Corrigé math 2 CCP 2012 (SAADAOUI CPGE IBN TAYMIA)

Exercice 1 :

1. D'après Fermat , on a $3^{10} \equiv 1 \mod (11)$, donc p divise 10 par suite $p \in \{1, 2, 5, 10\}$
   D'autre part , on a $3^2 = 9 \equiv -2 \mod (11)$ donc $3^5 = 3^4 \times 3 \equiv 4 \times 3 \equiv 1 \mod (11)$, donc $p = 5$.
2. On a $5^2 \equiv 3 \mod (11)$ et $3^{2012} = 3^2 \times 3^{2010} \equiv 3^2 \mod (11)$, donc $3^{n+2012} - 9 \times 5^{2n} \equiv 0 \mod (11)$

Problème

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(M, N) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$, on a ,
   $\varphi_A(\lambda M + N) = A(\lambda M + N) - (\lambda M + N)A = \lambda(AM - MA) + AN - NA = \lambda\varphi_A(M) + \varphi_A(N)$, donc φ_A est linéaire . On a $\varphi_A(I_2) = 0 = \varphi_A(A) = 0$, donc I_2 et A sont des éléments de $Ker(\varphi_A)$.
2. On a $\varphi_A(E_{11}) = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix} = -bE_{12} + cE_{21}$, de même $\varphi_A(E_{22}) = bE_{12} - cE_{21}$

   $\varphi_A(E_{12}) = -cE_{11} + cE_{22} + (a-d)E_{12}$,$\varphi_A(E_{21}) = bE_{11} - bE_{22} + (d-a)E_{21}$

   $$mat_{\mathcal{B}}(\varphi_A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -c & b \\ 0 & 0 & c & -b \\ -b & b & a-d & 0 \\ c & -c & 0 & d-a \end{pmatrix}$$

3. A n'est pas scalaire , donc (I_2, A) est une famille libre de $Ker(\varphi_A)$ par suite 0 est une racine au moins double de χ_{φ_A} .

   On a $\chi_{\varphi_A} = \begin{vmatrix} -X & 0 & -c & b \\ 0 & -X & c & -b \\ -b & b & a-d-X & 0 \\ c & -c & 0 & d-a-X \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2}{=} \begin{vmatrix} -X & 0 & -c & b \\ -X & -X & c & -b \\ 0 & b & a-d-X & 0 \\ 0 & -c & 0 & d-a-X \end{vmatrix}$

   (a) $$= -X \begin{vmatrix} 1 & 0 & -c & b \\ 1 & -X & c & -b \\ 0 & b & a-d-X & 0 \\ 0 & -c & 0 & d-a-X \end{vmatrix} \underset{\substack{C_4 \leftarrow C_4 + cC_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - bC_1}}{=} -X \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -X & 2c & -2b \\ 0 & b & a-d-X & 0 \\ 0 & -c & 0 & d-a-X \end{vmatrix}$$

   $$= -X \begin{vmatrix} -X & 2c & -2b \\ b & a-d-X & 0 \\ -c & 0 & d-a-X \end{vmatrix} = -X\left(-X^3 + (d^2 + a^2 - 2ad + 4bc)X\right)$$

   Donc $\chi_{\varphi_A} = X^2\left[X^2 - \left((d-a)^2 + 4bc\right)\right] = X^2\left(X - \sqrt{(d-a)^2 + 4bc}\right)\left(X + \sqrt{(d-a)^2 + 4bc}\right)$.

   •Si $(d-a)^2 + 4bc = 0$, alors $\chi_{\varphi_A} = X^4$ et $\varphi_A \neq 0$, donc φ_A n'est pas diagonalisable

   •Si $(d-a)^2 + 4bc > 0$, alors $\lambda_1 = \sqrt{(d-a)^2 + 4bc}$ et $\lambda_2 = -\sqrt{(d-a)^2 + 4bc}$ sont des valeurs propres simples et 0 est une valeur propre double et $\dim(E_0(\varphi_A)) = 2$, donc

4. $\chi_{_A} = X^2 - (a+d)X + (ad-bc) = \left(X - \dfrac{a+d}{2}\right)^2 - \dfrac{(a-d)^2 + 4bc}{4} =$

$$\left(X - \frac{a+d}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2}\right)^2 = \left(X - \frac{a+d-\lambda_1}{2}\right)\left(X - \frac{a+d+\lambda_1}{2}\right)$$

•Si $(d-a)^2 + 4bc = 0$,alors A admet une seule valeur propre et comme A est non scalaire , donc non diagonalisable .

•Si $(d-a)^2 + 4bc > 0$, alors A admet deux valeurs propres distinctes et par suite diagonalisable
D'où l'équivalence entre A diagonalisable et φ_A diagonalisable .

Partie II

(a) On a $D = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k E_{kk}$, donc $DE_{ij} - E_{ij}D = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k E_{kk} E_{ij} - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k E_{ij} E_{kk} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \delta_{ki} E_{kj} - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \delta_{jk} E_{ik}$

Donc $DE_{ij} - E_{ij}D = (\lambda_i - \lambda_j) E_{ij}$.

(b) On a $P^{-1}AP = D$, donc $AP = PD$ et $P^{-1}A = PD^{-1}$. Par suite

$$\varphi_A(B_{ij}) = PDE_{ij}P^{-1} - PE_{ij}DP^{-1} = P(DE_{ij} - E_{ij}D)P^{-1} = (\lambda_i - \lambda_j) PE_{ij}P^{-1} = (\lambda_i - \lambda_j) B_{ij}$$

La matrice B_{ij} est non nul , donc c'est bien un vecteur propre de φ_A .

(c) L'application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,$M \mapsto PMP^{-1}$ est un automorphisme et $(E_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc $(B_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée de vecteurs prores de φ_A , donc φ_A est diagonalisable .

(a) i. $mat_{\mathcal{B}}(\varphi_A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc $\chi_{\varphi_A} \in \mathbb{R}[X]$ et comme φ_A est diagonalisable , donc χ_{φ_A} est scindé sur $\mathbb{R}$, donc les valeurs propres de φ_A sont toutes réelles .

ii. On a $\chi_A = \det(A - XI_n) = \det\ {}^t(A - XI_n) = \det\ ({}^tA - XI_n) = \chi_{{}^tA}$.

iii. On a $\varphi_A(X\ {}^tY) = A(X\ {}^tY) - (X\ {}^tY)A = (AX)\ {}^tY - X\ {}^t(A\ {}^tY) = zX\ {}^tY - \overline{z}X\ {}^tY = (z - \overline{z})X\ {}^tY$.

Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$,on a $X \neq 0$ et $Y \neq 0$, donc il $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ tels que
$x_i \neq 0$ et $y_j \neq 0$, donc $X\ {}^tY = (\alpha_{kl})_{1 \le k,l \le n}$, on a $\alpha_{ij} = x_i y_j \neq 0$, donc $X\ {}^tY \neq 0$.Ainsi $z - \overline{z}$ est une valeur propre de φ_A .

(b) $z - \overline{z}$ est une valeur propre de φ_A , donc $z - \overline{z} \in \mathbb{R}$ (d'après la question $\mathbf{7}^\circ)(ii)$) , or $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$, donc $\mathrm{Im}(z) = 0$, c'est-à-dire que z est réelle .

(c) D'après la question précedente , il suffit , de montrer qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que z et $\overline{z}$ soient des valeurs On a propres de A et ${}^tA$.
$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc admet au moins une valeur propre z dans $\mathbb{C}$ .z étant une racine de χ_A qui est à coefficient dans $\mathbb{R}$, donc $\overline{z}$ est aussi racine de χ_A , par suite $\overline{z}$ est aussi valeur propre de ${}^tA$.
D'après la question précedente , z est réelle .

(d) On a $\varphi_A(P_{ij}) = \lambda_{ij}P_{ij}$, donc $AP_{ij} - P_{ij}A = \lambda_{ij}P_{ij}$ par suite $AP_{ij}X = P_{ij}AX + \lambda_{ij}P_{ij}X = (\lambda + \lambda_{ij})P_{ij}X$
On pose $\mu_{ij} = \lambda + \lambda_{ij}$, on a $AP_{ij}X = \mu_{ij}P_{ij}X$.

On veut montrer qu'il existe une base formée de vecteurs propres de A, il suffit alors de montrer que la famille $\{P_{ij}X \ /1 \leq i, j \leq n\}$ est génératrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $M \mapsto MX$, X étant non nul , supposons pour simplifier que $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. avec $x_i \neq 0$, on a

$$\Phi(E_{1i}) = E_{1i}X = \begin{pmatrix} x_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \Phi(E_{2i}) = E_{11}X = \begin{pmatrix} 0 \\ x_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \Phi(E_{n1}) = E_{ni}X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ x_i \end{pmatrix}$$

Donc $\operatorname{Im}\Phi$ contient $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ (base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) , donc Φ est surjective

$\{P_{ij}X \ /1 \leq i, j \leq n\}$ est l'image par Φ de la base $(P_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et Φ est surjective , donc $\{P_{ij}X \ /1 \leq i, j \leq n\}$ est génératrice . On peut alors en extraire une base formée de vecteurs propres de A , donc A est diagonalisable .

Partie III

5. Soit $(a_0, a_1, ..., a_{m-1}) \in \mathbb{R}^m$ tels que $a_0 I_n + a_1 A + ... + a_{m-1}A^{m-1} = 0$. Posons $P = \sum_{i=0}^{m-1} a_i X^i$

   On a $P(A) = 0$, donc π_A divise P , or $\deg(P) \leq m-1 < \deg(\pi_A)$, donc $P = 0$, ce qui donne que $a_0 = ... = a_{m-1} = 0$.

6. Si $M \in \mathbb{R}[A]$, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $M = P(A)$, on a $\varphi_A(M) = AM - MA = AP(A) - P(A)A = 0$

   Donc $\mathbb{R}[A]$ est inclu dans $Ker(\varphi_A)$ en particulier $\{I_n, A, ..., A^{m-1}\} \subset Ker(\varphi_A)$

   $\{I_n, A, ..., A^{m-1}\}$ étant libre , donc $\dim Ker(\varphi_A) \geq m$.

   (a) $\dim E = n$, il suffit alors de montrer que la famille est libre . Soit $(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $a_n e_1 + a_{n-1}e_2 + ... + a_1 e_n = 0$, alors $a_1 y + a_2 u(y) + ... + a_n u^{n-1}(y) = 0$
   Supposons qu'il existe i tel que $a_i \neq 0$, soit k le plus petit tel que $a_k \neq 0$,on a alors $a_1 = ... = a_{k-1} = 0$ et $a_k \neq 0$, par suite $a_k u^{k-1}(y) + ... + a_n u^{n-1}(y) = 0$, en composant par u^{n-k} ,on a alors $a_k u^{n-1}(y) = 0$, ce qui donne que $a_k = 0$ absudre . Donc pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $a_i = 0$.

   (b) Posons $w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{n-i}$, On veut montrer que $w = v$ pour cela , il suffit de montrer qu'il coincident sur la base $(e_1, e_2, ..., e_n)$. w et v commutent avec u . On a et on a $w(y) = v(y)$ et $w(e_i) = w(u^{n-i}(y)) = u^{n-i}(w(y)) = u^{n-i}(v(y)) = v(u^{n-i}(y)) = v(e_i)$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$
   donc $w = v$.

   (c) Si $B \in Ker(\varphi_A)$, alors il existe $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $B = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A^{n-i}$ donc $Ker(\varphi_A) \subset Vect\{I_n, A, ..., A^{n-1}\}$. D'autre part $Vect\{I_n, A, ..., A^{n-1}\} \subset Ker(\varphi_A)$.
   Donc $Ker(\varphi_A) = Vect\{I_n, A, ..., A^{n-1}\}$.

(a) Supposons que $B \in Ker(\varphi_A)$ alors $AB = BA$ par suite $uv = vu$, donc les sous-espaces propres de u sont stables par v .
Réciproquement : Supposons que les sous-espaces de u sont stables par v . u étant diagonalisable , donc $E = E_u(\lambda_1) \oplus E_u(\lambda_2) \oplus ... \oplus E_u(\lambda_p)$. Soit $x \in E$, $x = x_1 + x_2 + ... + x_p$ avec $x_i \in E_u(\lambda_i)$. On a $x_i \in E_u(\lambda_i)$, donc $v(x_i) \in E_u(\lambda_i)$, Par suite $u(v(x_i)) = \lambda_i v(x_i)$.Ainsi

$$u(v(x)) = \sum_{i=1}^{n} u(v(x_i)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v(x_i) = v\left(\sum_{i=1}^{n} u(x_i)\right) = v(u(x))$$

(b) Soit $\mathcal{B}$ une base adaptée à la décomposition $E = E_u(\lambda_1) \oplus E_u(\lambda_2) \oplus ... \oplus E_u(\lambda_p)$, on a $B \in Ker(\varphi_A)$ si et seulement si les sous-espaces propres $E_u(\lambda_i)$ sont stables par u ce qui esr équivalent à $mat_{\mathcal{B}}(v)$ est diagonale par blocs , c'est-à-dire de la forme :

$$mat_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix} \text{ où } A_k \in \mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{R})$$

(c) Soit ϕ l'application définie par :

$$\begin{array}{rccc} \phi & : & \mathcal{M}_{m_1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{m2}(\mathbb{R}) \times ... \times \mathcal{M}_{m_p}(\mathbb{R}) & \to & Ker(\varphi_A) \\ & & (A_1, A_2, ..., A_p) & \mapsto & \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix} \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels , donc

$$\dim_{\mathbb{R}} Ker(\varphi_A) = \dim\left(\mathcal{M}_{m_1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{m2}(\mathbb{R}) \times ... \times \mathcal{M}_{m_p}(\mathbb{R})\right) = \sum_{k=1}^{p} \dim \mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{R}) = \sum_{k=1}^{p} m_k^2$$

(d) Lorsque $n = 7$. u étant diagonalisable , donc $\sum_{k=1}^{p} m_k = 7$. $m_k \geq 1$, donc $p \leq 7$.

i. Si $p = 1$, u est une homothétie , $Ker(\varphi_A) = \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$, $\dim Ker(\varphi_A) = 49$.

ii. Si $p = 2$, $m_1 + m_2 = 7$ .Supposns que $m_1 \leq m_2$, les possibilités dans ce cas , sont
  - $(1, 6)$, $\dim Ker(\varphi_A) = 1 + 36 = 37$
  - $(2, 5)$,$\dim Ker(\varphi_A) = 4 + 25 = 29$
  - $(3, 4)$,$\dim Ker(\varphi_A) = 9 + 16 = 25$

iii. Si $p = 3$, $m_1 + m_2 + m_3 = 7$ (supposons $m_1 \leq m_2 \leq m_3$) ,les possibilités des m_i sont :
  - $m_1 = 1$
    $m_2 = 1$ et $m_3 = 5$, $\dim(Ker(\varphi_A)) = 27$.
    $m_2 = 2$ et $m_3 = 4$, $\dim(Ker(\varphi_A)) = 21$.
    $m_2 = 3$ et $m_3 = 4$, $\dim(Ker(\varphi_A)) = 26$.
  - $m_1 = 2$
    $m_2 = 2$ et $m_3 = 3$, $\dim(Ker(\varphi_A)) = 17$.

iv. Si $p = 4$, $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 7$, supposons que $m_1 \leq m_2 \leq m_3 \leq m_4$.
  - On a $m_1 + m_2 + m_3 \geq 3$, donc $m_4 \leq 4$.
  Si $m_4 = 4$, alors $m_1 = m_2 = m_3 = 1$, donc $\dim(Ker(\varphi_A)) = 19$.
  Si $m_4 = 3$, alors $m_1 + m_2 + m_2 = 4$, donne $(m_1, m_2, m_3, m_4) = (1, 1, 2, 3)$,$\dim(Ker(\varphi_A)) = 15$.

v. Si $p = 5$, $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 = 7$, supposons que $m_1 \leq m_2 \leq m_3 \leq m_4 \leq m_5$.
  Donc $m_5 \leq 3$.
  Si $m_5 = 3$, alors $(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) = (1, 1, 1, 1, 3)$, $\dim Ker(\varphi_A) = 13$
  Si $m_5 = 2$, alors $(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) = (1, 1, 1, 2, 2)$, $\dim Ker(\varphi_A) = 11$

vi. Si $p = 6$, par une méthode analogue , la possibilité est : $(1,1,1,1,1,2)$,dim $Ker\left(\varphi_A\right) = 9$

vii. Si $p = 7$, $\dim\left(Ker\left(\varphi_A\right)\right) = 7$.

Partie IV

7. On a $\varphi_A(B) = \alpha B$, donc $AB - BA = \alpha B$.

   Suppons que $\varphi_A\left(B^k\right) = \alpha k B^k$, alors

   $$\varphi_A\left(B^{k+1}\right) = AB^{k+1} - B^{k+1}A = \left(AB^k - B^kA\right)B + B^k(AB - BA) = \alpha k B^{k+1} + \alpha B^{k+1} = \alpha(k+1)B^{k+1}$$

8. Si $P = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i$, $P(B) = \sum_{i=0}^{m} a_i B^i$ alors $\varphi_A(P(B)) = \sum_{i=0}^{m} a_i \varphi_A\left(B^i\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha a_i B^i$ ($\varphi_A\left(B^0\right) = 0$)

   $$\varphi_A(P(B)) = \sum_{i=1}^{m} \alpha a_i B^i = \alpha B\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha a_i B^{i-1}\right) = \alpha B P'(B)$$

9. On a $\pi_B(B) = 0$, donc $0 = \varphi_A(\pi_B(B)) = \alpha B \pi'_B(B) = 0$.

   Le polynôme $X\pi'_B$ est un polynôme annulateur de B , donc π_B divise $X\pi'_B$.

   D'autre part $\deg\left(X\pi'_B\right) = \deg(\pi_B)$, donc il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que : $X\pi'_B = \mu\pi_B$

   $\pi_B = X^d + a_{d-1}X^{d-1} ... + a_0$, en égalisant le coefficient dominant , on a $\mu = d$.

   Donc $X\pi'_B = d\pi_B$.

10. On a $X\pi'_B = d\pi_B$, donc 0 est une racine de π_B. Posons $\pi_B = X^kQ(X)$ avec $Q(0) \neq 0$.$\deg(Q) = d - k$

    alors $X\left(kX^{k-1}Q + X^kQ'\right) = dX^kQ(X)$, ce qui donne que $kQ(X) + XQ'(X) = dQ(X)$

    Pour $x = 0$, on a $(k-d)\underbrace{Q(0)}_{\neq 0} = 0$, donc $k = d$ et Q est constant . π_B étant unitaire , donc

    $\pi_B = X^d$

    Donc $B^d = 0$.