

## Exercice

### I. Produit scalaire

Montrons que  $\varphi$  est linéaire à gauche

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P_1 + \mu P_2, Q) &= \int_0^1 (\lambda P_1(t) + \mu P_2(t))Q(t) dt = \int_0^1 \lambda P_1(t)Q(t) + \mu P_2(t)Q(t) dt \\ &= \lambda \int_0^1 P_1(t)Q(t) dt + \mu \int_0^1 P_2(t)Q(t) dt = \lambda \varphi(P_1, Q) + \mu \varphi(P_2, Q).\end{aligned}$$

Montrons que  $\varphi$  est symétrique

$$\varphi(Q, P) = \int_0^1 Q(t)P(t) dt = \int_0^1 P(t)Q(t) dt = \varphi(P, Q)$$

Ceci étant vrais pour tous les polynômes et scalaires utilisés,  $\varphi$  est bilinéaire symétrique.

Montrons que  $\varphi$  est positive

$$\varphi(P, P) = \int_0^1 P^2(t) dt \geq 0, \text{ car les bornes sont dans le bon sens et } P^2(t) \geq 0.$$

Montrons que  $\varphi$  est définie positive

$$\varphi(P, P) = 0 = \int_0^1 P^2(t) dt \geq 0, \text{ avec } P^2(t) \geq 0 \text{ et } t \mapsto P^2(t) \text{ continue sur } [0, 1].$$

On a donc :  $\forall x \in [0, 1], P^2(t) = 0$ , donc  $P(t) = 0$ .

$P$  a ainsi une infinité de racines et est le polynôme nul.

$\varphi$  est bilinéaire symétrique définie positive, c'est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_1[X]$ .

### II. Polynôme $P_0$

$$\begin{aligned}\text{II.A. } \forall P \in \mathbb{R}_1[X], (P|P_0) = P(0) &\Leftrightarrow \forall a, b \in \mathbb{R}, (aX + b|P_0) = b \Leftrightarrow a(X|P_0) + b(1|P_0) = b \Leftrightarrow a(X|P_0) + b((1|P_0) - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (X|P_0) = 0 \text{ et } (1|P_0) = 1 \Leftrightarrow \text{l'égalité est vérifiée pour les deux polynômes } 1 \text{ et } X.\end{aligned}$$

II.B.

$$\text{II.B.1. } (1|P_0) = (1|a_0X + b_0) = a_0(1|X) + b_0(1|1) = a_0 \int_0^1 t dt + b_0 \int_0^1 1 dt = \frac{1}{2}a_0 + b_0 = 1.$$

$$(X|P_0) = (X|a_0X + b_0) = a_0(X|X) + b_0(X|1) = a_0 \int_0^1 t^2 dt + b_0 \int_0^1 t dt = \frac{1}{3}a_0 + \frac{1}{2}b_0 = 0.$$

$$\text{On a donc bien : } \forall P \in \mathbb{R}_1[X], (P|P_0) = P(0) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}a_0 + b_0 = 1 \\ \frac{1}{3}a_0 + \frac{1}{2}b_0 = 0 \end{cases}$$

II.B.2. Il suffit de résoudre ce système, et comme on verra qu'il a une solution unique, on va déterminer l'unique polynôme  $P$  tel que  $\forall P \in \mathbb{R}_1[X], (P|P_0) = P(0)$ .

La première ligne moins deux fois la seconde donne  $a_0 = -6$ , puis la seconde ligne donne alors  $b_0 = 4$ .

L'unique polynôme  $P_0$  tel que  $\forall P \in \mathbb{R}_1[X], (P|P_0) = P(0)$  est :  $P_0 = -6X + 4$ .

### III. Polynômes normés

III.A. Première méthode

$$\text{III.A.1. } \|P_1\|^2 = \int_0^1 1 dt = 1, \text{ donc } \|P_1\| = 1.$$

III.A.2. On pose  $P_2^* = X + \lambda P_1$ , et on cherche  $\lambda$  tel que  $P_2^*$  et  $P_1$  soient orthogonaux.

$$\text{C'est à dire : } (P_2^*|P_1) = 0 = \int_0^1 t + \lambda dt = \frac{1}{2} + \lambda.$$

L'unique valeur convenable de  $\lambda$  est donc  $\lambda = -\frac{1}{2}$ .

On cherche maintenant la norme de  $P_2^*$ .

$$\|P_2^*\|^2 = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt = \left[\frac{1}{3}\left(t - \frac{1}{2}\right)^3\right]_0^1 = \frac{1}{12}.$$

$$\text{Ainsi : } \|P_2^*\| = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

On calcule maintenant  $P_2$ , qui complète la base orthonormale :  $P_2 = \frac{P_2^*}{\|P_2^*\|} = \sqrt{3}(2X - 1)$ .

III.A.3.  $(P_1, P_2)$  est une base orthonormale de  $\mathbb{R}_1[X]$ , donc si  $P \in \mathbb{R}_1[X]$ ,  $P = \alpha P_1 + \beta P_2$ .  
 $\|P\| = 1 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 1 \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}, \alpha = \cos(\theta), \beta = \sin(\theta) \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}, P = \cos(\theta)P_1 + \sin(\theta)P_2$ .

III.A.4. On a donc :  $P = \cos(\theta) + \sin(\theta)\sqrt{3}(2X - 1) = (\cos(\theta) - \sqrt{3}\sin(\theta)) + 2\sqrt{3}\sin(\theta)X$ .

$$\text{Ce qui donne : } P(0) = \cos(\theta) - \sqrt{3}\sin(\theta) = 2\left(\frac{1}{2}\cos(\theta) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\theta)\right) = 2\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right).$$

III.A.5. La valeur maximale de  $P(0)$  est donc égale à 2, atteinte pour  $\theta = -\frac{\pi}{3}$ .

### III.B. Deuxième méthode

III.B.1. On a  $|(P|Q)| \leq \|P\| \|Q\|$ , avec l'égalité si et seulement si  $P$  et  $Q$  sont liés.

III.B.2. Comme  $P$  est normé, et que  $(P|P_0) = P(0)$ , on a :  $|(P|P_0)| = |P(0)| \leq \|P\| \|P_0\| = \|P_0\|$ .  
 À fortiori :  $P(0) \leq \|P_0\|$ .

III.B.3. Pour avoir l'égalité, il suffit de prendre  $P$  normé, colinéaire à  $P_0$  et telle que  $P(0) \geq 0$ .  
 Comme  $P_0(0) = 4 \geq 0$ , il suffit de diviser  $P_0$  par sa norme pour trouver  $P$  qui convient.

$$\|P_0\|^2 = \int_0^1 (-6t + 4)^2 dt = \int_0^1 36t^2 - 48t + 16 dt = 12 - 24 + 16 = 4.$$

On a donc :  $P = -3X + 2$  qui convient.

III.B.4. La valeur maximale de  $P(0)$  est donc 2, obtenue pour le polynôme  $P$  qu'on vient de calculer.

## Problème

### I. Étude d'exemples

#### I.A.

I.A.1.  $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -1 \end{pmatrix}$ , donc  $\alpha(a) = (-10, -1)$  qui est non colinéaire à  $a$ .

Ainsi,  $(a, \alpha(a))$  est une famille libre, donc une base de  $\mathbb{R}^2$ .

Ce qui prouve que  $\alpha$  est cyclique.

I.A.2.  $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -10 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -34 \\ -9 \end{pmatrix}$ , donc  $\alpha^2(a) = xa + y\alpha(a) \Leftrightarrow \begin{cases} -34 = 2x - 10y \\ -9 = 3x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$

I.A.3. L'image de  $a$  par  $\alpha$  est  $\alpha(a) = 0a + 1\alpha(a)$ !

L'image de  $\alpha(a)$  par  $\alpha$  est  $\alpha^2(a) = -2a + 3\alpha(a)$ ...

La matrice de  $\alpha$  dans la base  $(a, \alpha(a))$  est donc :  $A' = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

I.A.4.  $A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ , qui est clairement de rang 1, donc de déterminant nul.

2 est valeur propre de  $A$  donc de  $\alpha$ .

I.A.5. Il suffit de prendre pour  $b$  un vecteur propre de  $\alpha$ , par exemple correspondant à la valeur propre 2.

Ainsi,  $b$  et  $\alpha(b)$  seront liés et ne formeront pas une base de  $\mathbb{R}^2$ .

Si  $b = (x, y)$ , cela revient à ce que  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  soit dans le noyau de  $A - 2I_2$ , c'est à dire :  $x - 3y = 0$ .

$b = (3, 1)$  convient.

#### I.B.

I.B.1. Le polynôme caractéristique de  $\beta$  est celui de  $B$ .

$$P_\beta(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & -6 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & -6 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(1-\lambda)$$

I.B.2. 0 n'est pas valeur propre de  $B$ , donc  $B$  est un endomorphisme inversible, c'est un automorphisme de  $\mathbb{R}^3$ .

**I.B.3.**  $E_2 = \text{Ker}(\beta - 2\text{Id})$ . On calcule plutôt le noyau de  $B - 2I_3$  !

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - 6z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y - 3z = 0.$$

Ce système est de rang 1, le sous espace propre de dimension 2. 2 est la seule valeur propre multiple, d'ordre 2 de  $\beta$ , dont le polynôme caractéristique est scindé, donc  $\beta$  est diagonalisable.

De plus,  $E_2 = \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 3, 1))$ .

$E_1 = \text{Ker}(\beta - \text{Id})$ . On calcule plutôt le noyau de  $B - I_3$  !

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3y - 6z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}.$$

Ce système est de rang 2, le sous espace propre est donc de dimension 1, ce qu'on savait déjà puisque la valeur propre 1 est simple !

On a donc :  $E_1 = \text{Vect}((0, 2, 1))$ .

Dans la base de vecteurs propres  $((1, 0, 0), (0, 3, 1), (0, 2, 1))$ , la matrice de  $\beta$  est  $D$  !

**I.B.4.** Calculons  $D^2 - 3D + 2I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0.$

Ce qui prouve que  $\beta^2 - 3\beta + 2\text{Id} = 0$ .

**I.B.5.** Pour tout vecteur  $a$ , on aura  $\beta^2(a) - 3\beta(a) + 2a = 0$ , c'est à dire :  $\beta^2(a) = 3\beta(a) - 2a$ .

La famille  $(a, \beta(a), \beta^2(a))$  n'est donc jamais libre, donc  $\beta$  n'est pas cyclique.

**I.C.**

**I.C.1.** On a très facilement :  $\gamma(X^{n-1}) = (n-1)X^{n-2}$  puisque  $n-1 \neq 0$ .

Montrons par récurrence que :  $\gamma^k(X^{n-1}) = (n-1)(n-2)\dots(n-k)X^{n-1-k}$ , pour  $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ .

*Vérification initiale*

On l'a déjà montré pour  $k = 1$ .

*Hérédité*

On l'admet au rang  $k$ , avec  $k < n-1$ , on le montre au rang  $k+1$ .

$$\begin{aligned} \gamma^{k+1}(X^{n-1}) &= \gamma(\gamma^k(X^{n-1})) = (n-1)(n-2)\dots(n-k)\gamma(X^{n-1-k}) \\ &= (n-1)(n-2)\dots(n-k)(n-1-k)X^{n-2-k} = (n-1)(n-2)\dots(n-k)(n-(k+1))X^{n-1-(k+1)}. \end{aligned}$$

*Conclusion*

On a bien :  $\forall k \in \{1, 2, \dots, n-1\}, \gamma^k(X^{n-1}) = (n-1)(n-2)\dots(n-k)X^{n-1-k}$ .

**I.C.2.**  $\text{Vect}(X^{n-1}, \gamma(X^{n-1}), \dots, \gamma^{n-1}(X^{n-1})) = \text{Vect}(X^{n-1}, X^{n-2}, \dots, X, 1) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ .

Cette famille est donc génératrice de  $n$  vecteurs dans un espace vectoriel de dimension  $n$ , c'est donc une base, et  $\gamma$  est donc cyclique.

## II. Différences de polynômes

**II.A.**

**II.A.1.**  $\delta(X^k) = (X+1)^k - X^k = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} X^p - X^k = \sum_{p=0}^{k-1} \binom{k}{p} X^p.$

$\delta(X^k)$  est bien un polynôme de degré  $k-1$ .

**II.A.2.**  $P = \sum_{p=0}^k a_p X^p$ , avec  $a_k \neq 0$ .

Donc, par linéarité,  $\delta(P) = \sum_{p=0}^k a_p \delta(X^p).$

Les polynômes  $\delta(X^p)$  sont de degré  $p-1$  pour  $p \neq 0$ , et est nul pour  $p = 0$ , comme  $a_k \neq 0$ , le terme de plus haut degré de  $\delta(P)$  provient de  $\delta(X^k)$ , et est donc de degré  $k-1$ .

$\delta(P)$  est bien de degré  $k-1$ , qui est le degré de  $P$  moins 1.

II.A.3. La famille  $(X^{n-1}, \delta(X^{n-1}), \delta^2(X^{n-1}), \dots, \delta^{n-1}(X^{n-1}))$  est donc une famille de polynômes degrés respectifs  $(n-1, n-2, \dots, 0)$ , c'est à dire une base de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ .  
 $\delta$  est donc cyclique.

## II.B.

II.B.1. Si un polynôme non nul appartient au noyau de  $\delta$ , comme le degré baisse de 1, c'est que ce polynôme est constant.

Comme l'image par  $\delta$  d'un polynôme constant est nulle, le noyau de  $\delta$  est bien constitué des polynômes constants.

II.B.2. Comme le degré baisse de 1 et que l'image d'un polynôme constant est nulle, l'image de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  est incluse dans  $\mathbb{R}_{n-2}[X]$ .

II.B.3. La dimension de l'ensemble de départ est  $n$ , celle du noyau est 1, donc la dimension de l'image est  $n-1$ .  
 Mais l'image est incluse dans  $\mathbb{R}_{n-2}[X]$  de dimension  $n-1$ , c'est donc  $\mathbb{R}_{n-2}[X]$ .

## II.C.

II.C.1. La famille  $(P_0, P_1, \dots, P_{n-1})$  est une famille de  $n$  polynômes de degrés étagés, c'est donc une base de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ .

II.C.2. On a donc :  $X^3 - 5X^2 + X - 3 = a + bX + c \frac{X(X-1)}{2} + d \frac{X(X-1)(X-2)}{6}$ .

$X = 0$  donne  $a = -3$

$X = 1$  donne  $a + b = -6$ , donc  $b = -3$

$X = 2$  donne  $a + 2b + c = -13$ , donc  $c = -4$

Le terme en  $X^3$  donne  $\frac{d}{6} = 1$ , ou encore  $d = 6$

Finalement :  $X^3 - 5X^2 + X - 3 = -3P_0 - 3P_1 - 4P_2 + 6P_3$ .

II.C.3.  $\delta(P_j) = P_j(X+1) - P_j(X) = \frac{(X+1)X(X-1)\dots(X-j+3)(X-j+2)}{j!} - \frac{X(X-1)(X-2)\dots(X-j+2)(X-j+1)}{j!}$   
 $= \frac{X(X-1)\dots(X-j+3)(X-j+2)}{j!} [(X+1) - (X-j+1)] = \frac{X(X-1)\dots(X-j+3)(X-j+2)}{j!} j$   
 $= \frac{X(X-1)\dots(X-j+3)(X-j+2)}{(j-1)!} = P_{j-1}$ .

On peut continuer de la même façon jusqu'à obtenir  $P_0$ , ce qui donne :  $\delta^i(P_j) = P_{j-i}$ , pour  $i \leq j$ .

Ensuite, on a le polynôme nul :  $\delta^i(P_j) = 0$ , pour  $i > j$ .

II.C.4. La famille  $(P_{n-1}, \delta(P_{n-1}), \delta^2(P_{n-1}), \dots, \delta^{n-1}(P_{n-1}))$  est la famille  $(P_{n-1}, P_{n-2}, \dots, P_0)$ , elle est donc de degrés étagés et de  $n$  vecteurs, c'est donc une base de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ .  
 $\delta$  est bien cyclique.