associent respectivement les applications  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$  et  $\frac{\partial f}{\partial t}$ , dérivées partielles de  $f$  par rapport aux variables  $x, y, z$  et  $t$ . On pose :

$$\partial_+ = \partial_x + i\partial_y \quad \text{et} \quad \partial_- = \partial_x - i\partial_y,$$

$i$  désignant le nombre complexe de module 1 et d'argument  $\frac{\pi}{2}$ .



II.1. Etant donné le réel  $m$ , on étudie l'équation :

$$(1) \quad \frac{1}{i} \begin{pmatrix} \partial_t & 0 & -\partial_z & -\partial_+ \\ 0 & \partial_t & -\partial_- & \partial_z \\ \partial_z & \partial_+ & -\partial_t & 0 \\ \partial_- & -\partial_z & 0 & -\partial_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix}$$

dans laquelle l'inconnue est l'élément  $(\phi_k)_{1 \leq k \leq 4}$  de  $E^4$ .

Plus précisément, on recherche les solutions de (1) de la forme :

$$(2) \quad \phi_k(x, y, z, t) = C_k \exp [i (Et - ux - vy - wz)]$$

où  $E, u, v, w$  sont des réels fixés, tels que  $u^2 + v^2 + w^2 \neq 0$ , et où  $(C_1, C_2, C_3, C_4)$  est un vecteur non nul de  $\mathbb{C}^4$  qu'il s'agit de trouver.

- a) Montrer que cette recherche se ramène à celle des vecteurs propres d'une matrice du type étudié dans la première partie.
- b) En déduire que (1) n'admet des solutions de la forme (2) que si  $E, m, u, v, w$  vérifient une relation que l'on écrira. Cette condition étant supposée remplie, exprimer  $C_3$  et  $C_4$  en fonction de  $C_1$  et  $C_2$ .
- c) Dire comment on obtiendrait, sans nouveau calcul, les solutions de (1) de la forme

$$(3) \quad \phi_k(x, y, z, t) = C'_k \exp [-i (Et - ux - vy - wz)],$$

et exprimer  $C'_3$  et  $C'_4$  en fonction de  $C'_1$  et  $C'_2$

II.2. Peut-on étendre aux matrices  $\mathcal{C}$  la règle de multiplication des matrices à éléments dans un corps commutatif ?

Calculer  $\mathcal{C}^2$  lorsque  $\mathcal{C}$  est la matrice qui intervient au premier membre de l'équation (1) du II.1.

3ème PARTIE

On se limite dorénavant à deux variables.  $E$  est ici l'espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  dont les éléments sont les applications indéfiniment dérivables d'un ouvert donné de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{C}$ ; on suppose que cet ouvert ne contient pas  $(0,0)$ ;  $\mathcal{C}$  est une matrice carrée d'ordre 2, à éléments dans l'ensemble des endomorphismes de  $E$ .

Le point générique de  $\mathbb{R}^2$ , considéré comme euclidien, est noté  $(x, y)$ . Au point  $(x, y)$  on associe le système de coordonnées polaires  $(r, \theta)$ , choisi de façon que  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

On définit  $\partial_x, \partial_y, \partial_+$  et  $\partial_-$  comme dans la partie II ; on définit en outre les dérivations  $\partial_r$  et  $\partial_\theta$ .

III.1. Montrer que  $\partial_+$  et  $\partial_-$  s'expriment au moyen de  $\partial_r$ , de  $\partial_\theta$  et des fonctions  $r$  et  $\exp(i\theta)$ .

III.2. Soient  $\alpha, m$  et  $E$  des réels strictement positifs donnés, tels que  $E < m$  ; on pose

$$A = \sqrt{m + E} \quad , \quad B = \sqrt{m - E}.$$

SUJET  
OPTION  
M

On considère l'équation

$$(4) \quad \begin{bmatrix} 0 & \partial_- \\ \partial_+ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m - E - \frac{\alpha}{r} & 0 \\ 0 & -m + E + \frac{\alpha}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$$

dans laquelle l'inconnue est  $(f, g) \in E^2$ , et on se propose d'en rechercher des solutions de la forme

$$(5) \quad \begin{cases} f = r^{\frac{1}{2}} F(r) \exp(-i(j+1)\theta) \\ g = r^{\frac{1}{2}} G(r) \exp(-i j \theta) \end{cases}$$

où  $j$  est un entier positif donné, et où  $F$  et  $G$  sont des fonctions réelles inconnues de la variable réelle  $r$ .

a) Montrer que l'on est ramené à résoudre le système différentiel

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{dG}{dr} - (j - \frac{1}{2}) \frac{G}{r} + (A^2 + \frac{\alpha}{r}) F = 0 \\ \frac{dF}{dr} + (j + \frac{3}{2}) \frac{F}{r} + (B^2 - \frac{\alpha}{r}) G = 0 \end{cases}$$

b) On cherche plus précisément des solutions de (4) de la forme (5), avec :

$$(7) \quad \begin{cases} F(r) = \exp(-ABr) (a_0 + a_1 r + \dots + a_q r^q + \dots + a_p r^p) r^\gamma \\ G(r) = \exp(-ABr) (b_0 + b_1 r + \dots + b_q r^q + \dots + b_p r^p) r^\gamma \end{cases}$$

relations dans lesquelles  $p$  désigne un entier naturel donné.

On impose en outre les conditions :

(i) L'élément  $(a_0, b_0)$  de  $\mathbb{R}^2$  est différent de  $(0, 0)$ ,

(ii) L'intégrale  $\int_0^{+\infty} r \{F^2(r) + G^2(r)\} dr$  est finie.

Montrer que, sous réserve que  $\alpha$  soit assez petit, il existe une et une seule valeur acceptable de  $\gamma$ , et exprimer cette valeur en fonction de  $\alpha$  et de  $j$ .

c) Ayant donné à  $\gamma$  la valeur obtenue en b), on substitue dans (6) à  $F$  et  $G$  leurs expressions (7). On obtient ainsi deux relations de récurrence faisant intervenir

$a_q, b_q, a_{q+1}, b_{q+1}$  ( $q \geq 0$ ). Les écrire.

En déduire qu'il existe deux fonctions affines,  $K$  et  $K'$ , telles que

$$a_q \cdot K'(q) = b_q \cdot K(q),$$

ce qui permet de poser

$$a_q = C_q \cdot K(q) \text{ et } b_q = C_q \cdot K'(q)$$

Montrer qu'il existe une fraction rationnelle  $R$ , n'admettant aucun pôle positif telle que

$$C_{q+1} = C_q \cdot R(q)$$

d) En utilisant la condition  $a_{p+1} = b_{p+1} = 0$ , conclure de cette étude que le problème a des solutions, dans la mesure où les données  $\alpha$ ,  $m$ ,  $E$ ,  $j$  et  $p$  vérifient la condition :

$$(8) \quad E = m \left[ 1 + \frac{\alpha^2}{\left( p + \sqrt{\left( j + \frac{1}{2} \right)^2 - \alpha^2} \right)^2} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

II.3. On considère ici que  $m$ ,  $j$  et  $p$  sont fixés et que (8) détermine une fonction  $E$  de la variable  $\alpha^2$  qui décrit un voisinage de 0. Ecrire un développement limité de  $E$  jusqu'au terme en  $\alpha^4$  inclus ; en posant,

$$n = p + j + \frac{1}{2},$$

on calculera  $S$  et  $T$  en fonction de  $m$ ,  $j$  et  $p$  de façon que

$$E = m + S \frac{\alpha^2}{n^2} + T \frac{\alpha^4}{n^4} + o(\alpha^4)$$

F I N

