ENONCÉ ET UN CORRIGÉ DE MINES PONTS 22 MATHS1

SADIK OMAR

FORMULE ASYMPTOTIQUE DE HARDY ET RAMANUJAN

L'objectif de ce problème est l'étude asymptotique du nombre de partitions d'un entier naturel n, c'est-à-dire du nombre de décompositions de n en somme d'entiers naturels non nuls (sans tenir compte de l'ordre des termes). Une définition rigoureuse de ce nombre, noté p_n, est donnée en début de partie **B**. Dans la partie **A**, on introduit une fonction P de variable complexe ; dans la fin de la partie **B** on démontre qu'il s'agit de la somme, sur le disque unité ouvert de C, de la série entière $\sum_{n\geq 0} p_n z^n$. L'étude de P au voisinage de 1 permet alors, dans les parties suivantes, de progresser vers l'obtention d'un équivalent simple de la suite $\left(p_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ (formule asymptotique de Hardy et Ramanujan). Tout au long du problème, le disque unité ouvert de C sera noté

$$D = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}.$$

Dans tout l'énoncé, on utilisera la dénomination «variable aléatoire réelle» pour signifier "variable aléatoire discrète réelle ". On admettra aussi les deux identités classiques suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ et } \int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{2\pi}.$$

A. Fonctions L et P

1) Soit $z \in D$. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$. Préciser la valeur de sa somme lorsque $z \in]-1,1[$. On notera

$$L(z) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}.$$

2) Soit $z \in D$. Montrer que la fonction $t \in [0,1] \mapsto L(tz)$ est dérivable et donner une expression simple de sa dérivée. En déduire que $t \mapsto (1-tz)e^{L(tz)}$ est constante sur $[0,1]$ et conclure que

$$\exp(L(z)) = \frac{1}{1-z}.$$

3) Montrer que $|L(z)| \leq -\ln(1-|z|)$ pour tout z dans D. En déduire la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} L\left(z^n\right)$ pour tout z dans D. Dans la suite, on notera, pour z dans D,

$$P(z) := \exp\left[\sum_{n=1}^{+\infty} L\left(z^n\right)\right].$$

On remarque, en vertu de la question précédente et des propriétés de l'exponentielle, que

$$\forall z \in D, P(z) \neq 0 \quad \text{et} \quad P(z) = \lim_{N\to+\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-z^n}$$

B. Développement de P en série entière

Pour $(n, N) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$, on note $P_{n,N}$ l'ensemble des listes $(a_1, \ldots, a_N) \in \mathbf{N}^N$ telles que $\sum_{k=1}^{N} k a_k = n$. Si cet ensemble est fini, on note $p_{n,N}$ son cardinal.

4) Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que $P_{n,N}$ est fini pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, que la suite $\left(p_{n,N}\right)_{N\geq 1}$ est croissante et qu'elle est constante à partir du rang $\max(n, 1)$. Dans toute la suite, on notera p_n la valeur finale de $\left(p_{n,N}\right)_{N\geq 1}$.

5) Montrer par récurrence que

$$\forall N \in \mathbf{N}^*, \forall z \in D, \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-z^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n.$$

6) Soit $z \in D$. On convient que $p_{n,0} = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. En examinant la sommabilité de la famille $\left(\left(p_{n,N+1} - p_{n,N}\right) z^n\right)_{(n,N)\in\mathbf{N}^2}$, démontrer que

$$P(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n.$$

En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum_n p_n x^n$.

7) Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que pour tout réel $t > 0$,

$$p_n = \frac{e^{nt}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} P\left(e^{-t+i\theta}\right) d\theta$$

si bien que

$$p_n = \frac{e^{nt} P\left(e^{-t}\right)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} \frac{P\left(e^{-t+i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)} d\theta \tag{1}$$

Dans le reste du problème, l'objectif est d'obtenir un équivalent du nombre p_n lorsque n tend vers $+\infty$. Cet équivalent sera obtenu via un choix approprié de t en fonction de n dans la formule (1).

C. Contrôle de P

8) Soit $x \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbf{R}$. En utilisant la fonction L, montrer que

$$\left|\frac{1-x}{1-xe^{i\theta}}\right| \leq \exp(-(1-\cos\theta)x)$$

En déduire que pour tout $x \in [0,1[$ et tout réel θ,

$$\left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right| \leq \exp\left(-\frac{1}{1-x} + \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right)\right)$$

9) Soit $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$ et $\theta \in \mathbf{R}$. Montrer que

$$\frac{1}{1-x} - \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right) \geq \frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)\left((1-x)^2 + 2x(1-\cos\theta)\right)}$$

En déduire que

$$\left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right| \leq \exp\left(-\frac{1-\cos\theta}{6(1-x)^3}\right) \quad \text{ou que} \quad \left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right| \leq \exp\left(-\frac{1}{3(1-x)}\right)$$

D. Intermède : quelques estimations de sommes

On fixe dans cette partie un réel $\alpha > 0$ et un entier $n \geq 1$. Sous réserve d'existence, on pose

$$S_{n,\alpha}(t) := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^n e^{-kt\alpha}}{\left(1-e^{-kt}\right)^n}$$

On introduit aussi la fonction

$$\varphi_{n,\alpha} : x \in \mathbf{R}_+^* \mapsto \frac{x^n e^{-\alpha x}}{(1-e^{-x})^n}$$

qui est évidemment de classe $\mathscr{C}^\infty$.

10) Montrer que $\varphi_{n,\alpha}$ et $\varphi'_{n,\alpha}$ sont intégrables sur $]0,+\infty[$.

11) Montrer, pour tout réel $t > 0$, l'existence de $S_{n,\alpha}(t)$, sa positivité stricte, et l'identité

$$\int_0^{+\infty} \varphi_{n,\alpha}(x)\mathrm{d}x = t^{n+1} S_{n,\alpha}(t) - \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{kt}^{(k+1)t} (x-kt)\varphi'_{n,\alpha}(x)\mathrm{d}x$$

En déduire que

$$S_{n,\alpha}(t) = \frac{1}{t^{n+1}} \int_0^{+\infty} \frac{x^n e^{-\alpha x}}{(1-e^{-x})^n}\,\mathrm{d}x + O\left(\frac{1}{t^n}\right) \quad \text{quand } t \to 0^+$$

12) Démontrer, sans utiliser ce qui précède, que

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}\,dx = \frac{\pi^2}{6}.$$

Dans le reste du problème, nous admettrons le résultat suivant (il peut être démontré par une méthode similaire) :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}\,dx = \frac{\pi^2}{3}$$

E. Contrôle des fonctions caractéristiques

Étant donné une variable aléatoire réelle X sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$, ainsi qu'un réel θ, les variables aléatoires réelles $\cos(\theta X)$ et $\sin(\theta X)$ sont d'espérance finie puisque bornées : on introduit alors le nombre complexe

$$\Phi_X(\theta) := \mathbf{E}(\cos(\theta X)) + i\mathbf{E}(\sin(\theta X))$$

13) Soit X une variable aléatoire réelle. Montrer que $|\Phi_X(\theta)| \leq 1$ pour tout réel θ.

Dans les questions 14⊳ à 18⊳, on se donne une variable aléatoire réelle X suivant une loi géométrique, de paramètre $p \in]0,1[$ arbitraire. On pose $q = 1-p$.

14) Montrer que pour tout $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ et tout réel θ,

$$\Phi_{aX+b}(\theta) = \frac{pe^{i(a+b)\theta}}{1-qe^{ia\theta}}$$

15) Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, la variable aléatoire X^k est d'espérance finie. Montrer que Φ_X est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ et que $\Phi_X^{(k)}(0) = i^k\mathbf{E}\left(X^k\right)$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

16) Montrer qu'il existe une suite $(P_k)_{k\in N}$ de polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$, indépendante de p, telle que

$$\forall \theta \in \mathbf{R}, \forall k \in \mathbf{N}, \Phi_X^{(k)}(\theta) = pi^k e^{i\theta}\frac{P_k\left(qe^{i\theta}\right)}{\left(1-qe^{i\theta}\right)^{k+1}} \quad \text{et} \quad P_k(0) = 1$$

17) En déduire qu'il existe une suite $(C_k)_{k\in N}$ de réels strictement positifs, indépendante de p, telle que

$$\forall k \in \mathbf{N}, \left|\mathbf{E}\left(X^k\right) - \frac{1}{p^k}\right| \leq \frac{C_k q}{p^k}$$

18) En déduire qu'il existe un réel $K > 0$ indépendant de p tel que

$$\mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}(X))^4\right) \leq \frac{Kq}{p^4}$$

Dans les questions 19⊳ à 21⊳, on se donne une variable aléatoire réelle centrée Y telle que Y^4 soit d'espérance finie.

19) Montrer successivement que Y^2 et $|Y|^3$ sont d'espérance finie, et que

20) Montrer, pour tout réel u, l'inégalité

$$\left| e^{iu} - 1 - iu + \frac{u^2}{2} \right| \leq \frac{|u|^3}{6}$$

En déduire que pour tout réel θ,

$$\left| \Phi_Y(\theta) - 1 + \frac{\mathrm{E}\left(Y^2\right)\theta^2}{2} \right| \leq \frac{|\theta|^3}{3} \left(\mathrm{E}\left(Y^4\right)\right)^{3/4}$$

21) Conclure que pour tout réel θ,

$$\left| \Phi_Y(\theta) - \exp\left(-\frac{\mathrm{E}\left(Y^2\right)\theta^2}{2}\right) \right| \leq \frac{|\theta|^3}{3} \left(\mathrm{E}\left(Y^4\right)\right)^{3/4} + \frac{\theta^4}{8}\mathrm{E}\left(Y^4\right)$$

1 F. Convergence vers une gaussienne

Étant donné un réel $t > 0$, on pose, suivant les notations de la partie C,

$$m_t := S_{1,1}(t) \text{ et } \sigma_t := \sqrt{S_{2,1}(t)}$$

Étant donné des réels $t > 0$ et θ, on pose

$$h(t, \theta) = e^{-im_t\theta} \frac{P\left(e^{-t}e^{i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)}$$

Étant donné des réels $t > 0$ et u, on pose

$$\zeta(t, u) = \exp\left(i\frac{u}{\sigma_t}\left(m_t - \frac{\pi^2}{6t^2}\right)\right) \quad \text{et} \quad j(t, u) = \zeta(t, u)h\left(t, \frac{u}{\sigma_t}\right).$$

22) Soit $n \in \mathbf{N}^*$ ainsi que des complexes $z_1, \ldots, z_n, u_1, \ldots, u_n$ tous de module inférieur ou égal à 1. Montrer que

$$\left| \prod_{k=1}^{n} z_k - \prod_{k=1}^{n} u_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k - u_k|$$

23) Soit $\theta \in \mathbf{R}$ et $t \in \mathbf{R}_+^*$. On considère, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, une variable aléatoire Z_k suivant la loi $\mathscr{G}\left(1-e^{-kt}\right)$, et on pose $Y_k = k(Z_k - \mathbf{E}(Z_k))$. Démontrer que

$$h(t,\theta) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \Phi_{Y_k}(\theta).$$

En déduire, à l'aide en particulier de la question 21▷, l'inégalité

$$\left| h(t,\theta) - e^{-\frac{\sigma_t^2\theta^2}{2}} \right| \leq K^{3/4}|\theta|^3 S_{3,3/4}(t) + K\theta^4 S_{4,1}(t).$$

On rappelle que la constante K a été introduite à la question 18▷, les quantités $S_{n,\alpha}(t)$ dans la partie D.

24) Montrer que $\sigma_t \sim \dfrac{\pi}{\sqrt{3}t^{3/2}}$ quand t tend vers 0^+. En déduire, pour tout réel u, que

$$j(t,u) \underset{t\to0^+}{\longrightarrow} e^{-u^2/2}.$$

25) Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall\theta \in [-\pi,\pi], 1-\cos\theta \geq \alpha\theta^2.$$

À l'aide de la question 9▷, en déduire qu'il existe trois réels $t_0 > 0, \beta > 0$ et $\gamma > 0$ tels que, pour tout $t \in]0, t_0]$ et tout $\theta \in [-\pi,\pi]$,

$$|h(t,\theta)| \leq e^{-\beta(\sigma_t\theta)^2} \quad \text{ou } |h(t,\theta)| \leq e^{-\gamma(\sigma_t|\theta|)^{2/3}}$$

26) Conclure que

$$\int_{-\pi\sigma_t}^{\pi\sigma_t} j(t,u)\mathrm{d}u \underset{t\to0^+}{\longrightarrow} \sqrt{2\pi}.$$

G. La conclusion

Dans cette dernière partie, on admet que $P\left(e^{-t}\right) \sim \sqrt{\dfrac{t}{2\pi}}\exp\left(\dfrac{\pi^2}{6t}\right)$ quand t tend vers 0^+.

27) En appliquant la formule (1) à $t = \dfrac{\pi}{\sqrt{6n}}$, démontrer que

$$p_n \sim \frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)}{4\sqrt{3}n} \text{ quand } n \to +\infty$$

formule découverte par Hardy et Ramanujan en 1918.

FIN DU PROBLEME

A. Fonction L et P

1) Soit $z \in D$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{|z^n|}{n} \leqslant |z|^n$, or $\sum_{n\geqslant 1} |z|^n$ est cv, par conséquent $\sum_{n\geq 1} \dfrac{z^n}{n}$ cv.

$\forall z \in]-1,1[$: $\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n} = -\ln(1-z)$; $\quad$ càd $\quad L(z) = -\ln(1-z)$.

2) $z \in D$. $L(tz) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n} t^n$. Posons $u_n(t) = \dfrac{z^n}{n} t^n$:

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, u_n est dérivable sur $[0,1]$.

- Pour $t \in [0,1]$ fixé, $\sum u_n(t)$ cv car $|zt| \leqslant |z| < 1$ et Q_1

-$\forall t \in [0,1] \quad u_n'(t) = z^n t^{n-1}$; on a $\forall t \in [0,1], |u_n(t)| \leqslant |z|^n$ et $\sum |z|^n$ cv. Donc $\sum u_n'$ cv normalement donc uniformément sur $[0,1]$.

Donc $t \longmapsto L(tz)$ est dérivable sur $[0,1]$ et

$$\forall t \in [0,1] : \quad (L(tz))' = \sum_{n=1}^{\infty} z^n t^{n-1} = \frac{z}{1-zt}$$

Posons $g(t) = (1-tz)e^{\langle(tz)}$, g est dérivable $[0,1]$ et pour $t \in [0,1]$.

$$g'(t) = -ze^{l(tz)} + (1-tz)(L(tz))'e^{L(tz)} = 0$$

Donc $\forall t \in [0,1] : \quad g(t) = g(0) = 1 = g(1) = (1-z)e^{L(z)}$

ALors $\quad \exp(L(z)) = \dfrac{1}{1-z}$.

`Remarque`: Le rayon de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{z^n}{n} t^n$ de la variable t est strictement > 1, donc de classe C^∞sur $[-1,1]$, donc on peut éviter le raisonnement précédent.

3) Soit $z \in D \sum \dfrac{|z|^n}{n}$ cv et que $|L(z)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{|z|^n}{n} = -\ln(1-|z|)$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $z \in D$, alors $|L(z^n)| \leqslant -\ln(1-|z|^n|$, or $-\ln(1-|z|^n) \underset{n\to\infty}{\sim} |z|^n \geqslant 0$ or $\Sigma |z|^n$ c v, par comparaison $\sum -\ln(1-|z|^n)$ cv , alors $\sum_{n\geqslant 1} L\left(z^n\right)$ cv.

B. Développement de P en série entière

4) $n \in \mathbb{N}, N \in \mathbb{N}^*$. $\quad P_{n,N} = \left\{ (a_k, \dots, a_N) \in \mathbb{N}^N / \sum_{k=1}^{N} k a_k = n \right\}$

Soit $(a_1,\dots,a_N)\in P_{h,N}$, alors $\forall j\in\{1,\dots,n\}, 0\le a_j\leqslant ja_j\leqslant\sum_{l=1}^{N} ka_k\le n$.
donc $P_{n,N}\subset [\![0,n]\!]^N$ qui est fini et $p_{n,N}\leqslant (n+1)^N$.
Soit $N\geqslant 1$. Montrons $P_{n,N}\le P_{n,N+1}$:
Si $\left(a_1,\dots,a_N\right)\in P_{n,N}$, alors $(a_1,\dots,a_N,0)\in P_{n,N+1}$ alors $p_{n,N}\leqslant p_{n,N+1}$.
Tout d' abord si $(a_1\dots,a_N)\in P_{n,N}$ et $a_N\neq 0$, alors $N\leqslant Na_N\leqslant\sum_{l=1}^{N} ka_k\leqslant$ n. et si $N\geqslant n$, et $(a_1\dots,a_N)\in P_{n,N}$ alors $\sum_{k=1}^{N} ka_k=n$
Donc $\forall j\ge n+1, ja_j\le n$, donc nécesairement $a_{n+1}=...=a_N=0$ alors $(a_1,\dots,a_n)\in P_{n,n}$, alors Card $P_{n,N}\leqslant$ Card $P_{n,n}$
et Card $P_{n,n}\leqslant$ Card $P_{n,N}$ car la suite $(p_{n,N})_N$ est croissante.
Donc $p_{n,n}=p_{n,N}$ pourt tout $n\geqslant N$.
On note $p_n=\lim\limits_{N\to+\infty} p_{n,N}$.

5) Pour $N=1$, la relation est évidement vraie.
Soit on suppose que la relation donnée est valable l'ordre N. Alors $\prod_{k=1}^{N+1}\frac{1}{1-z^k}=\left(\prod_{k=1}^{N}\frac{1}{1-z^k}\right)\frac{1}{1-z^{N+1}}=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}p_{n,N}z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}q_{n,N+1}z^n\right)$ où $q_{n,N+1}=$ 0 si n n'est pas un multiple de $N+1$ et 1 sinon.
Par produit de Cauchy, $\prod_{k=1}^{N+1}\frac{1}{1-z^k}=\sum_{n=0}^{+\infty}c_nz^n$ où

$$c_n=\sum_{i+j=n}p_{i,N}q_{j,N}=\sum_{\substack{(a_1,\dots,a_N)\in P_{i,N}\\ i+j=n, j\text{multiple de } N+1}}1=\sum_{(a_1,\dots,a_{N+1})\in P_{n,N+1}}1=p_{n,N+1}$$

La récurrence s'applique et le résultat est vrai pour tout $N\in\mathbb{N}^*$.

6) Soit $N\in\mathbb{N}$ et $z\in D$, $\sum_{n=0}^{\infty}\left(p_{n,N+1}-p_{n,N}\right)|z|^n=\sum_{n=0}^{\infty}p_{n,N+1}|z|^n-\sum_{n=0}^{\infty}p_{n,N}|z|^n$

On pose $\begin{cases} b_N=\prod_{j=1}^{N}\frac{1}{1-|z|^j} & \text{si } N\geqslant 1\\ b_N=0 & \text{si } N=0\end{cases}$

Donc

$$\sum_{N=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(p_{n,N+1}-p_{n,N}\right)|z|^n=\sum_{N=0}^{\infty}b_{N+1}-b_N=\lim_{N\to+\infty}\prod_{j=1}^{N}\frac{1}{1-|z|^j}=P(|z|)$$

donc la famille est sommable, alors.

$$\sum_{N=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(p_{n,N+1}-p_{n,N}\right)z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{N=0}^{\infty}\left(p_{n,N+1}-p_{n,N}\right)z^n$$

Donc par télescopage

$$P(z) = \sum_{n=\infty}^{\infty} \left(\lim_{N\to\infty} P_{n,N+1} - P_{n,0} \right) z^n$$

Donc

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$$

déjà p_n est un entier naturel, donc le rayon est plus petit que 1.
Si $\sum p_n$ converge, alors à partir d'un certain rang $p_n = 0$, ce qui est faux, donc le rayon cherché est 1.

7) Posons $C_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} P\left(e^{-t+i\theta}\right) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-in\theta} p_j e^{-tj} e^{ij\theta} d\theta$

Posons $v_j(\theta) = e^{-in\theta} e^{-jt} e^{ij\theta} p_j$.
-$\forall j \in \mathbb{N} \quad v_j$ est $\mathscr{C}^0$ sur $[-\pi, \pi]$.
-$\forall j \in \mathbb{N}. \forall \theta \in [-\pi, \pi]; \quad \left|v_j(\theta)\right| = e^{-jt} p_j$ or $\sum p_j (e^{-t})^j$ est cv car $e^{-t} \in]0,1[$
$\sum v_j$ cv normalement donc uniformément sur $[-\pi, \pi]$, alors :
$c_n = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-jt} p_j \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-n)\theta} d\theta = 2\pi p_n e^{-nt}$ alors $p_n = \dfrac{e^{nt}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} P\left(e^{-t+i\theta}\right) d\theta$.

C. Contrôle de P

8) Soit $x \in [0,1[$ er $\theta \in \mathbb{R}$, On a $\left|xe^{i\theta}\right| = |x| < 1$ Donc $\dfrac{1}{1-xe^{i\theta}} = \exp L\left(xe^{i\theta}\right)$ et $\dfrac{1}{1-x} = \exp L(x)$ donc

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1-x}{1-xe^{i\theta}}\right| &= \left|\exp\left(L\left(xe^{i\theta}\right) - L(x)\right)\right| \\
&= \left|\exp\left(x\left(e^{i\theta}-1\right)\right)\right| \left|\exp \sum_{n=2}^{\infty} x^n \left(e^{i\theta n} - 1\right)\right|. \\
&= \exp\left[\mathrm{Re}\left(x\left(e^{i\theta}-1\right)\right)\right] \exp \mathrm{Re}\left[\sum_{n=2}^{\infty} x^n \left(e^{in\theta}-1\right)\right] \quad \text{or Re est continue, donc} \\
&= \exp(x(\cos\theta - 1)) \exp\left(\sum_{n=2}^{\infty} x^n (\cos(n\theta) - 1)\right),
\end{aligned}$$

or $\forall n \geqslant 2: \quad x^n(\cos(n\theta) - 1) \leqslant 0$, donc $\left|\dfrac{1-x}{1-xe^{i\theta}}\right| \leqslant \exp(-(1-\cos\theta)x)$

D'autre part

D'après la question 3, $\dfrac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)} = \lim\limits_{N\to+\infty} \prod\limits_{n=1}^{N} \left(\dfrac{1-x^n}{1-x^n e^{in\theta}}\right)$.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right| &= \left|\lim_{N\longrightarrow+\infty} \prod_{n=1}^{N}\left(\frac{1-x^n}{1-x^n e^{in\theta}}\right)\right| \\
&= \lim_{N\longrightarrow+\infty} \prod_{n=1}^{N}\left|\frac{1-x^n}{1-x^n e^{in\theta}}\right| \\
&\leq \lim_{N\longrightarrow+\infty} \prod_{n=1}^{N} \left(\exp\left(-\left(1-\cos(n\theta)x^n\right)\right.\right. \\
&= \lim_{N\longrightarrow+\infty} \left(\exp\left(-\sum_{n=1}^{N}\left(1-\cos(n\theta)x^n\right)\right)\right) \\
&= \exp\left(-\lim_{N\longrightarrow+\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(1-\cos(n\theta)x^n\right)\right) \\
&= \exp\left(-\sum_{n=1}^{+\infty} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty}\cos(n\theta)x^n\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{1-x} + \operatorname{Re}\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right)
\end{aligned}$$

9) Un calcul facile donne

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} - \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right) &= \frac{1}{1-x} - \frac{1-x\cos(\theta)}{1-2x\cos(\theta)+x^2} \\
&= \frac{x(1+x)(1-\cos(\theta))}{(1-x)\left((1-x)^2+2x(1-\cos(\theta))\right.} \\
&\geq \frac{x(1-\cos(\theta))}{(1-x)\left((1-x)^2+2x(1-\cos(\theta))\right.}
\end{aligned}$$

Car $1+x \geq 1$, $1-\cos(\theta) \geq 0$ et $(1-x)\left((1-x)^2+2x(1-\cos(\theta))\right. > 0$
Si $x(1-\cos(\theta)) \leq (1-x)^2$, alors :

$$\frac{x(1-\cos(\theta))}{(1-x)\left((1-x)^2+2x(1-\cos(\theta))\right.} \geq \frac{x(1-\cos(\theta))}{3(1-x)^3} \geq \frac{(1-\cos(\theta))}{6(1-x)^3} \quad \text{car } x \geq \frac{1}{2}$$

Par conséquent la première inégalité
Et si $x(1-\cos(\theta)) \geq (1-x)^2$, alors :

$$\frac{x(1-\cos(\theta))}{(1-x)\left((1-x)^2+2x(1-\cos(\theta))\right.} \geq \frac{x(1-\cos(\theta))}{(1-x)(3x(1-\cos(\theta))} = \frac{1}{3(1-x)}$$

On conclut comme dans le cas précédent.

D. Intermède : quelques stimations de sommes

10) $\varphi_{n,\alpha}$ et $\varphi'_{n,\alpha}$ sont continues sur $]0,+\infty[$

$\varphi_{n,\alpha}$ est prolongeable en 0

$\varphi_{n,\alpha}(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

Donc $\varphi_{n,\alpha}$ est intégrable sur$]\ 0,+\infty[$.

Soit $x>0$,

$$\begin{aligned}\varphi'_{n,\alpha}(x) &= \frac{\left(nx^{n-1}e^{-\alpha x}-\alpha x^n e^{-\alpha x}\right)(1-e^{-x})^n - nx^n e^{-x}e^{-\alpha x}(1-e^{-x})^{n-1}}{(1-e^{-x})^{2n}} \\ &= \frac{[(n-\alpha x)(1-e^{-x})-nxe^{-x}]\,e^{-\alpha x}x^{n-1}}{(1-e^{-x})^{n+1}}\end{aligned}$$

On a $1-e^{-x}=x+o(x)$ en 0. donc $(n-\alpha x)\left(1-e^{-x}\right)-nx=(n-\alpha x)(x+o(x))-nx=-\alpha x^2+0(x^2)$ alors $\varphi'_{n,\alpha}$ est prolongeable en 0, or

$\varphi'_{n,\alpha}(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ donc $\varphi'_{n,\alpha}$ est intégrable $]0,+\infty[$.

11) On a $S_{n,\alpha}(t)=\dfrac{1}{t^n}\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\varphi_{n,\alpha}(kt)$, or $\varphi_{n,\alpha}(kt)=o(\dfrac{1}{k^2t^2}))$ quand k est assez grand, alors l'existence de $S_{n,\alpha}(t)$ et sa positivité stricte est évident.

Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{kt}^{(k+1)t}(x-kt)\varphi'_{n,\alpha}(x)\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{+\infty}t\varphi_{n,\alpha}((k+1)t)-\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{kt}^{(k+1)t}\varphi_{n,\alpha}(x)dx \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{t^{n+1}k^n e^{-kt\alpha}}{(1-e^{-kt})^n}-\int_0^{+\infty}\varphi_{n,\alpha}(x)dx \\ &= t^{n+1}S_{n,\alpha}(t)-\int_0^{+\infty}\varphi_{n,\alpha}(x)dx\end{aligned}$$

Il suffit pour ce qui reste de montrer que

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{kt}^{(k+1)t}(x-kt)\varphi'_{n,\alpha}(x)\mathrm{d}x=O(t)$$

quand t est proche de 0

On a

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{kt}^{(k+1)t}(x-kt)\varphi'_{n,\alpha}(x)\mathrm{d}x\right| &\le \sum_{k=0}^{+\infty}\int_{kt}^{(k+1)t}(x-kt)|\varphi'_{n,\alpha}(x)|\mathrm{d}x \\ &\le t\int_0^{+\infty}|\varphi'_{n,\alpha}(x)|dx\end{aligned}$$

Ce qui est demandé.

12) $0 < x \Rightarrow 0 < e^{-x} < 1$. ALors

$$\frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}} = \sum_{j=0}^{\infty} xe^{-(j+1)x}$$

Posons $u_j(x) = xe^{-(j+1)x}$

- $\forall_j \in \mathbb{N}$, u_j est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$: car $u_j(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$
- $x > 0; \sum u_j(x)$ cv de somme $\frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}$ et $x \longmapsto \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}$ est continue sur $]0,+\infty[$.
- $\sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{\pi\infty} xe^{-(j+1)x} dx = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^2} \int_0^{+\infty} te^{-t} dt = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$

le thm I.T.T s'applique et

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}} dx = \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} xe^{-(j+1)x} dx = \frac{\pi^2}{6}.$$

E. Contrôle de fonctions caractéristiques

13) Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\left|\phi_X(\theta)\right|^2 = E(\cos(\theta X))^2 + E(\sin(\theta X))^2$
et d'après l'inégalité de Jensen : $E(\cos(\theta X))^2 \le E(\cos(\theta X)^2)$ et $E(\sin(\theta X))^2 \le E(\sin(\theta X)^2)$, l'espérance est linéaire, donc :

$$\left|\phi_X(\theta)\right|^2 \le 1$$

14) $X \hookrightarrow G(p)$, donc $X(\Omega) = \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = p \cdot q^{n-1}$ alors

$$\begin{aligned}
\phi_{aX+b}(\theta) &= E\left(e^{i\theta(aX+b)}\right) \\
&= e^{i\theta b} E\left(e^{ia\theta X}\right) \\
&= e^{i\theta b} \sum_{n=1}^{\infty} e^{ia\theta n} pq^{n-1} \\
&= e^{i(a+b\theta)} p \frac{1}{1-q^{ia\theta}}
\end{aligned}$$

15) $k \in \mathbb{N}$: $E\left(X^k\right)$ existe $\Longleftrightarrow \sum_{n\ge1} n^k pq^{n-1}$ converge, ce qui est vraie d'après D'Alembert.

$\phi_X(\theta) = p\sum_{n=1}^{\infty} e^{i\theta n} q^{n-1}, \phi_X$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ d'après la formule précédente, avec $a = 1$ er $b = 0$.

Posons $f_n(\theta) = e^{i\theta n} q^{n-1}$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*; f_n$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad f_n^{(k)}(\theta) = (in)^k e^{i\theta n} q^{n-1}$.

et $\left|f_n^{(k)}(\theta)\right| = n^k q^{n-1}$ et $\sum_{n\geqslant 1} n^k q^{n-1}$ est cv (D'Alembert).

alors ϕ_X est C^∞ est C^∞ sur $\mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}; \forall \theta \in \mathbb{R} : \phi_X^{(k)}(\theta) = pi^k \sum_{n=1}^{\infty} n^k e^{i\theta n} q^{n-1}$

En particulier $\phi_X^{(k)}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} (in)^k q^{n-1} p = i^k E\left(X^k\right)$.

16) Par récurrence sur k. Si $k = 0$, l'égalité est vraie, on prend $P_0(X) = 1$

. Soit $k \in \mathbb{N}$ supposons que $\phi_X^{(k)}(\theta) = pe^{i\theta} i^k \dfrac{P_k\left(qe^{i\theta}\right)}{\left(1-qe^{i\theta}\right)^{k+1}}$ et $P_k(0) = 1$,

alors :

$$\phi_X^{(k+1)}(\theta) =$$

$$pi^{k+1}\frac{P_k\left(qe^{i\theta}\right)}{\left(1-qe^{i\theta}\right)^{k+1}} + pe^{i\theta} i^k \frac{iqe^{i\theta} P_k'\left(qe^{i\theta}\right)\left(1-qe^{i\theta}\right)^{k+1} + (k+1)qie^{i\theta}\left(1-qe^{i\theta}\right)^k P_k\left(qe^{i\theta}\right)}{\left(1-qe^{i\theta}\right)^{2k+2}}$$

$$= pi^{k+1}\frac{\left(1-qe^{i\theta}\right)P_k\left(qe^{i\theta}\right) + qe^{i\theta}\left(1-q^{i\theta}\right)P_k'\left(qe^{i\theta)} + (k+1)qe^{i\theta}P_k\left(qe^{i\theta}\right)}{\left(1-qe^{i\theta}\right)^{k+2}}$$

$$= pi^{k+1}\frac{P_{k+1}\left(qe^{i\theta}\right)}{\left(1-qe^{i\theta}\right)^{k+2}}$$

avec $P_{k+1}(X) = (1-X)P_k(X) + X(1-X)P_k'(X) + (k+1)XP_k(X)$, on a bien $P_{k+1}(0) = 0$.

La récurrence s'applique et le résultat est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

F.Convergence vers une gaussiènne

17) Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$E\left(X^k\right) = p\frac{P_k(q)}{p^{k+1}} \quad \text{c'est la Q15 et 16}$$

$$= \frac{P_k(q)}{p^K}$$

donc $\left|E\left(X^k\right) - \dfrac{1}{p^k}\right| = \dfrac{1}{p^k}\left|P_k(q) - P_k(0)\right|$ or 0 est une racine du polynôme $P_K - P_k(0)$, donc $\exists Q_K \in \mathbb{R}[X]/$

$$P_K - P_k(0) = XQ_k.$$

ALors $\left|E\left(X^k\right)-\dfrac{1}{p^k}\right|=\dfrac{1}{p^k}q\left|Q_K(q)\right|$, on prend $C_K\geqslant\left|Q_K(q)\right|$

18) d'après Q 17 : $\forall k\in\mathbb{N}\quad \dfrac{1-qC_k}{p^k}\leqslant E\left(X^k\right)\leqslant\dfrac{1+qC_k}{p^k}$ et

$$\begin{aligned}E\left((X-E(X))^4\right)&=E\left(X^4+E(X)^4-4X^3E(X)+6X^2E(X)^2-4XE(X)^3\right)\\&=E\left(X^4+\frac{1}{p^4}-\frac{4}{p}X^3+\frac{6}{p^2}X^2-\frac{4}{p^3}X\right)\\&\leqslant\frac{1}{p^4}\left(1+9qC_4+1+6+6qC_2+4qC_3-4+4qC_1-4\right)\\&\leqslant\frac{q}{p^4}K\quad\text{où}\quad k=C_4+6C_2+4C_3+4C_1>0.\end{aligned}$$

19) On a $\forall x,y\in\mathbb{R}\quad |xy|\leqslant\dfrac{x^2+y^2}{2}$. alors $\quad 0\leqslant Y^2\leqslant\dfrac{1+Y^4}{2}$ et $\left|Y^3\right|\leqslant\dfrac{Y^2+Y^4}{2}$
Puisque $E\left(Y^4\right)$ existe, donc successivement $E\left(Y^2\right)$ er $E\left(Y^3\right)$ aussi existent de plus d'après les inégalités de Cauchy-Schwarz : on obtient.

$$E\left(Y^2\right)=\left|E\left(1\cdot Y^2\right)\right|\leqslant\sqrt{E(1)}\sqrt{E\left(Y^4\right)},\text{ alors } E\left(Y^2\right)\leqslant\left(E\left(Y^4\right)\right)^{1/2}$$

et $E\left(\left|Y^3\right|\right)=E\left(|Y|Y^2\right)\leqslant\left(E\left(Y^2\right)\right)^{1/2}\left(E\left(Y^4\right)^{1/2}\leqslant\left(E\left(Y^4\right)\right)^{\frac14}\left(E\left(Y^4\right)\right)^{1/2}\leqslant\right.$ $\left(E\left(Y^4\right)\right)^{\frac34}$.

20) Posons $\varphi(u)=e^{iu}$; φ est C^∞ sur $\mathbb{R}$, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange ; On a.

$$\begin{aligned}\left|e^{iu}-1-iu+\frac{u^2}{2}\right|&=\left|\varphi(u)-\varphi(0)-\varphi'(0)u-\frac{\varphi''(0)}{2}u^2\right|\\&\leqslant\frac{|u|^3}{3!}\sup_{t\in I}\left|\varphi^{(3)}(t)\right|\quad\text{Avec } I=[0,u]\quad\text{ou}\quad[u,0]\\&\leqslant\frac{|u|^3}{6}\end{aligned}$$

On a $E(Y)=0$ et $\phi_Y(\theta)=E\left(e^{i\theta Y}\right)$

$$\text{alors } \left|\phi_Y(\theta)-1+\frac{E(Y^2)\theta^2}{2}\right| = \left|E\left(e^{i\theta Y}-1-i\theta Y+\frac{Y^2\theta^2}{2}\right)\right|$$

$$\leqslant E\left(\left|e^{i\theta Y}-1-i\theta Y+\frac{Y^2\theta^2}{2}\right|\right)^{3/2}$$

$$\leqslant \frac{1}{6}E\left(|\theta|^3\left|Y^3\right|\right)$$

$$\leqslant \frac{|\theta|^3}{3}\left(E\left(Y^4\right)\right)^{3/4}$$

21) On a

$$\left|\phi_Y(\theta)-\exp\left(-\frac{E(Y^2)\theta^2}{2}\right)\right| \leq \left|\phi_Y(\theta)-1+\frac{E(Y^2)\theta^2}{2}\right| + \left|\exp\left(-\frac{E(Y^2)\theta^2}{2}\right)-1+\frac{E(Y^2)\theta^2}{2}\right|$$

$$\leq \frac{|\theta|^3}{3}\left(E\left(Y^4\right)\right)^{3/4}+\frac{1}{2}\frac{\theta^4E(Y^2)^2}{4}$$

$$\leq \frac{|\theta|^3}{3}\left(E\left(Y^4\right)\right)^{3/4}+\frac{\theta^4E(Y^4)}{8}$$

Ici on a utilisé que si $x \geq 0$ alors $|e^{-x}-1+x| \leq \dfrac{x^2}{2}$.

G. La conclusion

22) Si $n=1$ l'inégalité est vraie.

Si $n=2$,

$$|z_1z_2-u_1u_2| = |z_1z_2-z_1u_2+z_1u_2-u_1u_2|$$

$$\leq |z_1||z_2-u_2|+|u_2||z_1-u_1|$$

$$\leq |z_2-u_2|+|z_1-u_1| \quad \text{car ces complexes sont de module inférieur ou égal à 1}$$

Soit $n\in\mathbb{N}$ et $n\geq 2$, supposons que ce résultat est vrai à l'ordre n, puisque $\left|\prod_{k=1}^{n} z_k\right| \leq 1$ et $\left|\prod_{k=1}^{n} u_k\right| \leq 1$ alors :

$$\left|\prod_{k=1}^{n+1} z_k-\prod_{k=1}^{n+1} u_k\right| = \left|z_{n+1}\prod_{k=1}^{n} z_k-u_{n+1}\prod_{k=1}^{n} u_k\right|$$

$$\leq \left|\prod_{k=1}^{n} z_k-\prod_{k=1}^{n} u_k\right|+|z_{k+1}-u_{k+1}| \quad \text{hypothèse de récurrence}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n+1}|z_k-u_k| \quad \text{hypothèse de récurrence}$$

La récurrence s'applique et le résultat est vrai pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

23) Ici $p = 1 - e^{-kt}$ et $q = e^{-kt}$ $a = k : b = -kE(Z_k)$

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n} \phi_{Y_k}(\theta) &= \prod_{k=1}^{n} \frac{pe^{i(a+b\theta}}{1-qe^{ia\theta}} \\
&= \prod_{k=1}^{n} \frac{(1-e^{-kt})\, e^{ik\left(1-\frac{1}{1-e^{-kt}}\right)\theta}}{1-e^{-kt}e^{ik\theta}} \\
&= \prod_{k=1}^{n} \frac{\left(1-e^{-kt}\right) e^{\frac{-ik\theta e^{-kt}}{1-e^{-kt}}}}{1-e^{-kt}e^{ik\theta}}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{\infty} \phi_{Y_k}(\theta) &= \left(\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1-e^{-kt}}{1-e^{-kt}e^{ik\theta}}\right) \exp \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-ik\theta e^{-kt}}{1-e^{-kt}} \\
&= \frac{P\left(e^{-t}e^{i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)} \exp\left(-i\theta S_{1,1}(t)\right) \\
&= e^{-i\theta m_t} \frac{P\left(e^{-t}e^{i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)} \\
&= h(t,\theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| h(t,\theta) - e^{-\sigma_t^2 \frac{\theta^2}{2}} \right| &= \left| \prod_{k=1}^{\infty} \phi_{Y_k}(\theta) - \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} -\frac{k^2 e^{-kt}}{\left(1-e^{-kt}\right)^2} \frac{\theta^2}{2} \right) \right| \\
&= \left| \prod_{k=1}^{\infty} \phi_{Y_k}(\theta) - \prod_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{k^2 e^{-kt}}{\left(1-e^{-kt}\right)^2} \frac{\theta^2}{2} \right) \right|
\end{aligned}$$

or $E\left(Y_k^2\right) = K^2 E\left(Z_k - E\left(Z_k\right)\right)^2 = k^2 V\left(_k\right) = k^2 \dfrac{e^{-kt}}{\left(1-e^{-kt}\right)^2}$

donc

$$\begin{aligned}
\left| h(t,\theta) - e^{-\sigma_t^2 \frac{\theta^2}{2}} \right| &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left| \phi_{Y_k}(\theta) - \exp\left(-\frac{E\left(Y_k^2\right)\theta^2}{2} \right) \right| \qquad \text{d'après question 22} \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{|\theta|^3}{3} E\left(Y_k^4\right)^{\frac{3}{4}} + \frac{\theta^2}{8} E\left(Y_k^4\right) \right)
\end{aligned}$$

or $E\left(Y_k^4\right) = k^4 E\left(Z_k - E\left(Z_k\right)\right)^4\right) \leqslant k^4 \dfrac{Ke^{-kt}}{\left(1-e^{-kt}\right)^4}$

Donc

$$\begin{aligned}
\left| h(t,\theta) - e^{-\sigma_t^2 \frac{\theta^2}{2}} \right| &\leqslant K^{\frac{3}{4}} \frac{|\theta|^3}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3 e^{-\frac{3}{4}kt}}{\left(1-e^{-kt}\right|^3} + \frac{\theta^2 K}{8} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4 e^{-kt}}{\left(1-e^{-kt}\right)^4} \\
&\leqslant K^{\frac{3}{4}} |\theta|^3 S_{3,\frac{3}{4}}(t) + K\theta^2 S_{4,1}(t)
\end{aligned}$$

24)

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= S_{2,1}(t)\\ &= \frac{1}{t^3}\int_0^{+\infty}\frac{x^2e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}\,\mathrm{d}x + O\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad \text{d'après la question 11}\\ &\underset{t\to 0}{\sim} \frac{\pi^2}{3t^3} \quad \text{d'après le résultat admis question 12}\end{aligned}$$

d'où le résultat :

$$\sigma_t \underset{t\to 0}{\sim} \frac{\pi}{\sqrt{3}t^{\frac{3}{2}}}$$

On a en utilisant la question 11 et 12 que :

$$m_t = \frac{1}{t^2}\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}\,\mathrm{d}x + O\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\pi^2}{6t^2} + O\left(\frac{1}{t}\right)$$

Or

$$j(t,u) = \zeta(t,u)h\left(t,\frac{u}{\sigma_t}\right)$$

D'après 23 avec $\theta = \dfrac{u}{\sigma_t}$ et le fait que $S_{3,3/4}(t) = O(\dfrac{1}{t^4})$ et $S_{4,1}(t) = O(\dfrac{1}{t^5})$ on a :

$$\left|h\left(t,\frac{u}{\sigma_t}\right) - e^{-\frac{u^2}{2}}\right| \leqslant K^{\frac{3}{4}}\frac{|u|^3}{\sigma_t^3}\times O\left(\frac{1}{t^4}\right) + K\frac{u^4}{\sigma_t^4}\times O\left(\frac{1}{t^5}\right) = O(\sqrt{t}) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

D'autre part, on a

$$\zeta(t,u) = \exp\left(\frac{iu}{\sigma_t}O\left(\frac{1}{t}\right)\right) = \exp(O(\sqrt{t})) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$$

On conclut que :

$$j(t,u) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} e^{-\frac{u^2}{2}}$$

25) L'application $f : [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}; \theta \longmapsto \dfrac{1-\cos(\theta)}{\theta^2}$ prolongée en 0 par $\dfrac{1}{2}$ est continue sur le compact $[-\pi,\pi]$ donc bornée et atteint sa borne inférieure notée α. Donc $\exists\theta_0 \in [-\pi,\pi]$ tel que $\alpha = f(\theta_0)$

Comme cette fonction est strictement positive sur ce segment, alors $\alpha = f(\theta_0) > 0$.

Pour t assez proche de 0, on a $e^{-t} \geq \dfrac{1}{2}$, la question 9 s'applique et avec la minoration précédente, on obtient :

$$|h(t,\theta)| \leqslant \exp\left(-\frac{\alpha\theta^2}{6\left(1-e^{-t}\right)^3}\right) \quad \text{ou} \quad |h(t,\theta)| \leqslant \exp\left(-\frac{1}{3\left(1-e^{-t}\right)}\right)$$

On a $t > 0$ donc $1 - e^{-t} < t$, alors

$$|h(t,\theta)| \leqslant \exp\left(-\frac{\alpha\theta^2}{6t^3}\right) \quad \text{ou} \quad |h(t,\theta)| \leqslant \exp\left(-\frac{1}{3t}\right)$$

Comme $\sigma_t \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{\pi}{\sqrt{3}t^{\frac{3}{2}}}$ donc il existe $t_0 > 0$ tel que, pour tout $t \in [0, t_0]$

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\sqrt{3}t^{\frac{3}{2}}} \leq \sigma_t \leq \left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\sqrt{3}t^{\frac{3}{2}}}$$

Donc $\exists \beta > 0$ et $\gamma_1 > 0$ telle que :

$$\forall t \in [0, t_0], \forall \theta \in [-\pi, \pi], \quad |h(t,\theta)| \leq e^{-\beta(\sigma_t\theta)^2} \quad \text{ou } |h(t,\theta)| \leq e^{-\gamma_1(\sigma_t)^{2/3}}$$

Or $e^{-\gamma_1(\sigma_t)^{2/3}} \leq e^{-\frac{\gamma_1}{\pi^{2/3}}(\sigma_t|\theta|)^{2/3}}$ avec $\gamma = \dfrac{\gamma_1}{\pi^{2/3}}$ on a $|h(t,\theta)| \leq e^{-\gamma(\sigma_t)^{2/3}}$.

26) On a

$$\begin{aligned}\int_{-\pi\sigma_t}^{\pi\sigma_t} j(t,u)\mathrm{d}u &= \int_{-\pi\sigma_t}^{\pi\sigma_t} \zeta(t,u)h\left(t, \frac{u}{\sigma_t}\right)\mathrm{d}u \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta(t,u)h\left(t, \frac{u}{\sigma_t}\right)\mathbb{1}_{[-\pi\sigma_t, \pi\sigma_t]}du\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\zeta(t,u)h\left(t, \frac{u}{\sigma_t}\right)\mathbb{1}_{u\in[-\pi\sigma_t,\pi\sigma_t]}\right| &\leqslant \left|h\left(t, \frac{u}{\sigma_t}\right)\right| \\ &\leqslant e^{-\beta u^2} \text{ ou } e^{-\gamma u^{2/3}}\end{aligned}$$

Les fonctions majorantes sont intégrables sur $[0, +\infty[$, d'où
Par application de la question 24 et ce qui précède, Les conditions du théorème de convergence dominée sont réalisées, alors :

$$\lim_{t\to 0}\int_{-\pi\sigma_t}^{\pi\sigma_t} j(t,u)\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{2\pi}$$

Car σ_t tend vers $+\infty$ en 0^+.

G. La conclusion

27) Par application de la formule de la question 7, avec $t = \dfrac{\pi}{\sqrt{6n}}$

On a

$$\begin{aligned}
p_n &= \frac{e^{nt}P(e^{-t})}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta}\frac{P(e^{-t+i\theta})}{P(e^{-t})}d\theta \\
&= \frac{e^{nt}P(e^{-t})}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta}e^{im_t\theta}h(t,\theta)d\theta \\
&= \frac{e^{nt}P(e^{-t})}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m_t-n)\theta}h(t,\theta)d\theta \\
&= \frac{e^{nt}P(e^{-t})}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m_t-\frac{\pi^2}{6t^2})\theta}h(t,\theta)d\theta \qquad \text{car} \quad n=\frac{\pi^2}{6t^2} \\
&= \frac{e^{nt}P(e^{-t})}{2\pi\sigma_t}\int_{-\pi\sigma_t}^{\pi\sigma} e^{i(m_t-\frac{\pi^2}{6t^2})\frac{u}{\sigma_t}}h(t,\frac{u}{\sigma_t})d\theta \quad \text{changement de variable} \quad u=\sigma_t\theta \\
&= \frac{e^{nt}P(e^{-t})}{2\pi\sigma_t}\int_{-\pi\sigma_t}^{\pi\sigma} h\left(t,\frac{u}{\sigma_t}\right)d\theta
\end{aligned}$$

$\int_{-\pi\sigma_t}^{\pi\sigma} h\left(t,\frac{u}{\sigma_t}\right)d\theta$ tend vers $\sqrt{2\pi}$ quand t tend vers 0^+, d'après la question précédente.

la formule admise donne $\frac{e^{nt}P(e^{-t})}{2\pi} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{\frac{\pi\sqrt{n}}{\sqrt{6}}}}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{6n}\times 2\pi}}\exp\left(\frac{\sqrt{6n}\pi}{6}\right) =$ $\frac{e^{\frac{\pi\sqrt{n}}{\sqrt{6}}}}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{(6n)^{1/4}}\exp\left(\sqrt{\frac{n}{6}}\pi\right)$

Et que

$$\sigma_t \underset{t\to 0}{\sim} \frac{\pi}{\sqrt{3}t^{\frac{3}{2}}}$$

En rassemblant tous cela on obtient le résultat.

Merci de signaler les remarques par sadikoulmeki@yahoo.fr