 Corrigé de M. Quercia (michel.quercia@prepas.org) relu et amendé par Romain Krust

Partie I : actions de groupes

1) Immédiat.

2) ${}^{\gamma}(g_1g_2) = {}^{\gamma}g_1.{}^{\gamma}g_2$ car $\Phi(\gamma)$ est un automorphisme de G. Pour la même raison, ${}^{\gamma}e_G = e_G$ et ${}^{\gamma}(g^{-1}) = ({}^{\gamma}g)^{-1}$. ${}^{(\gamma_1\gamma_2)}g = {}^{\gamma_1}({}^{\gamma_2}g)$ car $\Phi(\gamma_1\gamma_2) = \Phi(\gamma_1) \circ \Phi(\gamma_2)$. ${}^{e_\Gamma}g = g$ car $\Phi(e_\Gamma) = \mathrm{id}_G$.

3) Vérification immédiate. $GL_n(\mathbf{C})^{\Gamma_2} = GL_n(\mathbf{R})$.

4a) Si $g \in G^\Gamma$ alors pour tout $\gamma \in \Gamma$ on a $u(g) = u({}^{\gamma}g) = {}^{\gamma}(u(g))$ donc $u(g) \in H^\Gamma$.

4b) Non : soient $G = H = \mathbf{C}^*$, $\Gamma = \{-1, 1\}$ que l'on fait agir sur G et H par conjugaison complexe et $u : z \longmapsto z^2$. u est clairement un Γ-morphisme surjectif, et on a $u(G^\Gamma) = u(\mathbf{R}^*) = \mathbf{R}^{+*} \neq H^\Gamma$.

Partie II : sous-groupes matriciels

1) Les éléments de G sont simultanément diagonalisables ; soit $P \in GL_n(\mathbf{C})$ telle que pour tout $M \in G$ la matrice $M' = P^{-1}MP$ est diagonale. Comme $M'^2 = I_n$, les coefficients diagonaux de M' valent ± 1 donc il y a au maximum 2^n matrices M' distinctes et l'application $M \longmapsto M'$ est bijective, d'où $\mathrm{card}(G) \leqslant 2^n$.

2) $V_1 = (\varphi^{-1})^{-1}(U)$ est un ouvert relatif de V, donc un ouvert de $\mathbf{R}^p$. La phrase « f est de classe $\mathcal{C}^1$ » a donc un sens. On note $i = \varphi(I_n)$ et on considère le développement limité de f au voisinage de (i, i) à l'ordre 1 :

$$f(i + h, i + k) = f(i, i) + df_{(i,i)}(h, k) + o(\|h\| + \|k\|) = i + df_{(i,i)}(h, k) + o(\|h\| + \|k\|).$$

En prenant $k = 0$ on a $f(i + h, i) = i + h$ pour tout h proche de $0_{\mathbf{R}^p}$, d'où $df_{(i,i)}(h, 0) = h$ pour tout $h \in \mathbf{R}^p$. De même $df_{(i,i)}(0, k) = k$ pour tout $k \in \mathbf{R}^p$ puis par linéarité, $df_{(i,i)}(h, k) = h + k$ pour tous $h, k \in \mathbf{R}^p$. Soit alors g l'application qui à $x \in V_1$ associe $f(x, x) \in V$. g est de classe $\mathcal{C}^1$ comme f et on a le développement limité : $g(i+h) = i+2h+o(\|h\|)$ donc $dg_i = 2\mathrm{id}_{\mathbf{R}^p}$. D'après le théorème d'inversion locale, g induit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre deux voisinages de i et par conséquent $g(V_1)$ est un voisinage de i. Alors $\varphi^{-1}(g(V_1)) = \{M^2 \text{ tq } M \in U\}$ est un voisinage relatif de I_n dans A.

3a) Pour M matrice carrée on note m_{ij} le coefficient général de M et M_{ij} le cofacteur de m_{ij} dans $\det(M)$.

Choix de A, φ, V**.** Prenons $A = \{M \in SL_n(\mathbf{R}) \text{ tq } M_{11} \neq 0\}$, φ l'application de A dans $\mathbf{R}^{n^2-1}$ qui à $M \in A$ associe la liste des coefficients de M autres que m_{11} (ordonnée d'une manière quelconque) et $V = \varphi(A)$.

– A est ouvert relatif de $SL_n(\mathbf{R})$: car l'application $M \longmapsto M_{11}$ est continue.
– V est ouvert dans $\mathbf{R}^p$: car V est l'ensemble des $(n^2 - 1)$-uplets $(m_{ij})_{(i,j)\neq(1,1)}$ tels que $\det((m_{ij})_{i\geqslant 2,\ j\geqslant 2}) \neq 0$.
– φ est continue : clair.
– φ est bijective : surjective par choix de V et injective car la connaissance des m_{ij} pour $(i, j) \neq (1, 1)$ et le fait que $M_{11} \neq 0$ permettent de calculer m_{11} à partir de la relation $\det(M) = 1$.
– φ^{-1} est continue : car m_{11}, calculé à partir de la relation $\det(M) = 1$, est une fonction rationnelle de $(m_{ij})_{(i,j)\neq(1,1)}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur V.

Choix de U**.** L'application $(M, N) \longmapsto (MN)_{11}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}$ est continue et vaut 1 en (I_n, I_n). Par continuité il existe un voisinage W de (I_n, I_n) dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})^2$ tel que pour toutes matrices $M, N \in W$ on a $(MN)_{11} \neq 0$. Quitte à le rétrécir, on peut supposer que W est de la forme $W = X \times X$ où X est un voisinage ouvert de I_n dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On prend alors $U = X \cap A$.

– U est un ouvert relatif de A contenant I_n : par construction.
– Le produit de deux matrices de U appartient à A : par construction.
– $f : (x, y) \longmapsto \varphi(\varphi^{-1}(x).\varphi^{-1}(y))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $V_1 = \varphi(U)$: car f est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $V_1 \times V_1 \subset V \times V$.

Toutes les propriétés requises étant satisfaites, $SL_n(\mathbf{R})$ vérifie la condition (L).

3b) Soient A, U associés à la condition (L) pour G. l'ensemble $\{M^2 \text{ tq } M \in U\}$ est un voisinage de I_n dans A et A est ouvert dans G donc c'est un voisinage de I_n dans G. J contient cet ensemble, donc J est aussi un voisinage relatif de I_n dans G. De plus J est un sous-groupe de G car G est commutatif donc pour tout $M \in J$, $J = \{MX \text{ tq } X \in J\} = f^{-1}(J)$ où f est l'application $X \longmapsto M^{-1}X$ de G dans G. f est continue et J est un voisinage de $I_n = f(M)$ donc $f^{-1}(J) = J$ est un voisinage de M dans G. Ainsi J est un voisinage relatif de chacun de ses éléments ; c'est un ouvert relatif de G.

Par ailleurs si $M \in G \setminus J$, l'ensemble $\{MX \text{ tq } X \in J\}$ est un voisinage de M, disjoint de J car J est un sous-groupe de G. Donc $G \setminus J$ est aussi voisinage relatif de chacun de ses éléments, c'est un ouvert relatif dans G et J est fermé relatif dans G.

Partie III : construction de matrices inversibles

1a) Prendre $\lambda = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbf{R}$ tel que $-e^{2i\theta}$ ne soit pas valeur propre de A.

1b) Prendre B inversible de la forme $B = \lambda I_n + \overline{\lambda} M$. On obtient $M\overline{B} = B$, soit $M = B\overline{B}^{-1}$.

2a) Si $\gamma \in \Gamma$ alors on a $\gamma(i)^2 = \gamma(i^2) = \gamma(-1) = -1$ donc $\gamma = \varepsilon i$ avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Il en résulte que l'on a $\gamma(a + ib) = \gamma(a) + \gamma(i)\gamma(b) = a + \varepsilon ib$ pour tous $a, b \in \mathbf{R}$, ce qui prouve que γ est l'identité de $\mathbf{C}$ ou la conjugaison. Réciproquement ces deux applications sont bien des isomorphismes du corps $\mathbf{C}$ laissant invariants les réels.

2b) L est un K-espace vectoriel de dimension finie contenant la suite $(x^n)_{n\in\mathbf{N}}$, donc celle-ci est liée. Ceci prouve l'existence d'un polynôme $P \in K[X]$ non nul tel que $P(x) = 0$. Si $\gamma \in \Gamma$ alors $0 = \gamma(P(x)) = P(\gamma(x))$ car γ est un morphisme de corps et les coefficients de P sont invariants par γ.

2c) Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une K-base de L. On choisit pour chaque i un polynôme non nul $P_i \in K[X]$ tel que $P_i(x_i) = 0$ et on note Z_i l'ensemble fini des racines de P_i dans L. L'application $\gamma \longmapsto (\gamma(x_1), \ldots, \gamma(x_n))$ de Γ dans $Z_1 \times \ldots \times Z_n$ est injective car $(x_1, \ldots, x_n)$ est une K-base de L et γ est K-linéaire. Donc Γ est fini de cardinal inférieur ou égal à $\mathrm{card}(Z_1) \ldots \mathrm{card}(Z_n)$.

3) Pour $r = 1$, (ρ_1) est libre car ρ_1 est à valeurs dans L^* donc $\rho_1 \neq 0$.

Supposons la propriété « toute famille de $r - 1$ morphismes de L^* distincts est libre » et considérons une éventuelle famille liée $(\rho_1, \ldots, \rho_r)$ de morphismes de L^* distincts. La sous-famille $(\rho_2, \ldots, \rho_r)$ est libre par hypothèse de récurrence donc il existe des scalaires $\alpha_2, \ldots, \alpha_r \in L$ tels que $\rho_1 = \alpha_2\rho_2 + \ldots + \alpha_r\rho_r$. Pour $x, y \in L^*$ on a alors :

$$\begin{aligned} \rho_1(xy) &= \alpha_2\rho_2(xy) + \ldots + \alpha_r\rho_r(xy) &&= \alpha_2\rho_2(x)\rho_2(y) + \ldots + \alpha_r\rho_r(x)\rho_r(y), \\ \rho_1(x)\rho_1(y) &= (\alpha_2\rho_2(x) + \ldots + \alpha_r\rho_r(x))\rho_1(y) &&= \alpha_2\rho_2(x)\rho_1(y) + \ldots + \alpha_r\rho_r(x)\rho_1(y). \end{aligned}$$

Fixons $y \in L^*$ et prenons x variable. On obtient $\alpha_2\rho_2(y)\rho_2 + \ldots + \alpha_r\rho_r(y)\rho_r = \alpha_2\rho_1(y)\rho_2 + \ldots + \alpha_r\rho_1(y)\rho_r$ et $(\rho_2, \ldots, \rho_r)$ est libre d'où $\alpha_i\rho_i(y) = \alpha_i\rho_1(y)$ pour tout $i \in [\![2, r]\!]$ et tout $y \in L^*$. Comme $\rho_1 \neq \rho_i$, il existe y_i tel que $\rho_1(y_i) \neq \rho_i(y_i)$, d'où $\alpha_i = 0$ et ce pour tout i. Ainsi $\rho_1 = 0$, ce qui est absurde.

4a) Soit $x \in L^n$ fixé : $\theta(b(hx)) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \gamma(h)\theta(f(\gamma)\gamma(x)) = 0$ pour tout $h \in L^*$ et la famille $(\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ est L-libre d'après la question précédente, donc $\theta(f(\gamma)\gamma(x)) = 0$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. On prend $\gamma = \mathrm{id}_L$ et on laisse varier x : $\mathrm{Ker}\,\theta \supset f(\mathrm{id}_L)(L^n) = L^n$, d'où $\theta = 0$.

4b) Soit F est le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $b(x)$ quand x décrit L^n. Si $F \neq L^n$ alors F est inclus dans un hyperplan de L^n et il existe une forme linéaire sur L^n non identiquement nulle, mais nulle sur F (une équation de cet hyperplan), en contradiction avec le résultat précédent.

4c) $B(M)$ est inversible car c'est la matrice de passage de la base canonique de L^n à la base $(b(x_1), \ldots, b(x_n))$.

Partie IV : cocycles

1) Immédiat.

2) Il faut montrer que tout cocycle est de la forme $\gamma \longmapsto b^{-1}.{}^{\gamma}b$ pour un certain $b \in G$ (la réciproque, non demandée, étant d'ailleurs immédiate). Soit donc $f : \Gamma \longrightarrow G$ un cocycle. On a $f(1) = f(1).{}^1f(1) = f(1)^2$ d'où $f(1) = e_G = I_n$. Puis $I_n = f(1) = f(-1).{}^{-1}f(-1) = f(-1)\overline{f(-1)}$, donc la matrice $M = f(-1)$ vérifie la propriété **III-1b)**, elle est de la forme $M = B\overline{B}^{-1}$ avec $B \in GL_n(\mathbf{C}) = G$. Alors $b = B^{-1}$ convient.

3a) Remarquons que l'action de Γ sur $GL_n(L)$ est bien une action au sens de l'énoncé car γ est un automorphisme du corps L. Considérons un cocycle $f : \gamma \longrightarrow GL_n(L)$ et montrons qu'il existe une matrice $b \in GL_n(L)$ telle que $f(\gamma) = b^{-1}.{}^{\gamma}b$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Soit $P = B(M)$ la matrice inversible définie en **III-4c)** et $\gamma \in \Gamma$:

$$P = \sum_{\delta\in\Gamma} f(\delta).{}^{\delta}M = \sum_{\delta\in\Gamma} f(\gamma\delta).({}^{\gamma\delta}M) = \sum_{\delta\in\Gamma} f(\gamma).{}^{\gamma}f(\delta).{}^{\gamma}({}^{\delta}M) = f(\gamma).{}^{\gamma}\Big(\sum_{\delta\in\Gamma} f(\delta).{}^{\delta}M\Big) = f(\gamma).{}^{\gamma}P,$$

d'où $b = P^{-1}$ convient.

3b) On retrouve le résultat **IV-2)**.

4ab) Immédiat.

5a) Immédiat.

5b) Décryptons l'énoncé :

- un élément $[f]$ de $\mathcal{H}(\Gamma, A)$ est l'ensemble des cocycles de Γ dans A de la forme $\gamma \longmapsto a^{-1}.f(\gamma).{}^{\gamma}a$ où a décrit A, f étant un cocycle de Γ dans A fixé.
- $\tilde{\imath}([f])$ est l'ensemble des cocycles de Γ dans B de la forme $\gamma \longmapsto b^{-1}.f(\gamma).{}^{\gamma}b$, b décrivant B.
- $\tilde{u}(\tilde{\imath}([f]))$ est l'ensemble des cocycles de Γ dans C de la forme $\gamma \longmapsto c^{-1}.u(f(\gamma)).{}^{\gamma}c$ où c décrit C.

Comme f est à valeurs dans $A = \operatorname{Ker} u$ on a $u(f(\gamma)) = e_C$ donc $\tilde{u}(\tilde{\imath}([f]))$ est la classe d'équivalence du cocycle trivial $\gamma \longmapsto e_c$. Ceci prouve que $\operatorname{Im}(\tilde{\imath}) \subset \operatorname{Ker}(\tilde{u})$ et l'inclusion réciproque se prouve de même en utilisant le fait que $c^{-1}.u(f(\gamma)).{}^{\gamma}c = u(b^{-1}.f(\gamma).{}^{\gamma}b)$ où b est un antécédant de c par u.

5c) Il est clair que $\tilde{\imath}(0) = 0$. Réciproquement, soit $[f] \in \mathcal{H}(\Gamma, A)$ tel que $\tilde{\imath}([f]) = 0$. Donc f est à valeurs dans A et il existe $b \in B$ tel que $f(\gamma) = b^{-1}.{}^{\gamma}b$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. On veut montrer que $[f] = 0$, c'est-à dire qu'il existe $a \in A$ tel que $f(\gamma) = a^{-1}.{}^{\gamma}a$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Or,

$$(\forall\, \gamma \in \Gamma,\ b^{-1}.{}^{\gamma}b = a^{-1}.{}^{\gamma}a) \Longleftrightarrow (\forall\, \gamma \in \Gamma,\ ab^{-1} = {}^{\gamma}(ab^{-1})) \Longleftrightarrow (ab^{-1} \in B^{\Gamma}).$$

Il suffit donc de prouver qu'il existe $b' \in B^{\Gamma}$ tel que $b'b \in A = \operatorname{Ker} u$, soit tel que $u(b') = u(b^{-1})$. Ceci revient à prouver que $u(b^{-1}) \in u(B^{\Gamma}) = C^{\Gamma}$ et cette dernière propriété résulte du fait que f est à valeurs dans A :

$$\forall\, \gamma \in \Gamma,\ (b^{-1}.{}^{\gamma}b \in A) \Longrightarrow (u(b^{-1}.{}^{\gamma}b) = e_c) \Longrightarrow (u(b^{-1}) = {}^{\gamma}u(b^{-1})).$$

Partie V : exemples d'ensemles $\mathcal{H}(\Gamma, G)$

1a) G est connexe par arcs et J est une partie de G non vide, à la fois relativement ouverte et relativement fermée, donc $J = G$.

1b) Tout cocycle f de Γ_2 dans G est la corestriction à G d'un cocycle de Γ_2 dans $GL_n(\mathbf{C})$ donc de la forme $1 \longmapsto I_n$, $-1 \longmapsto B\overline{B}^{-1}$ avec $B \in GL_n(\mathbf{C})$ (question **IV-2)** et l'on a $B\overline{B}^{-1} = g \in G$ puisque f est à valeurs dans G. Alors $u \circ f(1) = I_n^2 = g.g^{-1}$ et $u \circ f(-1) = g^2 = g.\overline{g}^{-1}$ donc le cocycle ${}^{u}f$ est équivalent au cocycle trivial. Ceci prouve que $\tilde{u}([f]) = 0$ pour tout $[f] \in \mathcal{H}(\Gamma_2, G)$.

1c) D'après **IV-5a)**, $\mathcal{H}(\Gamma_2, G) = \operatorname{Ker} \tilde{u} = \operatorname{Im} \tilde{\imath}$ où i est l'injection canonique de $\operatorname{Ker} u = \{M \in G \text{ tq } M^2 = I_n\}$ dans G. $\operatorname{Ker} u$ est fini (question **II-1)** donc $\mathcal{H}(\Gamma_2, \operatorname{Ker} u)$ est fini, et par suite $\operatorname{Im} \tilde{\imath}$ est fini.

2a) Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$. Si $M \in SO_2(\mathbf{C})$ alors si $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = ad - bc = 1$ et $ac + bd = 0$. La dernière relation, jointe au fait que $(a, b) \neq (0, 0)$, donne $c = -kb$, $d = ka$ pour un certain $k \in \mathbf{C}$, d'où en reportant : $k = 1$. Ainsi, toute matrice de $SO_2(\mathbf{C})$ est de la forme $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbf{C}$ et $a^2 + b^2 = 1$. Réciproquement, toute matrice de la forme précédente vérifie bien ${}^{t}MM = I_2$ et $\det(M) = 1$. On en déduit par calcul immédiat que $SO_2(\mathbf{C})$ est commutatif et est stable par conjugaison complexe.

On montre que $SO_2(\mathbf{C})$ vérifie la condition (L) par adaptation de la démonstration donnée en **3a)**. On prend (avec des conventions d'écriture évidentes) :

$$A = \{M \in SO_2(\mathbf{C}) \text{ tq } \operatorname{Re}(a) > 0\}, \qquad V = \{b \in \mathbf{C} \text{ tq } 1 - b^2 \notin \mathbf{R}^-\}, \qquad \varphi = M \longmapsto b.$$

Il est clair que A est un ouvert relatif de $SO_2(\mathbf{C})$ et V un ouvert de $\mathbf{C}$ (identifié à $\mathbf{R}^2$ pour respecter la définition de la condition (L)) et que φ est continue de A dans V. φ est bijective car la donnée de $b \in V$ permet de calculer a à partir des relations $a^2 = 1 - b^2$ et $\operatorname{Re}(a) > 0$:

$$a = \frac{|1 - b^2| + 1 - b^2}{\sqrt{2}\sqrt{|1 - b^2| + \operatorname{Re}(1 - b^2)}}.$$

Cette expression montre de plus que φ^{-1} est continue sur V. Ensuite on choisit un voisinage W de (I_2, I_2) dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})^2$ tel que pour toutes matrices $M, N \in W$, le coefficient ligne 1 colonne 1 de MN ait une partie réelle strictement positive, on impose par rétrécissement $W = X \times X$ où X est un voisinage ouvert de I_2 dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ et on prend $U = X \cap A$. L'application $(x, y) \longmapsto \varphi(\varphi^{-1}(x).\varphi^{-1}(y))$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\varphi(U)^2$ vu l'expression ci-dessus pour a fonction de b.

2b) Soit $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbf{C})$. On a $M^2 = I$ si et seulement si $a^2 - b^2 = 1$ et $2ab = 0$, ce qui, joint à la condition $a^2 + b^2 = 1$, donne $a = \pm 1$, $b = 0$. Donc $A = \{I_2, -I_2\}$.

Soit f un cocycle de Γ_2 dans A. On a $f(1) = f(1)^2$ d'où $f(1) = I_2$. Il y a donc au plus deux cocycles de Γ_2 dans A :

$$f_0 : \begin{cases} 1 \longmapsto & I_2 \\ -1 \longmapsto & I_2 \end{cases} \qquad f_1 : \begin{cases} 1 \longmapsto & I_2 \\ -1 \longmapsto & -I_2 \end{cases}$$

et on vérifie aisément que ces deux applications conviennent. Elles ne sont pas équivalentes au sens de **IV-1)** car les seules valeurs autorisées pour b sont I_2 et $-I_2$ qui ne conviennent pas. Il en résulte que $\mathrm{card}(\mathcal{H}(\Gamma_2, A)) = 2$.

2c) On applique les résultats de **IV-5)** avec $B = C = SO_2(\mathbf{C})$ et $u : X \longmapsto X^2$. La surjectivité de u résulte de la proposition suivante : *soient* $a, b \in \mathbf{C}$ *tels que* $a^2 + b^2 = 1$. *Alors il existe* $\theta \in \mathbf{C}$, *unique à un multiple entier de* 2π *près, tel que* $a = \cos\theta$ *et* $b = \sin\theta$.

Démonstration : $\begin{cases} \cos\theta = a \\ \sin\theta = b \end{cases} \iff \begin{cases} e^{2i\theta} - 2ae^{i\theta} = -1 \\ e^{2i\theta} - 2ibe^{i\theta} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} e^{2i\theta} = (a+ib)/(a-ib) \\ e^{i\theta} = 1/(a-ib). \end{cases}$

Ces deux dernières équations sont compatibles puisque $(a - ib)(a + ib) = 1$; elles déterminent la classe de congruence de θ modulo 2π compte tenu des propriétés de l'exponentielle complexe.

On en déduit que $SO_2(\mathbf{C})$ est l'image de $\mathbf{C}$ par l'application $\theta \longmapsto M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, ce qui prouve la connexité par arcs de $SO_2(\mathbf{C})$ et donc la surjectivité de u (question **V-1a** ou directement en constatant que $M(\theta/2)^2 = M(\theta)$ comme dans le cas réel).

On a $B^{\Gamma_2} = SO_2(\mathbf{R})$ qui est invariant par l'application carré pour la même raison que $SO_2(\mathbf{C})$, donc $u(B^{\Gamma_2}) = C^{\Gamma_2}$. Il en résulte que $0 = [f_0]$ est l'unique antécédant de 0 par $\tilde{\imath}$ (question **IV-5c**) et donc que $\tilde{\imath}([f_1]) \neq 0$. Alors, d'après **IV-5b)** et **V-1b)**, $\mathcal{H}(\Gamma_2, SO_2(\mathbf{C})) = \operatorname{Ker}\tilde{u} = \operatorname{Im}\tilde{\imath}$ est de cardinal 2 puisque $\tilde{\imath}([f_0]) \neq \tilde{\imath}([f_1])$.

3) Décryptons l'énoncé :

L'action de Γ sur G est triviale, donc les cocycles de Γ dans G sont les morphismes de groupes de Γ dans G. Deux morphismes f, f' sont équivalents au sens de **IV-1)** si et seulement s'il existe $a \in G$ tel que $f' = \varphi_a \circ f$ où φ_a est le morphisme de conjugaison par a dans G : $x \longmapsto axa^{-1}$. De même pour H.

Déterminons d'abord $\mathcal{H}(\Gamma, G)$. En raisonnant sur l'image de 1 mod 3 qui engendre $\Gamma = \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$, on constate qu'il y a exactement trois morphismes de Γ dans G :

$$f_0 : n \bmod 3 \longmapsto 0 \bmod 3, \qquad f_1 : n \bmod 3 \longmapsto n \bmod 3, \qquad f_2 : n \bmod 3 \longmapsto 2n \bmod 3.$$

Ces morphismes sont deux à deux non équivalents au sens de la conjugaison dans G car ils sont distincts et G est commutatif.

L'application $i : n \bmod 3 \longmapsto \sigma^n$ est bien définie car σ est d'ordre 3 et c'est clairement un morphisme de groupes de G dans H. C'est aussi un Γ-morphisme puisque les actions de Γ sur G et H sont triviales. Les cocycles ${}^i f_0, {}^i f_1, {}^i f_2$ sont les applications :

$${}^i f_0 : n \bmod 3 \longmapsto \mathrm{id}_{\{1,2,3\}}, \qquad {}^i f_1 : n \bmod 3 \longmapsto \sigma^n, \qquad {}^i f_2 : n \bmod 3 \longmapsto \sigma^{2n}.$$

Si $\tau \in H$ est une permutation quelconque alors les cocycles déduits de ${}^i f_0, {}^i f_1, {}^i f_2$ par conjugaison par τ sont les applications :

$$\varphi_\tau \circ {}^i f_0 : n \bmod 3 \longmapsto \mathrm{id}_{\{1,2,3\}}, \quad \varphi_\tau \circ {}^i f_1 : n \bmod 3 \longmapsto \tau\sigma^n\tau^{-1} = (\tau\sigma\tau^{-1})^n, \quad \varphi_\tau \circ {}^i f_2 : n \bmod 3 \longmapsto (\tau\sigma^2\tau^{-1})^n.$$

Comme $\tau\sigma\tau^{-1}$ et $\tau\sigma^2\tau^{-1}$ sont des 3-cycles, on n'a jamais $\varphi_\tau \circ {}^i f_1 = {}^i f_0$ ni $\varphi_\tau \circ {}^i f_2 = {}^i f_0$. Par contre, en prenant pour τ la transposition $(1, 2)$, on a $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^2$ donc $\varphi_\tau \circ {}^i f_1 = {}^i f_2$. Ainsi, $0 = [{}^i f_0] \neq [{}^i f_1] = [{}^i f_2]$, ce qui prouve que $\tilde{\imath}$ n'est pas injective bien que son noyau soit nul.

Fin du problème