

Mines-Ponts 2002 — PSI, épreuve 1 (3h) — corrigé

PARTIE I

Question I.1

Rayon de convergence

I.1.a. Pour $f_1 : t \mapsto a$, $u_n = a^n$, $(\sum a^n x^n)$ est de rayon de convergence $1/|a|$ et de somme $F_1 : x \mapsto \frac{1}{1-ax}$.

Pour $f_2 : t \mapsto at$, $u_n = \frac{a^n}{n!}$, la série entière $(\sum \frac{a^n}{n!} x^n)$ est de rayon de convergence infini et $F_2 : x \mapsto e^{ax}$.

Pour $f_3 : t \mapsto pt - 1$, $u_n = 0$ si $n \geq p$, donc la série entière associée est de rayon de convergence infini. En outre, si $n \leq p - 1$, on a $u_n = \prod_{k=1}^n (\frac{p}{k} - 1) = \prod_{k=1}^n \frac{p-k}{k} = \binom{p-1}{n}$, de sorte que $F_3 : x \mapsto (1+x)^{p-1}$.

I.1.b. Si f s'annule en un point $1/k$ où $k \in \mathbb{N}^*$, alors $u_n = 0$ dès que $n \geq k$ et le rayon de convergence est infini. Sinon, le critère de d'Alembert nous conduit à calculer $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| f\left(\frac{1}{n+1}\right) \right| \rightarrow |f(0)|$ car f est continue en 0. Ainsi, si $f(0) = 0$, le rayon de convergence est infini, et sinon il vaut $\frac{1}{|f(0)|}$.

Question I.2

Suite de terme général u_n

I.2.a. f étant continue sur $[0, 1]$, il existe $\eta > 0$ tel que $0 \leq x \leq \eta \Rightarrow f(x) > \frac{1}{2}f(0) > 0$. Alors, dès que $n \geq N = 1 + \lfloor 1/\eta \rfloor$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 0$ de sorte qu'à partir du rang N , u_n a le signe de u_N .

I.2.b. Cas où $0 \leq |f(0)| < 1$. Soit $q = \frac{1+|f(0)|}{2} < 1$. Par continuité de f à l'origine, il existe $\eta > 0$ tel que $0 \leq x \leq \eta \Rightarrow |f(x)| \leq q$. On en déduit l'existence d'un rang N tel que $n \geq N \Rightarrow \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq q$. Par une récurrence évidente, on en déduit que si $n \geq N$ on a $|u_n| \leq q^{n-N}|u_N|$ donc $\lim u_n = 0$.

Cas où $|f(0)| > 1$. De façon analogue, posant $q = \frac{1+|f(0)|}{2} > 1$, il existe un rang N tel que pour $n \geq N$ on a $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \geq q$ donc $|u_n| \geq q^{n-N}|u_N|$ donc $\lim |u_n| = +\infty$.

Question I.3

Série de terme général u_n

Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$, au voisinage de 0 on peut écrire $f(x) = 1 + \beta x + O(x^2)$.

Alors $w_n = \ln \frac{v_n}{v_{n-1}} = \ln \frac{u_n}{u_{n-1}} - \beta(\ln n - \ln(n-1)) = \ln f\left(\frac{1}{n}\right) + \beta \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{\beta}{n} - \frac{\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ de sorte que la série $(\sum w_n)$ est absolument convergente.

Notons S la somme de cette série : $S = \lim(\ln v_n - \ln v_0) = \lim(\ln u_n - \beta \ln n)$ donc $\lim \frac{u_n}{n^\beta} = e^S = L > 0$.

Question I.4

Fonction F

I.4.a. On a vu que le rayon de convergence de la série entière considérée vaut 1.

D_F contient donc au moins l'intervalle $]-1, +1[$. Étudions la convergence de $(\sum u_n)$ et de $(\sum (-1)^n u_n)$.

u_n est à termes positifs donc les séries $(\sum u_n)$ et $(\sum n^\beta)$ sont de mêmes natures : elles convergent si et seulement si $\beta < -1$.

Si $\beta < -1$, la série $(\sum (-1)^n u_n)$ est absolument convergente. Si $\beta \geq 0$, (u_n) ne tend pas vers 0 et donc la série diverge. Reste à considérer le cas où $-1 \leq \beta < 0$. La suite (u_n) est à valeurs positives, tend vers 0 puisque $\beta < 0$ et est décroissante au moins à partir d'un certain rang car $\frac{u_{n+1}}{u_n} = f\left(\frac{1}{n+1}\right) = 1 + \frac{\beta}{n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ devient plus petit que 1. Le critère spécial des séries alternées s'applique et conclut à la convergence de la série.

Finalement, si $\beta < -1$, $D_F = [-1, +1]$; si $-1 \leq \beta < 0$, $D_F = [-1, +1[$; et si $0 \leq \beta$, $D_F =]-1, +1[$.

I.4.b. Ici $u_n = \frac{(n-\alpha)(n-1-\alpha)\dots(1-\alpha)}{n!} = (-1)^n \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n)}{n!}$, le rayon de convergence vaut 1 et on reconnaît le développement en série entière de $F : x \mapsto (1-x)^{\alpha-1}$.

PARTIE II

Question II.1

Propriétés de la fonction g

II.1.a. Au voisinage de 0, si $x \neq 0$, on dispose de $g(x) = \frac{1}{\tan \pi x} - \frac{1}{\pi x} \sim \frac{\pi x - \tan \pi x}{\pi^2 x^2} \sim \frac{\frac{\pi^3 x^3}{3}}{\pi^2 x^2} = \frac{\pi x}{3}$, donc g est continue en 0 et donc évidemment sur $] -1, +1[$.

Une primitive de g sur $] -1, 0[$ ou sur $] 0, +1[$ est $G(x) = \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{\sin \pi x}{x} \right|$, de sorte que $I_\alpha = G(\alpha) - \lim_0 G = \frac{1}{\pi} \ln \frac{\sin \pi \alpha}{\pi \alpha}$.

II.1.b. h est clairement continue par morceaux et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, on en déduit que sa série de Fourier converge simplement sur $\mathbb{R}$ tout entier vers la fonction 2π -périodique $\tilde{h}$ qui coïncide avec h mais telle que $\tilde{h}(0) = \tilde{h}(2\pi) = \frac{1}{2}(1 + e^{-2i\pi\alpha})$.

Les coefficients de Fourier de h s'écrivent, avec les notations standard :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(h) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(n+\alpha)t} dt = \frac{1}{2i\pi(n+\alpha)} (1 - e^{-2i\pi(n+\alpha)}) = \frac{1}{2i\pi(n+\alpha)} (1 - e^{-2i\pi\alpha}).$$

En particulier en 0 :

$$\begin{aligned} \tilde{h}(0) &= \frac{1}{2}(1 + e^{-2i\pi\alpha}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2i\pi(n+\alpha)} (1 - e^{-2i\pi\alpha}) \\ &= \frac{1 - e^{-2i\pi\alpha}}{2i\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+\alpha} + \frac{1}{-n+\alpha} \right) \right) \\ &= \frac{1 - e^{-2i\pi\alpha}}{2i\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} \right), \end{aligned}$$

de sorte que

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} = i \frac{1 + e^{-2i\pi\alpha}}{1 - e^{-2i\pi\alpha}} - \frac{1}{\pi\alpha} = \frac{\cos \pi\alpha}{\sin \pi\alpha} - \frac{1}{\pi\alpha} = g(\alpha).$$

II.1.c. La série de terme général $\frac{2t}{t^2 - n^2}$ converge normalement donc uniformément sur $[0, \alpha]$ pour tout α fixé dans $] -1, +1[$, puisque $\left| \frac{2t}{t^2 - n^2} \right| \leq \frac{2|\alpha|}{n^2 - \alpha^2} = O(1/n^2)$.

On en déduit qu'on peut intégrer terme à terme la somme de la série, et que

$$I_\alpha = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^\alpha \frac{2t}{t^2 - n^2} dt = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} [\ln |t^2 - n^2|]_0^\alpha = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 - \frac{\alpha^2}{n^2}).$$

Comparant avec le résultat du a. on obtient : $\frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha} = \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - \frac{\alpha^2}{n^2})$.

Question II.2

On écrit : $u_n = \prod_{k=1}^n (1 - \frac{\alpha^2}{k^2})$ d'où la convergence de la suite (u_n) , de limite $\frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha}$.

PARTIE III

Question III.1

Existence des fonctions G_n et G

G n'est autre que la fonction Γ d'Euler : elle est bien définie sur $]0, +\infty[$, car au voisinage de 0, $t^{x-1}e^{-t} \sim t^{x-1}$ et $x-1 < -1$ d'une part, et au voisinage de $+\infty$, $t^{x-1}e^{-t} \ll t^{-2}$; elle est continue sur tout compact $[a, b]$ de $]0, +\infty[$ (et donc continue sur $]0, +\infty[$) car $(t, x) \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[\times [a, b]$ et y est majorée par la fonction de domination suivante, qui est sommable sur $]0, +\infty[: t \mapsto \begin{cases} t^{a-1}e^{-t}, & \text{si } 0 < t < 1; \\ t^{b-1}e^{-t}, & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$

On peut écrire, pour tout $x > 0$, $G_n(x) = \int_0^{+\infty} \varphi_n(x, t) dt$.

Fixons $x > 0$. Les $t \mapsto \varphi_n(x, t)$ sont toutes positives sur $]0, +\infty[$. Montrons qu'à x et $t > 0$ fixés, la suite $(\varphi_n(x, t))$ croît et converge, de limite $\varphi(x, t)$. Cela permettra de conclure à la convergence simple cherchée : $\lim G_n(x) = G(x)$, en utilisant le théorème de convergence monotone par exemple.

Or en effet, si $t > n + 1$, $\varphi_n(x, t) = \varphi_{n+1}(x, t) = 0$; si $n < t \leq n + 1$, $\varphi_n(x, t) = 0 \leq \varphi_{n+1}(x, t)$; et si $0 < t \leq n$, notant $\psi(t) = (n + 1) \ln(1 - \frac{t}{n + 1}) - n \ln(1 - \frac{t}{n})$, on a $\psi'(t) = \frac{1}{1 - t/n} - \frac{1}{1 - t/(n + 1)} = \frac{t}{(n + 1 - t)(n - t)} \geq 0$ et $\psi(0) = 0$. Donc la suite $(\varphi_n(x, t))$ est bien croissante. En outre, à $x > 0$ et $t > 0$ fixés, pour $n \geq t$, on a bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x, t) = t^{x-1} e^{-t}$ car $-t = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(1 - t/n)$.

Question III.2

Une expression de $G_n(x)$

III.2.a. Une intégration par parties fournit :

$$J_{n+1}(x) = \int_0^1 (1-t)^{n+1} t^{x-1} dt = \left[(1-t)^{n+1} \frac{t^x}{x} \right]_0^1 + \frac{n+1}{x} \int_0^1 (1-t)^n t^x dt = \frac{n+1}{x} J_n(x+1).$$

En outre on a clairement $J_0(x) = \int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x}$.

Une récurrence immédiate conduit alors à $J_n(x) = \frac{n!}{x(x+1) \cdots (x+n)}$.

III.2.b. Le changement de variable $t = un$ transforme

$$G_n(x) = \int_0^n (1 - \frac{t}{n})^n t^{x-1} dt = n^x \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du = n^x J_n(x) = \frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)}.$$

Question III.3

Relation des compléments

$G(x)G(1-x)$ est la limite, quand $n \rightarrow +\infty$, de $G_n(x)G_n(1-x)$.

Or on vient d'écrire :

$$\begin{aligned} G_n(x)G_n(1-x) &= \frac{n!^2 n}{x(x+1) \cdots (x+n) \times (1-x)(2-x) \cdots (n+1-x)} \\ &= \frac{1}{x} \frac{n}{n+1-x} \frac{1}{\prod_{k=1}^n (1 + \frac{x}{k})(1 - \frac{x}{k})} \\ &= \frac{1}{x} \frac{n}{n+1-x} \frac{1}{\prod_{k=1}^n (1 - \frac{x^2}{k^2})}, \end{aligned}$$

de sorte que, se rappelant les résultats de II.2, on a :

$$G(x)G(1-x) = \frac{1}{x} \frac{1}{\prod_{k=1}^{+\infty} (1 - \frac{x^2}{k^2})} = \frac{1}{x} \frac{\pi x}{\sin \pi x} = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$