

EXERCICE 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé et $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$, l'espace vectoriel réel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à $2n$; il est muni du produit scalaire défini par :

$$\forall (P, Q) \in E^2, \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$$

(on ne demande pas de vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire).

Soit $\Delta : E \longrightarrow E$ défini par :

$$\forall P \in E, \Delta(P) = (X^2 - 1)P'' + 2XP'$$

où l'on note respectivement P' ou $P'(X)$, ainsi que P'' ou $P''(X)$ les dérivées premières et deuxièmes de $P = P(X)$.

1. (a) Soit $F = \{P \in E / P(X) = P(-X)\}$ et $G = \{P \in E / P(X) = -P(-X)\}$.

Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires et orthogonaux. Préciser la dimension de F et de G .

Correction : F est l'ensemble des polynômes pairs de degré inférieur ou égal à $2n$ on peut donc écrire

$$F = \text{vect} (1, X^2, \dots, X^{2k}, \dots, X^{2n})$$

de même

$$G = \text{vect} (X, \dots, X^{2k+1}, \dots, X^{2n-1})$$

On en déduit que ce sont deux sous espaces vectoriels de E . De plus on a

$$\dim(F) = n + 1 \text{ et } \dim(G) = n$$

Soit $P \in F \cap G$, on a alors $P(X) = P(-X) = -P(-X)$ d'où $P = 0$ donc $F \cap G = \{0\}$.

On sait de plus que $\dim(E) = 2n + 1$, donc les sous espaces F et G sont supplémentaires.

Soit $(k, k') \in [[0, n]] \times [[1, n]]$, on a

$$\langle X^{2k}, X^{2k'-1} \rangle = \int_{-1}^1 t^{2k} t^{2k'-1} dt = \left[\frac{1}{2(k+k')} t^{2(k+k')} \right]_{-1}^1 = 0$$

On en déduit que F et G sont orthogonaux

- (b) Vérifier que Δ est un endomorphisme de l'espace vectoriel réel E .

Correction : La dérivation des polynômes est une application linéaire donc Δ est une application linéaire. Soit $P \in E$ on a

$$\deg(\Delta(P)) = \deg((X^2 - 1)P'' + 2XP')$$

$$\Rightarrow \deg(\Delta(P)) \leq \inf(\deg((X^2 - 1)P''), \deg(2XP')) \leq \deg(P)$$

Donc $\Delta(P)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $2n$ donc $\Delta(P) \in E$.

Conclusion : Δ est un endomorphisme de E

- (c) En considérant la matrice de Δ relativement à la base canonique $(1, X, \dots, X^{2n})$, déterminer les valeurs propres de Δ . Préciser si Δ est diagonalisable, et la dimension des sous-espaces propres.

Correction : On a

$$\Delta(1) = 0 \text{ et } \Delta(X) = 2$$

Soit $k \in [[2, 2n]]$,

$$\Delta(X^k) = (X^2 - 1)k(k-1)X^{k-2} + 2X.kX^{k-1} = k(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2}$$

La matrice de Δ relative à la base canonique est donc

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & 6 & \ddots & -k(k-1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & k(k+1) & & -2n(2n-1) \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 2n(2n+1) \end{pmatrix}$$

La matrice est triangulaire supérieure, les valeurs propres sont alors les éléments de la diagonale. On a donc

$$Sp(\Delta) = \{k(k+1) \mid k \in [[0, 2n]]\}$$

Les valeurs propres sont 2 à 2 distinctes (la fonction $k \rightarrow k(k+1)$ est strictement croissante sur \mathbb{N}) on en déduit que Δ est diagonalisable et que les sous espaces propres sont tous de dimension 1.

(d) Soit $k \in [[0, 2n]]$, et on pose $\lambda_k = k(k+1)$.

Justifier l'existence d'un unique vecteur propre P_k de Δ associé à λ_k , tel que P_k soit de degré k et admette 1 comme coefficient de X^k ?

Correction : d'après le calcul précédent on a $\deg(\Delta(P)) = \deg(P)$ pour $\deg(P) > 0$ et $\Delta(1) = 0$. De plus si a est le coefficient dominant de P alors le coefficient dominant de $\Delta(P)$ est $k(k+1)a$. Les polynômes associés à la valeur propre de λ_k sont donc de degré k . Or l'espace propre associé à λ_k est de dimension 1 il existe donc un unique polynôme unitaire qui engendre ce sous espace. On note P_k ce polynôme il est, d'après ce qui précède, de degré k et de coefficient dominant 1.

(e) Montrer que pour tous P et Q dans E , on a : $\langle \Delta(P), Q \rangle = \langle P, \Delta(Q) \rangle$.

En déduire que pour tout $(k, h) \in [[0, 2n]]^2$ tel que $k \neq h$, on a : $\langle P_k, P_h \rangle = 0$.

Que peut-on en déduire pour $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \dots, P_{2n})$?

Correction : Soit $(P, Q) \in E^2$, on a

$$\langle \Delta(P), Q \rangle = \int_{-1}^1 ((t^2 - 1)P''(t) + 2tP'(t))Q(t) dt$$

On peut remarquer que

$$\Delta(P) = ((X^2 - 1)P)'$$

On fait donc une intégration par parties

$$\begin{aligned} \langle \Delta(P), Q \rangle &= [(t^2 - 1)P'(t)Q(t)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (t^2 - 1)P'(t)Q'(t) dt \\ &= - \int_{-1}^1 (t^2 - 1)P'(t)Q'(t) dt \\ &= - [(t^2 - 1)Q'(t)P(t)]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 ((t^2 - 1)Q''(t) + 2tQ'(t))P(t) dt \\ &= \langle P, \Delta(Q) \rangle \end{aligned}$$

L'endomorphisme Δ est donc symétrique.

Δ est donc diagonalisable dans une base orthogonale.

Les polynômes P_k étant associés à des valeurs propres deux à deux distinctes ils forment une famille orthogonale et donc pour tout $(k, h) \in [[0, 2n]]^2$ tel que $k \neq h$, on a : $\langle P_k, P_h \rangle = 0$.

La famille $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \dots, P_{2n})$ est une base orthogonale.

- (f) Montrer que $(P_0, P_2, \dots, P_{2n})$ est une base de F et $(P_1, P_3, \dots, P_{2n-1})$ est une base de G .

Correction : d'après le calcul de la matrice à la question c) on a

$$\forall k \in [[0, n]] \quad \Delta(X^{2k}) \in F \text{ et } \forall k \in [[1, n]] \quad \Delta(X^{2k-1}) \in G$$

On en déduit que F et G sont des sous espaces stables par Δ . La restriction de Δ à l'un de ces sous espace est alors diagonalisable. Comme les sous espaces propres de Δ sont de dimension 1 on en déduit, à l'aide des degrés, que $\forall k \in [[0, n]] \quad P_{2k} \in F$ et $\forall k \in [[1, n]] \quad P_{2k-1} \in G$. De plus la famille $(P_0, P_2, \dots, P_{2n})$ est libre car orthogonale et $\dim(F) = n + 1$ donc $(P_0, P_2, \dots, P_{2n})$ est une base de F . De même $(P_1, P_3, \dots, P_{2n-1})$ est une base de G

2. On prend ici $n = 1$, et l'espace euclidien $E = \mathbb{R}_2[X]$, toujours muni du produit scalaire défini par :

$$\forall (P, Q) \in E^2, \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$$

- (a) Expliciter P_0, P_1, P_2 définis en 1. , et en déduire une base orthonormale de E formée de vecteurs propres pour Δ .

Correction : on a $\Delta(1) = 0$ donc $P_0 = 1$

$\Delta(X) = 2X$ donc $P_1 = X$.

On cherche maintenant un polynôme unitaire de degré 2 pair tel que $\Delta(P_2) = 6P_2$. Il est de la forme $P_2 = X^2 + \alpha$. On a

$$\Delta(X^2 + \alpha) = 6X^2 - 2 = 6(X^2 + \alpha)$$

d'où $P_2 = X^2 - \frac{1}{3}$.

La famille (P_0, P_1, P_2) est orthogonale, il suffit donc de la normaliser pour obtenir une base orthonormale de E .

On a

$$\begin{aligned} \|P_0\|^2 &= \int_{-1}^1 1dt = 2 \quad , \quad \|P_1\|^2 = \int_{-1}^1 t^2dt = \frac{2}{3} \\ \|P_2\|^2 &= \int_{-1}^1 \left(t^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dt = \frac{8}{45} \end{aligned}$$

D'où une base orthonormale de E est

$$\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}X, \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \left(X^2 - \frac{1}{3}\right) \right)$$

- (b) Soit $G = \{P \in E / P(X) = -P(-X)\}$. Calculer la distance euclidienne de $A = X + 1$ au sous-espace vectoriel G de E .

Correction : d'après la question 1f) on a $G = \text{vect}(P_1)$ c'est à dire $G = \text{vect}(X)$. De plus les polynômes X et 1 sont orthogonaux, la projection de A sur G est donc X

La distance de A à G est alors

$$d(A, G) = \|A - X\| = \|1\| = \left(\int_{-1}^1 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

- (c) Montrer que $C = \{h \in \mathcal{L}(E) / h \circ \Delta = \Delta \circ h\}$ est un espace vectoriel réel de dimension 3. On pourra utiliser la matrice de Δ et de $h \in C$ dans la base (P_0, P_1, P_2) .

Correction : l'application de $\mathcal{L}(E)$ dans lui-même qui à h associe $h \circ \Delta - \Delta \circ h$ est linéaire, donc C (qui est le noyau de cette application) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. Soit M la matrice de Δ dans la base (P_0, P_1, P_2) et H la matrice d'un endomorphisme h élément de C . On a

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

h est un élément de C si et seulement si $MH = HM$. En notant $H = (h_{ij})$ on obtient alors

$$MH = HM \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2h_{21} & 2h_{22} & 2h_{23} \\ 6h_{31} & 6h_{32} & 6h_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2h_{12} & 6h_{13} \\ 0 & 2h_{22} & 6h_{23} \\ 0 & 2h_{32} & 6h_{33} \end{pmatrix}$$

On en déduit que H est aussi une matrice diagonale. L'ensemble des matrices qui commutent avec M est donc engendré par (E_{11}, E_{22}, E_{33}) , il est donc de dimension 3.

Par isomorphisme on peut donc dire que C est un espace vectoriel de dimension 3.

- (d) Déterminer tous les endomorphismes g de E tels que $g \circ g = \Delta$. On les donnera par leur matrice dans la base (P_0, P_1, P_2) .

Correction : un endomorphisme g tel que $g \circ g = \Delta$ vérifie $g \circ \Delta = g^3 = \Delta \circ g$, c'est donc un élément de C . Sa matrice dans la base (P_0, P_1, P_2) est diagonale, d'après la question

précédente. On cherche donc les matrices B diagonales telles que $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. On

alors 4 solutions $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \pm\sqrt{6} \end{pmatrix}$

EXERCICE 2

On rappelle les deux formules usuelles de trigonométrie, pour $t \in \mathbb{R}$:

$$\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1 = 1 - 2\sin^2(t) \quad \sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t).$$

1. On considère l'espace vectoriel réel usuel \mathbb{R}^2 muni de son produit scalaire canonique tel que la base canonique \mathcal{B} soit orthonormale.

(a) Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par : $h(t) = (\cos^2(t), \cos(t)\sin(t))$.

- i. Représenter la courbe C_1 d'équation dans \mathcal{B} :

$$(2x - 1)^2 + (2y)^2 = 1$$

et préciser la nature de cette courbe.

Correction : on a

$$(2x - 1)^2 + (2y)^2 = 1 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

c'est l'équation du cercle de centre le point de coordonnées $(\frac{1}{2}, 0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

ii. Comparer C_1 avec la courbe paramétrée par h , c'est-à-dire :

$$\{(\cos^2(t), \cos(t) \sin(t)), t \in \mathbb{R}\}.$$

Correction : on a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$(2 \cos^2(t) - 1)^2 + (2 \sin(t) \cos(t))^2 = (\cos(2t))^2 + (\sin(2t))^2 = 1$$

On en déduit que la courbe paramétrée par h est incluse dans C_1 .

Réciproque : soit M un point de coordonnées (x, y) appartenant à C_1 , on a

$$(2x - 1)^2 + (2y)^2 = 1 \Leftrightarrow \theta \in \mathbb{R} \quad / \quad 2x - 1 = \cos(\theta) \quad \text{et} \quad 2y = \sin(\theta)$$

on pose $t = \frac{\theta}{2}$, on a alors $2x - 1 = \cos(2t)$ et $2y = \sin(2t)$, d'où

$$x = \cos^2(t) \quad \text{et} \quad y = \cos(t) \sin(t)$$

Tout point du cercle C^1 est aussi un point de la courbe paramétrée par h .

Conclusion : C_1 est le support de la courbe paramétrée par h

(b) Soit $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec $f_2(t) = (\cos^2(t), \sin(t))$.

Étudier et représenter la courbe C_2 paramétrée par f_2 , c'est-à-dire :

$$C_2 = \{(\cos^2(t), \sin(t)), t \in \mathbb{R}\}.$$

Pour cela, on commencera par comparer C_2 avec la courbe d'équation dans \mathcal{B} :

$$x + y^2 = 1, \quad \text{avec} \quad -1 \leq y \leq 1,$$

et préciser la nature de cette courbe.

Correction : soit $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\cos^2(t) + (\sin(t))^2 = 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \sin(t) \leq 1$$

donc la courbe C_2 est incluse dans la courbe définie par $x + y^2 = 1$, avec $-1 \leq y \leq 1$.

Réciproquement : soit un point de coordonnées (x, y) tel que $x + y^2 = 1$, avec $-1 \leq y \leq 1$.

Comme $y \in [-1, 1]$ il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $y = \sin(t)$. On a alors $x = 1 - y^2 = \cos^2(t)$. La courbe C_2 est donc définie par $x + y^2 = 1$, avec $-1 \leq y \leq 1$.

C'est une portion de parabole.

Étude de la courbe paramétrée : f_2 est 2π périodique. On a de plus

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f_2(-t) = (\cos^2(t), -\sin(t))$$

la courbe admet l'axe des abscisses comme axe de symétrie.

On peut donc restreindre l'étude à $[0, \pi]$, cependant on peut remarquer que

$$\forall t \in [0, \pi] \quad f_2(\pi - t) = f_2(t)$$

La courbe définie pour $t \in [0, \pi]$ est donc parcourue 2 fois on peut donc restreindre l'étude à $[0, \frac{\pi}{2}]$ avant la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

La fonction f_2 est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et on a

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad f_2'(t) = (-2 \sin(t) \cos(t), \cos(t))$$

d'où le tableau de variation :

| | | |
|-----------|---|-----------------|
| t | 0 | $\frac{\pi}{2}$ |
| $x_2'(t)$ | 0 | 0 |
| $x_2(t)$ | 1 | 0 |
| $y_2(t)$ | 0 | 1 |
| $y_2'(t)$ | + | 0 |

(c) Soit $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec $f_3(t) = (\cos(t) \sin(t), \sin(t))$.

Étudier et représenter la courbe C_3 paramétrée par f_3 , c'est-à-dire :

$$C_3 = \{(\cos(t) \sin(t), \sin(t)), t \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que C_3 est la courbe d'équation dans $\mathcal{B} : (2x)^2 + (1 - 2y^2)^2 = 1$.

Correction : la fonction f_3 est 2π périodique. On a

$$\forall t \in [-\pi, \pi] \quad f_3(t) = -f_3(t)$$

la courbe admet donc O comme centre de symétrie. On peut restreindre l'étude à $[0, \pi]$

De plus

$$\forall t \in [0, \pi] \quad f_3(\pi - t) = (-\cos(t) \sin(t), \sin(t))$$

la courbe admet donc l'axe des ordonnées comme axe de symétrie. On peut donc restreindre l'étude à $[0, \frac{\pi}{2}]$. Avec $f(t) = (\frac{1}{2} \sin(2t), \sin(t))$ on a

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad f_3'(t) = (\cos(2t), \cos(t))$$

d'où le tableau de variations

| | | | |
|-----------|---|----------------------|-----------------|
| t | 0 | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| $x_3'(t)$ | + | 0 | - |
| $x_3(t)$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $y_3(t)$ | 0 | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 |
| $y_3'(t)$ | + | + | |

$\forall t \in \mathbb{R}, (2x_3(t))^2 + (1 - 2y_3(t)^2)^2 = \sin^2(2t) + (1 - 2\sin^2(t))^2 = \sin^2(2t) + \cos^2(2t) = 1$. La courbe C_3 est bien incluse dans la courbe définie par $(2x)^2 + (1 - 2y^2)^2 = 1$.

Soit un point de coordonnées (x, y) appartenant à cette courbe,

$$\exists \theta \in \mathbb{R} \quad / \quad 2x = \sin(\theta) \text{ et } 1 - 2y^2 = \cos(\theta)$$

On pose $t = \frac{1}{2}\theta$ et on obtient $x = \cos(t) \sin(t)$ et $y^2 = \sin^2(t)$.

Si $y = \sin(t)$ alors on obtient bien un point de C_3 . Si $y = -\sin(t)$ on a $y = \sin(t + \pi)$ et $x = \cos(t) \sin(t) = \cos(t + \pi) \sin(t + \pi)$. c'est encore un point de C_3 . Donc C_3 est bien la courbe définie par l'équation $(2x)^2 + (1 - 2y^2)^2 = 1$

2. On considère l'espace vectoriel réel usuel \mathbb{R}^3 orienté, muni de son produit scalaire canonique tel que la base canonique \mathcal{C} soit orthonormale directe.

- (a) Soit $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 - x + y^2 = 0\}$ et $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Préciser la nature des deux surfaces S_1 et S_2 .

Correction : S_1 est le cylindre d'axe parallèle à Oz et de directrice le cercle C_1 , et S_2 est la sphère de centre O et de rayon 1.

- (b) Soit $\Gamma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} x = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \right\}$.

Que représente Γ vis-à-vis de S_1 et S_2 ?

Correction : Γ est l'intersection des deux surfaces S_1 et S_2

- (c) Déterminer l'équation dans \mathcal{C} du plan tangent en tout point régulier $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de S_1 . De même déterminer l'équation dans \mathcal{C} du plan tangent en tout point régulier $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de S_2 .

En déduire la tangente en tout point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ régulier de Γ .

Correction : en un point régulier $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ une équation du plan tangent à la surface d'équation $f(x, y, z) = 0$ est

$$\left(\text{grad}(f)(x_0, y_0, z_0) \mid \overrightarrow{M_0 M} \right) = 0$$

ou encore

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

On trouve donc : pour S_1

$$(2x_0 - 1) \cdot (x - x_0) + 2y_0 \cdot (y - y_0) = 0$$

et donc, avec $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S_1$

$$(2x_0 - 1) \cdot x + 2y_0 \cdot y + 2x_0 = 0$$

Pour S_2

$$2x_0 \cdot (x - x_0) + 2y_0 \cdot (y - y_0) + 2z_0 \cdot (z - z_0) = 0$$

et donc, avec $M_0 \in S_2$

$$x_0 \cdot x + y_0 \cdot y + z_0 \cdot z = 1$$

Lorsque les plans tangents aux surfaces ne sont pas confondus, la tangente au point d'intersection des deux surface est alors l'intersection des deux plans tangents.

- (d) Déterminer un paramétrage de Γ , en utilisant les coordonnées cylindriques : c'est-à-dire que l'on exprimera pour $M = (x, y, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$ les conditions sur r, θ, z pour que M soit sur Γ .

En déduire une représentation paramétrique du cône de sommet $S = (\frac{1}{2}, 0, 0)$, engendré par les droites passant par S et un point variable sur Γ .

Correction : Soit M un point de coordonnées $(x, y, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$. On a

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow r \cos(\theta) = r^2 \text{ et } r^2 + z^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (r = 0 \text{ ou } r = \cos(\theta)) \text{ et } z^2 = 1 - r^2 = 1 - \cos^2(\theta) = \sin^2(\theta).$$

On obtient alors $r = \cos(\theta)$ et $z = \sin(\theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, ou $r = \cos(\theta)$ et $z = -\sin(\theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Ces deux paramétrages donnent la même courbe.

On obtient alors pour paramétrage de Γ : $x = \cos^2(\theta), y = \cos(\theta) \sin(\theta), z = \sin(\theta), \theta \in \mathbb{R}$.

Soit C le cône de sommet $S = (\frac{1}{2}, 0, 0)$ s'appuyant sur Γ on a .

$$M \in C \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \exists M_0 \in \Gamma \quad \overrightarrow{SM} = \lambda \overrightarrow{SM_0}$$

$$\Leftrightarrow \exists (\lambda, \theta) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \lambda \left(\cos^2(\theta) - \frac{1}{2} \right) \\ y = \lambda \cos(\theta) \sin(\theta) \\ z = \lambda \sin(\theta) \end{cases}$$

(e) Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose : $F(t) = (\cos^2(t), \cos(t) \sin(t), \sin(t))$. Soit $\gamma = \{F(t), t \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $\gamma \subset \Gamma$. Y-a-t-il égalité $\gamma = \Gamma$?

Correction : soit $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\cos(t)^4 + \sin(t)^2 \cos(t)^2 = \cos(t)^2 \quad \text{et} \quad \cos(t)^4 + \sin(t)^2 \cos(t)^2 + \sin(t)^2 = \cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1$$

donc $\gamma \subset \Gamma$. La réciproque a été étudiée dans la question *d*) donc $\gamma = \Gamma$

(f) Préciser comment on obtient les trois courbes planes qui sont les projections orthogonales de Γ sur les plans xOy , xOz et yOz , en faisant le lien avec les courbes étudiées dans la première question.

Correction : Les trois courbes planes projections orthogonales de Γ sur les plans xOy , xOz et yOz sont obtenues en annulant une coordonnée.

Sur xOy : $z = 0, x = \cos^2(t), y = \cos(t) \sin(t), t \in \mathbb{R}$: courbe C_1 ;

sur xOz : $y = 0, x = \cos^2(t), z = \sin(t), t \in \mathbb{R}$: analogue à la courbe C_2 ;

sur yOz : $x = 0, y = \cos(t) \sin(t), z = \sin(t), t \in \mathbb{R}$: analogue à la courbe C_3

EXERCICE 3

1. (a) Justifier l'existence des intégrales :

$$J = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x} dx ; K = \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx$$

Correction : la fonction $x \rightarrow \frac{\ln(x)}{1-x}$ est continue et de signe constant sur $]0, 1[$. On a

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{1-x} = -1$$

La fonction est donc prolongeable par continuité en 1 donc intégrable sur $[\frac{1}{2}, 1[$

On a au voisinage de 0

$$\frac{\ln(x)}{1-x} \sim \ln(x)$$

or la fonction \ln est intégrable sur $]0, \frac{1}{2}]$ donc la fonction $x \rightarrow \frac{\ln(x)}{1-x}$ aussi.

Conclusion : J existe.

La fonction $x \rightarrow 1-x$ est de classe C^1 , strictement décroissante sur $[0, 1]$; en effectuant le changement de variable associé dans l'intégrale impropre J , on obtient :

$$J = \int_1^0 \frac{\ln(1-x)}{1-(1-x)} (-1) dx = \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx = K$$

d'où l'existence de K et $K = J$

(b) Justifier l'existence et calculer $u_n = \int_0^1 x^n \ln(x) dx$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction : la fonction \ln est intégrable sur $]0, 1]$ d'où l'existence de u_0 . Soit $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction $x \rightarrow x^n \ln(x)$ admet une limite nulle en 0, elle est donc prolongeable par continuité en 0. Elle est donc intégrable sur $]0, 1]$ d'où l'existence de u_n .

On a

$$u_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \ln(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} ([x \ln(x) - x]_{\varepsilon}^1) = -1$$

pour $n > 0$

$$\begin{aligned} u_n &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 x^n \ln(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln(x) \right]_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{n+1} x^n dx \right) \\ &= -\frac{1}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

(c) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -périodique et telle que $f(x) = |x|$ si $x \in [-\pi, \pi]$.

Calculer les coefficients de Fourier de f .

En déduire la valeur de $S = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$, en précisant le résultat du cours utilisé.

Correction : la fonction f est 2π périodique et paire les coefficients b_n , pour $n \in \mathbb{N}^*$ sont donc tous nuls. On a de plus

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cdot \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{1}{n} x \sin(nx) \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1}{n} \sin(nx) dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{n^2} [\cos(nx)]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi \cdot n^2} ((-1)^n - 1) \end{aligned}$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_{2n} = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \quad a_{2n+1} = -\frac{4}{\pi(2n+1)^2}$$

La fonction f est continue et de classe C^1 par morceaux sur \mathbb{R} , sa série de Fourier converge normalement vers f sur \mathbb{R} . On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)^2} \cos((2n+1)x)$$

En particulier pour $x = 0$ et on obtient

$$0 = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)^2}$$

d'où

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

(d) Soit $T = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Justifier que $\frac{3}{4}T = S$, et grâce à (c) en déduire la valeur de T .

Correction : on a

$$T = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + S$$

D'où $\frac{3}{4}T = S$. On en déduit que $T = \frac{\pi^2}{6}$

- (e) En utilisant la série de terme général u_n , justifier l'égalité : $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x} dx = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, en précisant le résultat du cours utilisé. En déduire les valeurs des intégrales J et K de (a).

Correction : pour tout $x \in]0, 1[$ on a $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ (série entière de rayon de convergence 1). On a donc

$$\forall x \in]0, 1[\quad \frac{\ln(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \ln(x)$$

On pose $f_n(x) = x^n \ln(x)$ pour $x \in]0, 1[$. Les fonctions f_n sont continues et intégrables sur $]0, 1[$. La série $\sum f_n$ converge simplement vers la fonction $x \rightarrow \frac{\ln(x)}{1-x}$. De plus $\int_0^1 |x^n \ln(x)| dx = \frac{1}{(n+1)^2}$, la série de terme général $\int_0^1 |x^n \ln(x)| dx$ est donc convergente. On peut utiliser le théorème d'intégration terme à terme pour les intégrales généralisées et on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x} dx &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \ln(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^n \ln(x) dx = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

Donc $J = K = -\frac{\pi^2}{6}$

- (f) Justifier l'existence des intégrales suivantes : $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x} dx$; $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x^2} dx$ et les calculer grâce aux résultats précédents.

Correction : Au voisinage de 0 on a $\frac{\ln(x)}{1+x} \sim \ln(x)$ qui est intégrable, donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x} dx$ existe.

De même $\frac{\ln(x)}{1-x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln(x)$ et de plus $\frac{\ln(x)}{1-x^2} = \frac{\ln(x)}{(1+x)(1-x)} \underset{x \rightarrow 1}{\rightarrow} -\frac{1}{2}$ et donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x^2} dx$ existe.

Par développement en série entière de $x \rightarrow \frac{1}{1+x}$ on a, pour $x \in]0, 1[$, avec les notations de la question précédente

$$\frac{\ln(x)}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \ln(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f_n(x)$$

On a les mêmes hypothèses que la question précédente donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x} dx &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 x^n \ln(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)^2} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4}T - S \\ &= -\frac{\pi^2}{12} \end{aligned}$$

De même

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x^2} dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} \ln(x) dx = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = -\frac{\pi^2}{8}$$

2. (a) Calculer : $A = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$ et justifier l'existence de : $B = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 2^k}$.

Correction : la fonction $x \rightarrow -\ln(1-x)$ est développable en série entière sur $] -1, 1[$ et on a

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n$$

D'où l'existence et la valeur de la série demandée

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k} = -\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \ln(2)$$

On a pour tout $k > 0$ $0 < \frac{1}{k^2 2^k} \leq \frac{1}{k^2}$ or la série $\sum \frac{1}{k^2}$ est convergente donc la série $\sum \frac{1}{k^2 2^k}$ converge, donc B existe.

- (b) Justifier l'égalité : $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(x)}{1-x} dx = -(\ln(2))^2 - B$.

Correction : avec les notations de la question 1e) on a $\forall x \in]0, \frac{1}{2}]$ $\frac{\ln(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$. Les fonctions f_n sont continues et intégrables sur $]0, \frac{1}{2}]$ et on a

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f_n(x)| dx \leq \int_0^1 |f_n(x)| dx \leq \frac{1}{(n+1)^2}$$

donc la série $\sum \int_0^{\frac{1}{2}} |f_n(x)| dx$ est convergente. On peut donc utiliser le théorème d'intégration terme à terme. On a

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f_0(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \ln(x) dx = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}$$

et pour $n > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} f_n(x) dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} x^n \ln(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln(x) \right]_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} - \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{n+1} x^n dx \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \varepsilon^{n+1} \ln(\varepsilon) \right) - \frac{1}{(n+1)^2} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \varepsilon^{n+1} \right) \right) \\ &= \frac{1}{n+1} \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{(n+1)^2 2^{n+1}} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(x)}{1-x} dx &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{(n+1)^2 2^{n+1}} \right) \\ &= -\ln(2) A - B = -(\ln(2))^2 - B \end{aligned}$$

- (c) Calculer : $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-t)}{t} dt$ en fonction de B, et en déduire la valeur de B.

Correction : la fonction $t \rightarrow \ln(1-t)$ est développable en série entière sur $] -1, 1[$ et on a

$$\ln(1-t) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} t^{n+1}$$

d'où

$$\frac{\ln(1-t)}{t} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} t^n$$

Cette fonction admet une primitive et on a pour $x \in]-1, 1[$

$$\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1}$$

d'où

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-t)}{t} dt = -B$$

On a de plus, par changement de variables $u = 1 - t$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-t)}{t} dt &= \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(u)}{1-u} (-1) du = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(u)}{1-u} du \\ &= \int_0^1 \frac{\ln(u)}{1-u} du - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(u)}{1-u} du = -\frac{\pi^2}{6} + (\ln(2))^2 + B \end{aligned}$$

D'où

$$B = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} \ln^2(2)$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $a_n = h_n - \ln(n)$.

(a) Déterminer un développement limité à l'ordre 2 de $g(x) = x + \ln(1-x)$ quand x tend vers 0. En déduire un équivalent simple de $a_{n+1} - a_n$ quand n tend vers $+\infty$.

Correction : on a au voisinage de 0, $\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$, d'où $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$.

On a pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= h_{n+1} - h_n - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

d'où, au voisinage de $+\infty$, $a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)$ et donc

$$a_{n+1} - a_n \sim -\frac{1}{2n^2}$$

(b) Déterminer la nature de la série de terme général $a_{n+1} - a_n$, et en déduire que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge dans \mathbb{R} .

On pourra noter $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ que l'on ne cherchera pas à calculer.

Correction : la série de terme général $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série convergente. on en déduit par comparaison de la série $\sum (a_{n+1} - a_n)$ converge. Or on a pour tout $N \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{n=1}^N (a_{n+1} - a_n) = a_{N+1} - a_1$$

on en déduit que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

- (c) Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{h_n}{n}$, ainsi que de terme général $(-1)^n \frac{h_n}{n}$.

Correction : on a $h_n = a_n + \ln(n)$ or la suite (a_n) converge et la suite $(\ln(n))$ diverge vers $+\infty$, on en déduit qu'au voisinage de $+\infty$ $h_n \sim \frac{\ln(n)}{n}$. Or pour tout entier $n \geq 3$ $\ln(n) \geq 1$ et donc $\frac{\ln(n)}{n} \geq \frac{1}{n}$. La série $\sum \frac{1}{n}$ étant divergente on en déduit que la série $\sum \frac{\ln(n)}{n}$ et par suite la série $\sum h_n$ est divergente.

La série $\sum (-1)^n h_n$ est une série alternée. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{h_n}{n} = 0$ car (a_n) est bornée et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0.$$

On a de plus

$$\begin{aligned} \frac{h_{n+1}}{n+1} - \frac{h_n}{n} &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{(n+1)^2} \\ &= \frac{-1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \frac{-1}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)^2} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \frac{-1}{n(n+1)} < 0. \end{aligned}$$

D'où, d'après le critère spécial des séries alternées la série $\sum (-1)^n h_n$ converge.

4. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de $v_n = \int_0^1 x^n \ln(1-x) dx$, et montrer que :

$$v_n = -\frac{h_{n+1}}{n+1}.$$

Correction : La fonction $x \mapsto x^n \ln(1-x)$ est continue sur $[0, 1[$, de signe constant.

Au voisinage de 1 on a $x^n \ln(1-x) \sim \ln(1-x)$, or cette fonction est intégrable sur $[0, 1[$ donc la fonction est intégrable sur $[0, 1[$, c'est à dire v_n existe, pour tout n .

On a

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^n \ln(1-x) dx &= \lim_{u \rightarrow 1} \int_0^u x^n \ln(1-x) dx \\ &= \lim_{u \rightarrow 1} \left(\left[\frac{x^{n+1} - 1}{n+1} \ln(1-x) \right]_0^u - \int_0^u \frac{1 - x^{n+1}}{(n+1)(1-x)} dx \right) \\ &= \lim_{u \rightarrow 1} \left(\left[\frac{x^{n+1} - 1}{n+1} \ln(1-x) \right]_0^u - \frac{1}{n+1} \int_0^u \sum_{k=0}^n x^k dx \right) \\ &= \frac{-1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} = -\frac{h_{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

- (b) Montrer l'égalité des trois réels U, V et W, avec

$$U = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{h_n}{n}, \quad V = -\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{1+t} dt, \quad W = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 2^n}.$$

Correction : La fonction $t \mapsto -\frac{\ln(1-t)}{1+t}$ est continue sur $[0, 1[$, de signe constant

Au voisinage de 1, $-\frac{\ln(1-t)}{1+t} \sim -\frac{1}{2} \ln(1-t)$, donc la fonction est intégrable sur $[0, 1[$.

On a : $\forall t \in [0, 1[$, $-\frac{\ln(1-t)}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} t^n \ln(1-t)$.

La série de terme général $\int_0^1 |t^n \ln(1-t)| dt$ est divergente (c'est la série de $\sum \frac{h_n}{n}$), on ne peut pas utiliser le théorème d'intégration terme à terme. On procède par majoration du reste :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 -\frac{\ln(1-t)}{1+t} dt &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} t^n \ln(1-t) dt \\
&= \sum_{n=0}^p \int_0^1 (-1)^{n-1} t^n \ln(1-t) dt + \int_0^1 \sum_{n=p+1}^{\infty} (-1)^{n-1} t^n \ln(1-t) dt \\
&= \sum_{n=0}^p (-1)^n \frac{h_{n+1}}{n+1} + \int_0^1 \sum_{n=p+1}^{\infty} (-1)^{n-1} t^n \ln(1-t) dt
\end{aligned}$$

où

$$\left| \int_0^1 \sum_{n=p+1}^{\infty} (-1)^{n-1} t^n \ln(1-t) dt \right| \leq \int_0^1 \left| \sum_{n=p+1}^{\infty} (-1)^{n-1} t^n \ln(1-t) \right| dt \leq \int_0^1 t^{p+1} |\ln(1-t)| dt = \frac{h_{p+2}}{p+2}.$$

Or la suite $\left(\frac{h_n}{n}\right)$ converge vers 0 Donc :

$$\int_0^1 -\frac{\ln(1-t)}{1+t} dt = \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^p (-1)^n \frac{h_{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{h_n}{n}$$

D'où $U = V$.

On a

$$\begin{aligned}
V &= -\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{1+t} dt \stackrel{u=1-t}{=} -\int_0^1 \frac{\ln(u)}{2-u} du \stackrel{u=2v}{=} -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(2v)}{2-2v} 2dv \\
&= -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(v)}{1-v} dv - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(2)}{1-v} dv = -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(v)}{1-v} dv - (\ln(2))^2
\end{aligned}$$

Avec la question 2b on obtient $V = W$