

Centrale PSI 1

Un corrigé

I. Première partie.

I.A.1 On suppose $(x, y) \notin \mathbb{R}^- \times \{0\}$ et donc $x \notin \mathbb{R}^-$ OU $y \neq 0$.

Si $y \neq 0$, $\sqrt{x^2 + y^2} > \sqrt{x^2} = |x| \geq -x$. En particulier $x + \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$. $\theta(z)$ est donc bien défini (arctan est définie sur $\mathbb{R}$).

Si $y = 0$ alors $x \notin \mathbb{R}^-$ et $x + \sqrt{x^2} = x + |x| > 0$. Là encore, $\theta(z)$ existe.

Pour tout complexe z' , on a $|Re(z')| \leq |z'|$ avec égalité si et seulement si $z' \in \mathbb{R}$. Plus précisément, si $z' \in \mathbb{R}^+$, $Re(z') = |z'|$ et si $z' \in \mathbb{R}^-$, $Re(z') = -|z'|$. Comme $z \notin \mathbb{R}^-$, on a donc $|z| > -Re(z)$ et $R(z)$ est donc bien défini.

I.A.2 On a

$$\theta(z_1) = 2 \arctan(0) = 0, \quad R(z_1) = \frac{8}{\sqrt{16}} = 2, \quad R(z_1)^2 = 4$$

$$\theta(z_2) = 2 \arctan(1) = \frac{\pi}{2}, \quad R(z_2) = \frac{2i}{\sqrt{4}} = 1 + i, \quad R(z_2)^2 = 2i$$

$$\theta(z_3) = 2 \arctan(-\sqrt{3}/3) = -\frac{\pi}{3}, \quad R(z_3) = \frac{3 - i\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}, \quad R(z_3)^2 = 1 - i\sqrt{3}$$

I.A.3 arctan est la bijection réciproque de la restriction de tan à $] -\pi/2, \pi/2[$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$).

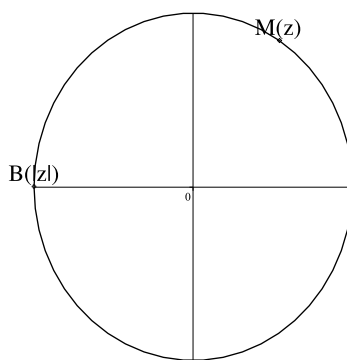
C'est donc une fonction à valeurs dans $] -\pi/2, \pi/2[$. Ainsi

$$\theta(z) \in] -\pi, \pi[$$

On a $Re(R(z)) = \frac{1}{\sqrt{2(Re(z)+|z|)}} Re(z + |z|) = \frac{1}{\sqrt{2(Re(z)+|z|)}} (Re(z) + |z|)$ et on a vu en **A.1** que cette quantité est > 0 . Ainsi

$$R(z) \in \mathcal{P}$$

I.A.4 B est sur l'axe des abscisses et sur $\mathcal{C}$, plus précisément à gauche de l'origine.



Soit $\alpha = \text{Arg}(z)$; on a donc $z = |z|e^{i\alpha}$ et $\alpha \in] -\pi, \pi[$ ($\alpha \neq \pi$ car $z \notin \mathbb{R}^-$). On en déduit que

$$\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{|z| \sin(\alpha)}{|z| \cos(\alpha) + |z|} = \frac{2 \sin(\alpha/2) \cos(\alpha/2)}{2 \cos^2(\alpha/2)} = \tan(\alpha/2)$$

Ainsi,

$$\arctan \left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \arctan(\tan(\alpha/2))$$

Comme $\alpha/2 \in]-\pi/2, \pi/2[$, la quantité précédente vaut $\alpha/2$. On a donc prouvé que

$$\theta(z) = \alpha = \text{Arg}(z)$$

Par ailleurs, on a aussi

$$z + |z| = |z|(e^{i\alpha} + 1) = |z|2\cos(\alpha/2)e^{i\alpha/2}$$

Comme $|z|2\cos(\alpha/2) > 0$ et $\alpha/2 \in]-\pi, \pi]$, on a donc

$$\text{Arg}(z + |z|) = \frac{\alpha}{2} = \frac{\theta(z)}{2}$$

I.A.5 D'après la question précédente, $\text{Arg}(R(z)) = \text{Arg}(z + |z|) = \theta(z)/2$. Par ailleurs,

$$|R(z)|^2 = \frac{(z + |z|)(\bar{z} + |z|)}{2(\text{Re}(z) + |z|)} = \frac{2|z|^2 + (z + \bar{z})|z|}{2(\text{Re}(z) + |z|)} = |z|$$

et on en déduit que

$$R(z)^2 = |R(z)|^2 e^{2i\text{Arg}(R(z))} = |z| e^{i\text{Arg}(z)} = z$$

De plus

$$\theta \circ R(z) = \text{Arg}(R(z)) = \text{Arg}(z + |z|) = \frac{\theta(z)}{2}$$

et enfin comme $|R(z)| = (|R(z)|^2)^{1/2} = |z|^{1/2}$

$$|z|^{1/2} e^{i\theta(z)/2} = |R(z)| e^{i\text{Arg}(z + |z|)} = |R(z)| e^{i\text{Arg}(R(z))} = R(z)$$

I.A.6 Comme $z \neq 0$, $Z^2 = z$ a deux solutions opposées. On vient de voir que $R(z)$ est une des solutions. L'autre est donc $-R(z)$. Elles sont distinctes car $R(z) \neq 0$.

I.A.7 La question **A.3** indique que R va de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ dans $\mathcal{P}$.

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ tels que $R(z_1) = R(z_2)$. En élevant au carré, on obtient $z_1 = z_2$ ce qui donne l'injectivité de R .

Soit $z' \in \mathcal{P}$; on a $(z')^2 \notin \mathbb{R}^-$ car les complexes dont le carré est dans $\mathbb{R}^-$ sont les imaginaires purs et ont une partie réelle nulle. De plus $R((z')^2)$ est solution de $Z = (z')^2$ donc on a $R((z')^2) = \pm z'$. Comme z' et $R((z')^2)$ sont tous deux dans $\mathcal{P}$ (parties réelles de même signe et non nulles) on a ainsi $R((z')^2) = z'$.

On a montré que R est bijective de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ dans $\mathcal{P}$ de bijection réciproque l'élévation au carré.

I.B. L'ensemble $\mathcal{S}_{a,b}$ des suites complexes vérifiant $(E_{a,b})$ est, d'après le cours, un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension 2. En effet, l'application $\phi : u \in U \mapsto (u_0, u_1)$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}_{a,b}$ dans $\mathbb{C}^2$.

- ϕ est immédiatement linéaire.
- Si $\phi(u) = 0$ alors une récurrence immédiate donne la nullité de u (en utilisant $E_{a,b}$). ϕ est donc injective.
- Si $(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2$, $E_{a,b}$ permet de définir par récurrence une suite (u_n) qui est dans $\mathcal{S}_{a,b}$ et dont l'image par ϕ est (z_0, z_1) . Ceci donne la surjectivité.

On appelle équation caractéristique l'équation $z^2 - 2az - b$. Son discriminant vaut $4(a^2 + b)$ et les solutions sont donc $a + R(a^2 + b)$ et $a - R(a^2 + b)$. Il est immédiat que si z est l'une des deux solutions alors $(z^n) \in \mathcal{S}_{a,b}$ ($z^{n+2} = z^n(2az + b) = 2az^{n+1} + bz^n$).

I.B.1 On est dans le cas d'un discriminant non nul et donc de deux racines distinctes $a + d$ et $a - d$. On a ainsi directement

$$\text{Vect}(W, W') \subset \mathcal{S}_{a,b}$$

De plus, (W, W') est libre (si $sW + tW' = 0$ alors $s + t = 0$ et $s(a + d) + t(a - d) = 0$ ce qui donne $a = b = 0$ car $d \neq 0$) et par dimension

$$\text{Vect}(W, W') = \mathcal{S}_{a,b}$$

Il existe s et t tels que $U = sW + tW'$ et $0 = s + t$, $1 = s(a + d) + t(a - d)$ donne

$$U = \frac{1}{2d}(W - W')$$

I.B.2 $W \in \mathcal{S}_{a,b}$ car a est solution de l'équation caractéristique. De plus

$$\begin{aligned} (n+2)a^{n+2} = (n+2)a^n(2a^2 + b) &= 2a(n+1)a^{n+1} + bna^n + (2a^{n+2} + 2ba^n) \\ &= (n+2)a^n(2a^2 + b) = 2a(n+1)a^{n+1} + bna^n \end{aligned}$$

ce qui montre que $W' \in \mathcal{S}_{a,b}$. Si $sW + tW' = 0$ alors $s = 0$ et $sa + ta = 0$ donc $s = t$ et (W, W') est libre. On conclut comme en question précédente que

$$\text{Vect}(W, W') \subset \mathcal{S}_{a,b}$$

En cherchant U sous la forme $sW = tW'$, on obtient

$$U = \frac{1}{a}W'$$

I.B.3 On a $U_0(z, -1) = 0$ et $U_1(z, -1) = 1$ donc

$$V_1(z) = 2zU_1(z, -1) - U_0(z, -1) = 2z$$

$$V_2(z) = 2zV_1(z) - U_1(z, -1) = 4z^2 - 1$$

$$V_3(z) = 2zV_2(z) - V_1(z) = 8z^3 - 4z$$

Je ne comprends pas ce que l'énoncé entend par *déterminer* les racines de ces complexes.

I.B.4 On procède par récurrence.

- Initialisation : on vient de voir le résultat pour $n = 1, 2, 3$ et il est aussi vrai pour $n = 0$ ($V_0(z) = 1$).
- Hérédité : soit $n \geq 3$; supposons le résultat vrai jusqu'au rang n . On a alors

$$V_{n+1}(z) = 2zV_n(z) - V_{n-1}(z)$$

Avec l'hypothèse de récurrence,

$$2zV_n(z) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-j}{j} (2z)^{n+1-2j} (-1)^j$$

$$-V_{n-1}(z) = - \sum_{j=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n-1-j}{j} (2z)^{n-1-2j} (-1)^j = \sum_{k=1}^{1+\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n-k}{k-1} (2z)^{n+1-2k} (-1)^k$$

en ayant posé le changement d'indice $k = j + 1$. Pour les indices communs aux deux sommes (compris entre 1 et $\lfloor n/2 \rfloor$), on obtient (avec la formule du triangle de Pascal) le terme

$$\left(\binom{n-j}{j} + \binom{n-j}{j-1} \right) (2z)^{n+1-2j} (-1)^j = \binom{n+1-j}{j} (2z)^{n+1-2j} (-1)^j \quad (*)$$

Dans la première somme, il reste le terme d'indice 0 qui donne le terme $(2z)^{n+1}$ et correspond à $j = 0$ pour $(*)$.

Si n est pair la seconde somme n'a pas d'indice supplémentaire et

$$V_{n+1}(z) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n+1-j}{j} (2z)^{n+1-2j} (-1)^j = \sum_{j=0}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} \binom{n+1-j}{j} (2z)^{n+1-2j} (-1)^j$$

la seconde égalité provenant de $\lfloor n/2 \rfloor = \lfloor (n+1)/2 \rfloor$.

Si n est impair, la seconde somme a un terme d'indice $m = \lfloor (n+1)/2 \rfloor$ en plus qui vaut $\binom{n-m}{m-1} (2z)^{n+1-2m} (-1)^m$. En écrivant que $n = 2p+1$ (et on a donc $m = p+1$), on voit que $\binom{n-m}{m-1} = \binom{p}{p} = \binom{p+1}{p+1} = \binom{n+1-m}{m}$ et on a

$$\begin{aligned} V_{n+1}(z) &= \binom{n+1-m}{m} (2z)^{n+1-2m} (-1)^m + \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n+1-j}{j} (2z)^{n+1-2j} (-1)^j \\ &= \sum_{j=0}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} \binom{n+1-j}{j} (2z)^{n+1-2j} (-1)^j \end{aligned}$$

Dans les deux cas, on a la relation au rang $n+1$.

II. Deuxième partie.

II.A.1 On cherche les $Z = a + \rho e^{i\theta}$ tels que $|Z(Z-2a)| = 1$. On a d'abord

$$Z(Z-2a) = (\rho e^{i\theta} + a)(\rho e^{i\theta} - a) = \rho^2 e^{2i\theta} - a^2$$

et donc

$$\begin{aligned} |Z(Z-2a)|^2 &= (\rho^2 \cos(2\theta) - a^2)^2 + (\rho^2 \sin(2\theta))^2 \\ &= \rho^4 - 2a^2 \rho^2 \cos(2\theta) + a^4 \\ &= (\rho^2 + a^2)^2 - 2a^2 \rho^2 (1 + \cos(2\theta)) \\ &= (\rho^2 + a^2)^2 - 4a^2 \rho^2 \cos^2(\theta) \end{aligned}$$

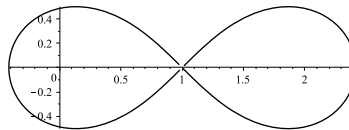
Une équation polaire de $\mathcal{C}_a$ dans notre repère est donc

$$(\rho^2 + a^2)^2 - 4a^2 \rho^2 \cos^2(\theta) = 1$$

II.A.2 Dans le cas où $a = 1$ on obtient $\rho = 0$ ou $\rho^2 = 4 \cos^2(\theta) - 2 = 2 \cos(2\theta)$. On a donc

$$\rho = \sqrt{2 \cos(2\theta)} \quad \theta \in [-\pi, -3\pi/4] \cup [-\pi/4, \pi/4] \cup [3\pi/4, \pi]$$

En notant $M(\theta)$ le point correspondant à $\rho = \sqrt{2 \cos(2\theta)}$, On a $M(-\theta)$ qui est symétrique de $M(\theta)$ par rapport à $O'x$ et $M(\pi - \theta)$ qui est symétrique de $M(\theta)$ par rapport à $O'y$. Il suffit donc de faire l'étude sur $[0, \pi/4]$ puis d'opérer une symétrie par rapport à $O'y$ puis une autre par rapport à Ox .



II.B.1 Par inégalité triangulaire, on a $|Z(Z - 2z)| \geq |Z|(|Z| - 2|z|)$ et cette quantité est de limite infinie quand $|Z| \rightarrow +\infty$. Il existe donc un réel R tel que $|Z| > R$ implique $|Z(Z - 2z)| \geq 1$. En contraposant, on voit que Ω_z est borné (inclus dans la boule de centre O de rayon R).

L'application $Z \mapsto |Z(Z - 2z)|$ est continue de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$ et Ω_z est l'image réciproque de $] -\infty, 1[$ par cette application. C'est donc un ouvert comme image réciproque d'un ouvert par une application continue.

L'ensemble $P = \{r \in \mathbb{R}^+ / |r(r - 2z)| - 1 \geq 0\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}^+$ (car $|r(r - 2z)| \geq r^2 - 2|r||z|$ tend vers l'infini quand $r \rightarrow +\infty$). Elle est minorée par 0 et admet donc une borne inférieure a . Par définition de la borne inférieure, a est limite d'une suite (a_n) d'éléments de P et comme $|a_n(a_n - 2z)| \geq 1$, un passage à la limite donne $|a(a - 2z)| \geq 1$. Si cette inégalité était stricte, par continuité de $r \mapsto |r(r - 2z)|$, a ne serait pas la borne inférieure de P . On a donc

$$\forall r \in [0, a[, r \in \Omega_z \text{ mais } a \notin \Omega_z$$

Ainsi Ω_z n'est pas fermé (on a une suite d'éléments de Ω_z qui converge vers un élément hors de Ω_z). A fortiori, Ω_z n'est pas compact.

II.B.2 Pour $Z = 0$ on a $|Z(Z - 2z)| = 0 < 1$ et donc l'origine est dans Ω_z . Comme Ω_z est ouvert, l'origine est intérieure à Ω_z (tout point d'un ouvert est intérieur à cet ouvert).

II.C.1 Dans le cas $z^2 \neq 1$, la question **I.B.1** montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, V_n(z) = \frac{1}{2R(z^2 - 1)} ((z + R(z^2 - 1))^{n+1} - (z - R(z^2 - 1))^{n+1})$$

Il suffit alors de passer au module et d'utiliser l'inégalité triangulaire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |V_n(z)| = \frac{1}{2r} \left(s^{n+1} + t^{n+1} \leq \frac{h^{n+1}}{r} \right)$$

II.C.2 On distingue deux cas.

- Si $z^2 - 1 \neq 0$, on peut utiliser la question précédente et affirmer que $|V_n(z)Z^n| \leq \frac{h}{r}|hZ|^n$ est le terme général d'une suite bornée si $|hZ| \leq 1$. On en déduit que le rayon de convergence de $\sum (V_n(z)Z^n)$ est supérieur ou égal à $1/h$. L'énoncé ne semble pas demander d'égalité.
- Sinon, $z = \pm 1$. On est dans le cas de la question **I.B.2** et

$$\forall n \in \mathbb{N}, V_n(z) = (n+1)z^n$$

On a alors $|V_n(z)Z^n| = (n+1)|zZ|^n = (n+1)|Z|^n$ qui est le terme général d'une suite bornée ssi $|Z| < 1$. Le rayon de convergence de la série entière est cette fois égal à 1.

Dans tous les cas le rayon de convergence de $\sum (V_n(z)Z^n)$ est supérieur ou égal à $1/h$.

II.C.3 On suppose que $g_z(Z)$ existe. Comme on peut regrouper des séries convergentes, on a

$$\begin{aligned} (1 - 2zZ + Z^2)g_z(Z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} V_n(z)Z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} 2zV_n(z)Z^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} V_n(z)Z^{n+2} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} V_n(z)Z^n - \sum_{n=1}^{+\infty} 2zV_{n-1}(z)Z^n + \sum_{n=2}^{+\infty} V_{n-2}(z)Z^n \\ &= V_0(z) + V_1(z)Z - 2zV_0(z)Z + \sum_{n=0}^{+\infty} (V_n(z) - 2zV_{n-1}(z) + V_{n-2}(z))Z^n \\ &= 1 \end{aligned}$$

II.C.4 $\frac{1}{1-2zZ+Z^2}$ existe quand $1 - 2zZ + Z^2 \neq 0$. On a donc

$$D_z = \mathbb{C} \setminus \{z + R(z^2 - 1), z - R(z^2 - 1)\}$$

II.C.5 D'après les trois questions précédentes,

$$\forall |Z| < \min\left(\frac{1}{h}, s, t\right), \sum_{n=0}^{+\infty} V_n(z) Z^n = g_z(Z) = \frac{1}{1 - 2zZ + Z^2}$$

Par ailleurs, on sait que $\frac{1}{1-u} = \sum_{k=0}^{+\infty} u^k$ quand $|u| < 1$. On en déduit que si $|2zZ - Z^2| < 1$, c'est à dire si $Z \in \Omega_z$,

$$\frac{1}{1 - 2zZ + Z^2} = \sum_{p=0}^{+\infty} (Z^p(2z - Z)^p)$$

Or, on a montré que l'origine est intérieure à Ω_z donc

$$\exists r' > 0 / |Z| < r' \Rightarrow Z \in \Omega_z$$

Finalement,

$$\forall |Z| < \min\left(\frac{1}{h}, s, t, r'\right), \frac{1}{1 - 2zZ + Z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} V_n(z) Z^n = \sum_{p=0}^{+\infty} (Z^p(2z - Z)^p)$$

On a donc l'égalité voulue pour Δ de rayon $\min(\frac{1}{h}, s, t, r') > 0$.

II.C.6 En notant r_Δ le rayon de la boule ouverte Δ , on a donc

$$\forall x \in]-r_\Delta, r_\Delta[, G_z(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} V_p(z) x^p = \sum_{p=0}^n V_p(z) x^p + x^n \varepsilon(x) \text{ avec } \varepsilon(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} V_{k+n}(z) x^k \quad (**)$$

ε est somme d'une série entière et donc continue sur l'intervalle ouvert de convergence et donc en particulier sur $] -r_\Delta, r_\Delta[$. On en déduit que $\varepsilon(x) \rightarrow \varepsilon(0) = 0$ quand $x \rightarrow 0$. $(**)$ est donc le développement limité à l'ordre n de G_z en 0.

II.C.7 Si on trouve une autre formule pour le développement limité en 0, on pourra identifier les coefficients par unicité de ce développement. On a vu que

$$\forall x \in]-r_\Delta, r_\Delta[, G_z(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (x^p(2z - x)^p) = \sum_{p=0}^n (x^p(2z - x)^p) + x^n \sum_{k=1}^{+\infty} x^k (2z - x)^{k+n} \quad (***)$$

La première somme est polynomiale de degré $2n$. Elle peut s'écrire $P(x) + b_n x^n + o(x^n)$ où a_n est la somme des coefficients de degré n dans les polynômes $x^p(2z - x)^p$ pour $0 \leq p \leq n$. $x^p(2z - x)^p$ étant de degré $2p$, seules les valeurs de p telles que $n \leq 2p$ nous intéressent. Pour un tel p ($n \leq 2p$ et $p \leq n$), le coefficient de x^n dans $x^p(2z - x)^p$ est celui de x^{n-p} dans $(2z - x)^p$. Par formule du binôme, il vaut $\binom{p}{n-p} (-1)^{n-p} (2z)^{2p-n}$. Finalement, on a

$$b_n = \sum_{\frac{n}{2} \leq p \leq n} \binom{p}{n-p} (-1)^{n-p} (2z)^{2p-n}$$

Posons $j = n - p$ dans cette somme. Si $n = 2m$ est pair, la plus petite valeur de p est m et la plus grande valeur de j est $2m - m = m = \lfloor n/2 \rfloor$. Si $n = 2m + 1$ est impair, la plus petite valeur de p est $m + 1$ et la plus grande valeur de j est $2m + 1 - (m + 1) = m = \lfloor n/2 \rfloor$. Dans tous les cas on obtient

$$b_n = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-j}{j} (-1)^j (2z)^{n-2j}$$

Notons $h_k : x \mapsto x^k(2z - x)^k$. $x \mapsto |x(2z - x)|$ est continue sur le segment $[-r_\Delta/2, r_\Delta/2]$ et y est donc bornée en atteignant ses bornes. En notant x_0 le point où le maximum est atteint, on a $x_0 \in [-r_\Delta/2, r_\Delta/2] \subset]-r_\Delta, r_\Delta[\subset \Omega_z$ et donc $|x_0(2z - x_0)| < 1$. Comme

$$\forall x \in [-r_\Delta/2, r_\Delta/2], |h_k(x)| \leq |x_0(2z - x_0)|^k$$

$\sum (h_k)$ converge normalement sur le segment $[-r_\Delta/2, r_\Delta/2]$. Enfin, les h_k étant toutes de limite nulle en 0, le théorème de double limite donne

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{+\infty} x^k(2z - x)^k = 0$$

Comme $(2z - x)^n$ admet une limite finie en 0, la seconde somme dans $(***)$ est négligeable devant x^n au voisinage de 0. Finalement, $(***)$ se lit

$$\forall x \in]-r_\Delta, r_\Delta[, G_z(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k + o(x^n)$$

Avec l'unicité du DL évoquée plus haut, on retrouve la formule (I.1).

III. Troisième partie.

III.A.1 Si $f, g \in E$ alors $\psi : t \mapsto f(t)g(t)(1 - t^2)^{\alpha-1/2}$ est continue sur $] -1, 1[$ et

$$|f(t)g(t)(1 - t^2)^{\alpha-1/2}| \leq \frac{\|f\|_\infty \|g\|_\infty}{(1 - t)^{1/2-\alpha}(1 + t)^{1/2-\alpha}}$$

Comme $1/2 - \alpha < 1$, le majorant est intégrable aux voisinages de 1 et -1 (fonctions de Riemann) et ψ l'est donc aussi. $S_\alpha(f, g)$ existe donc a fortiori.

La symétrie de S_α est immédiate ainsi que sa linéarité par rapport à la seconde variable.

Soit $f \in E$. $S_\alpha(f, f) = \int_{-1}^1 f(t)^2(1 - t^2)^{\alpha-1/2} dt$ est positif (on intègre une fonction positive et les bornes sont dans le bon sens). Si cette quantité est nulle alors comme la fonction intégrée est continue et positive sur $] -1, 1[$, elle est nulle sur $] -1, 1[$. f est donc nulle sur $] -1, 1[$ et donc aussi sur $[-1, 1]$ par continuité. On a alors montré que S_α est définie positive.

S_α est finalement un produit scalaire sur E .

III.A.2 ϕ_α est immédiatement linéaire par linéarité de la dérivation. Elle va de plus de E dans E par théorèmes d'opérations (une dérivée d'un élément de E est dans E , un produit d'éléments de E est dans E).

L'image par φ_α de $t \mapsto 1$ (qui est dans E) est la fonction nulle. Le noyau de φ_α n'est donc pas réduit à $\{0\}$ et φ_α n'est pas injective.

III.A.3 Soient $f, g \in E$. Posons $\psi : t \mapsto (1 - t^2)^{\alpha+1/2} f'(t)$; ψ est dérivable sur $] -1, 1[$ et $\psi'(t) = (1 - t^2)^{\alpha-1/2} \varphi_\alpha(f)(t)$. On a donc

$$S_\alpha(\varphi_\alpha(f), g) = \int_{-1}^1 \psi'(t)g(t) dt$$

Pour intégrer par partie, on revient à une intégrale non généralisée.

$$\forall a \in [0, 1[, \int_{-a}^a \psi'(t)g(t) dt = [\psi(t)g(t)]_a^a - \int_{-a}^a \psi(t)g'(t) dt$$

Comme $\psi(t)g'(t) = (1 - t^2)^{\alpha+1/2} f'(t)g'(t)$ est intégrable sur $] -1, 1[$, on peut faire tendre a vers 1. ψ étant de limite nulle en ± 1 , on obtient

$$S_\alpha(\varphi_\alpha(f), g) = - \int_{-1}^1 (1 - t^2)^{\alpha+1/2} f'(t)g'(t) dt$$

Cette expression étant symétrique en f et g , on a donc

$$\forall(f, g) \in E^2, S_\alpha(\varphi_\alpha(f), g) = S_\alpha(f, \varphi_\alpha(g))$$

L'endomorphisme φ_α est donc symétrique. Le cours ne dit rien sur les endomorphismes symétriques en dimension non finie.

III.B.1 On a

$$\varphi_\alpha(X^p) = p(p-1)X^{p-2} - p(p+2\alpha)X^p$$

On en déduit que

$$\varphi_\alpha(F_n) = \text{Vect}(\varphi_\alpha(1), \varphi_\alpha(X), \dots, \varphi_\alpha(X^n)) \subset F_n$$

ce qui montre que F_n est stable par φ_α . Avec la question précédente, la restriction de φ_α à F_n est un endomorphisme symétrique de F_n (pour le produit scalaire S_α). Cette restriction est donc diagonalisable dans une base orthonormée (pour S_α).

III.B.2,3,4 Le calcul effectué ci-dessus montre que dans la base canonique de F_n , φ_α est représenté par une matrice triangulaire supérieure T dont les coefficients diagonaux sont les $-p(p+2\alpha)$ pour $p = 0, \dots, n$. $\psi : x \mapsto x(x+2\alpha)$ est strictement croissante sur $[-\alpha, +\infty[$. Comme $\alpha > -1/2 \geq -1$, elle l'est donc sur $[1, +\infty[$. Les valeurs $\psi(1), \dots, \psi(n)$ sont donc deux à deux distinctes. De plus $\psi(0) = 0$ et $\psi(1) = 2\alpha + 1 > 0$. On a donc plus précisément $\psi(0) < \psi(1) < \dots < \psi(n)$.

Finalement la matrice triangulaire T a des coefficients diagonaux deux à deux distincts. On obtient qu'elle possède $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes. On retrouve le caractère diagonalisable de φ_α et on peut même dire qu'il y a $n+1$ sous-espaces propres et qu'ils sont donc tous de dimension 1 (étant en somme directe dans un espace de dimension $n+1$).

On a même mieux. $-\psi(p)$ est valeur propre de $\varphi_\alpha|_{F_p}$ mais pas de $\varphi_\alpha|_{F_{p-1}}$. Un vecteur propre associé à $-\psi(p)$ (qui engendre le sous-espace propre associé) est donc de degré p .

Finalement, on a montré que φ_α possède $p+1$ sous-espaces propres de dimension 1, engendré par des polynômes de degrés $0, 1, \dots, n$ et orthogonaux entre eux (les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont deux à deux orthogonaux).

III.B.5 $P_0 = 1$ est vecteur propre de φ_α associé à la valeur propre 0. Si P est vecteur propre de degré ≥ 1 , il est associé à une valeur propre non nulle et est orthogonal à P_0 . On a donc

$$\int_{-1}^1 P(t)(1-t^2)^{\alpha-1/2} dt = S_\alpha(P_0, P) = 0$$

$t \mapsto P(t)(1-t^2)^{\alpha-1/2}$ étant continue sur $] -1, 1[$, elle serait nulle si elle restait de signe constant. On est donc certains que P s'annule sur $] -1, 1[$.

III.C.1 La question **III.B** indique qu'il existe un vecteur propre P_k de φ_1 de degré k et que deux tels vecteurs propres sont dans le même sous-espace propre et donc colinéaires (puisque les sous-espaces propres sont de dimension 1). Quitte à multiplier par -1 , on peut supposer que le coefficient dominant de P_k est positif et en posant $T_k = \frac{1}{\|P_k\|} P_k$ on obtient un polynôme vecteur propre de φ_1 de degré k , de norme 1 et de coefficient dominant positif.

Si R_k en est un autre, il existe λ tel que $R_k = \lambda T_k$. En passant aux normes, on a $|\lambda| = 1$. En regardant les coefficients dominants, on a $\lambda > 0$. Finalement, on a $R_k = T_k$ ce qui donne l'unicité voulue.

III.C.2 On remarque que $1 - 2x \cos(t) + x^2 = (x - e^{it})(x - e^{-it})$ puis

$$\frac{1}{1 - 2x \cos(t) + x^2} = \frac{1}{2i \sin(t)} \left(\frac{1}{x - e^{it}} - \frac{1}{x - e^{-it}} \right)$$

En écrivant que $\frac{1}{x - e^{it}} = -\frac{e^{-it}}{1 - e^{-it}x}$ on montre que ce terme est DSE sur $] -1, 1[$. On procède de

même pour $\frac{1}{x-e^{-it}}$. On obtient finalement que

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{1 - 2x \cos(t) + x^2} &= \frac{1}{2i \sin(t)} \left(-e^{-it} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-int} x^n + e^{it} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{int} x^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((n+1)t)}{\sin(t)} x^n \end{aligned}$$

On a donc montré que H_t est DSE sur $] -1, 1[$ et explicité son développement.

III.C.3 D'après la question **II.C.5** et l'unicité des DSE, on en déduit que

$$V_n(\cos(t)) = \frac{\sin((n+1)t)}{\sin(t)}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in]0, \pi[$.

III.C.4 Notons $\psi : t \mapsto \sin(t)V_n(\cos(t)) - \sin((n+1)t)$. Avec la question précédente, on a immédiatement $\psi = 0$ et donc $\psi'' = 0$. En dérivant deux fois, on obtient aussi, après des simplifications

$$\psi''(t) = \sin(t) (n(n+2)V_n(\cos(t)) + \varphi_1(V_n)(\cos(t)))$$

On en déduit que

$$\forall t \in]0, \pi[, \quad \varphi_1(V_n)(\cos(t)) = -n(n+2)V_n(\cos(t))$$

ou encore que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \varphi_1(V_n)(x) = -n(n+2)V_n(x)$$

V_n étant un polynôme (récurrence simple) et deux polynômes égaux sur $] -1, 1[$ étant égaux partout, on a donc

$$\varphi_1(V_n) = -n(n+2)V_n$$

III.C.5 V_n et T_n sont deux polynômes propres de φ_1 de degré 1 et donc proportionnels (on l'a justifié en **III.C.1**). Notons λ le réel tel que $V_n = \lambda T_n$. Comme $\|T_n\|^2 = 1$, on a

$$\lambda^2 = \|V_n\|^2 = \int_{-1}^1 V_n(t)^2 \sqrt{1-t^2} dt$$

$u \mapsto \cos(u)$ étant un C^1 difféomorphisme de $]0, \pi[$ dans $] -1, 1[$, on peut poser $t = \cos(u)$ dans l'intégrale précédente et obtenir (en utilisant $\sin^2(u) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2u))$)

$$\lambda^2 = \int_0^\pi V_n(\cos(u))^2 \sin^2(u) du = \int_0^\pi \sin^2((n+1)u) du = \frac{\pi}{2}$$

Comme le coefficient dominant de T_n est positif et que celui de V_n l'est aussi (il vaut 2^n d'après (I.1)) on a finalement $\lambda < 0$ et

$$V_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}} T_n$$

III.C.6 Avec **III.C.3** on voit que V_n s'annule en $\cos(t)$ pour les valeurs de $t \in]0, \pi[$ telles que $\sin((n+1)t) = 0$. C'est donc le cas si $t \in \{\frac{k\pi}{n+1}, 1 \leq k \leq n\}$. V_n s'annule donc pour les valeurs

$$x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \quad 1 \leq k \leq n$$

$\cos$ étant bijective de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$, les x_k sont deux à deux distincts. Ce sont n racines de T_n et comme T_n est de degré n , ce sont exactement toutes les racines de T_n .