ENONCÉ ET UN CORRIGÉ DE MINES PONTS 22 MATHS2
SADIK OMAR

AUTOUR DES EXPONENTIELLES DE MATRICES

Dans tout le sujet, le corps $\mathbf{K}$ sera $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, et n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 .

On note $\|\cdot\|$ une norme sur l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, vérifiant les propriétés

$$\|I_n\| = 1.$$
$$\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbf{K}))^2 \quad \|AB\| \leq \|A\|\|B\|.$$

On rappelle que l'exponentielle d'une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est la matrice, notée e^A, ou bien $\exp(A)$, définie par

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

On rappelle que, pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, l'application

$$f_A : \mathbf{R} \to \mathscr{M}_n(\mathbf{K}), \quad t \mapsto f_A(t) = e^{tA}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, avec

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad f_A'(t) = Ae^{tA} = e^{tA}A$$

On admettra que, si A et B sont deux matrices semblables de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, plus précisément si on a $B = P^{-1}AP$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, alors

$$e^B = P^{-1}e^A P$$

Si A et B sont deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, on définit leur crochet de Lie par

$$[A,B] = AB - BA$$

La partie 4 du problème est indépendante des parties 2 et 3.

1. Questions préliminaires

On se donne deux matrices A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. On suppose dans les questions 1) et 2) que A et B commutent.

1) Montrer que les matrices A et e^B commutent.

On définit une application

$$\begin{array}{rcl} g \ : \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \\ t & \longmapsto & g(t) = e^{t(A+B)}e^{-tB} \end{array}$$

2) Montrer que l'application g, et l'application f_A définie en préambule, sont solutions d'un même problème de Cauchy. En déduire une démonstration de la relation

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}. \qquad (1)$$

3) Réciproquement, on suppose la relation (1) satisfaite. En dérivant deux fois cette relation par rapport à la variable réelle t, montrer que les matrices A et B commutent.

4) Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, prouver la relation $\left\| e^A \right\| \leq e^{\|A\|}$.

5) Montrer que $\det\left(e^A\right) = e^{\mathrm{tr}(A)}$

2. Formule de Trotter-Kato

Dans cette partie, on note A et B deux matrices quelconques de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. L'objectif est de prouver la relation

$$\lim_{k\to+\infty} \left(e^{\frac{A}{k}}e^{\frac{B}{k}}\right)^k = e^{A+B} \text{ ou } \lim_{k\to+\infty} \left(\exp\left(\frac{A}{k}\right)\exp\left(\frac{B}{k}\right)\right)^k = \exp(A+B) \qquad (2)$$

Pour tout k entier naturel non nul, on pose

$$X_k = \exp\left(\frac{A}{k}\right)\exp\left(\frac{B}{k}\right) \text{ et } Y_k = \exp\left(\frac{A+B}{k}\right)$$

6) Prouver les majorations

$$\forall k \in \mathbf{N}^* \quad \|X_k\| \leq \exp\left(\frac{\|A\| + \|B\|}{k}\right) \text{ et } \|Y_k\| \leq \exp\left(\frac{\|A\| + \|B\|}{k}\right)$$

On introduit la fonction

$$\begin{array}{l} h : \mathbf{R} \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \\ \quad t \longmapsto h(t) = e^{tA}e^{tB} - e^{t(A+B)} \end{array}$$

7) Montrer que

$$X_k - Y_k = O\left(\frac{1}{k^2}\right) \text{ lorsque } k \to +\infty$$

8) Vérifier la relation

$$X_k^k - Y_k^k = \sum_{i=0}^{k-1} X_k^i \,(X_k - Y_k)\, Y_k^{k-i-1}$$

En déduire la relation (2).

3. Vers les algèbres de Lie

Dans cette partie, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$. Pour tout n entier naturel, $n \geq 2$, on introduit l'ensemble, dit groupe spécial linéaire :

$$\mathrm{SL}_n(\mathbf{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mid \det(M) = 1\}$$

Si G est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, on introduit son algèbre de Lie :

$$\mathscr{A}_G = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mid \forall t \in \mathbf{R} \quad e^{tM} \in G\right\}$$

L'ensemble $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$, ainsi que le groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$, sont bien des sous-groupes fermés de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$. On ne demande pas de le démontrer.

9) Déterminer $\mathscr{A}_G$ lorsque $G = \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$.

10) Si $G = \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$, montrer que $\mathscr{A}_G = \mathscr{A}_n(\mathbf{R})$, ensemble des matrices antisymétriques.

Dans les questions 11) à 14), G est un sous-groupe fermé quelconque de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

11) En utilisant la partie 2, montrer que $\mathscr{A}_G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$

12) Soient $A \in \mathscr{A}_G$ et $B \in \mathscr{A}_G$. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} u : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ t &\longmapsto u(t) = e^{tA} \cdot B \cdot e^{-tA} \end{aligned}$$

est à valeurs dans $\mathscr{A}_G$.

13) En déduire que $\mathscr{A}_G$ est stable par le crochet de Lie, i.e.

$$\forall A \in \mathscr{A}_G, \forall B \in \mathscr{A}_G, [A, B] \in \mathscr{A}_G.$$

On rappelle que, si M - est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on dit que M est tangente à G en I_n s'il existe $\varepsilon > 0$ et une application $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to G$, dérivable, telle que $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = M$. L'ensemble des matrices tangentes à G en I_n est appelé espace tangent à G en I_n, et noté $\mathscr{T}_{I_n}(G)$.

On rappelle aussi que l'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ est différentiable en tout point, par exemple parce qu'elle est polynomiale.

14) Prouver l'inclusion $\mathscr{A}_G \subset \mathscr{T}_{I_n}(G)$.

15) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, que l'on pourra aussi considérer comme matrice complexe, soit l'application $\delta_M : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $t \mapsto \delta_M(t) = \det(I_n + tM)$. En utilisant un développement limité à l'ordre 1 , montrer que δ_M est dérivable en 0 et calculer $\delta'_M(0)$.

16) Montrer que la différentielle au point I_n de l'application $\det : \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ est la forme linéaire "trace".

17) Montrer que, dans les cas particuliers $G = \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ et $G = \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$, on a $\mathscr{T}_{I_n}(G) = \mathscr{A}_G$.

4 Comportement asymptotique

Étude d'un exemple

On considère deux nombres complexes distincts α et β. On suppose qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbf{C})$ admet α pour valeur propre simple, β pour valeur propre double.

18) Montrer que A est semblable à une matrice de la forme

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & a \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

où a est un certain nombre complexe. Calculer T^n pour n entier naturel, puis e^{tT} pour t réel. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur α et β pour que l'on ait $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{tA} = 0_3$.

Cas général

Dans tout ce qui suit, $\mathbf{K} = \mathbf{C}$. On pose $E = \mathbf{C}^n$. L'espace vectoriel E, identifié à $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{C})$, peut être muni d'une quelconque norme notée $\|\cdot\|_E$, on rappelle qu'elles sont toutes équivalentes. On se donne $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice carrée à coefficients complexes, et on note u l'endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ canoniquement associé à cette matrice. On s'intéresse au comportement asymptotique de la fonction f_A introduite dans le préambule, et à celui des fonctions vectorielles solutions du système différentiel linéaire à coefficients constants $X' = AX$. Pour tout t réel et pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on notera $v_{i,j}(t)$ le coefficient d'indices (i,j) de la matrice e^{tA}. Ainsi,

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad f_A(t) = e^{tA} = \big(v_{i,j}(t)\big)_{1 \le i,j \le n} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$$

Pour toute valeur propre λ de la matrice A, on note m_λ sa multiplicité, et on introduit le sous-espace vectoriel

$$F_\lambda = \operatorname{Ker}\left((A-\lambda I_n)^{m_\lambda}\right) = \operatorname{Ker}\left((u-\lambda \operatorname{Id}_E)^{m_\lambda}\right)$$

On posera aussi $\alpha = \max\limits_{\lambda\in \operatorname{Sp}(A)} \operatorname{Re}(\lambda)$.

19) Montrer que, si $\lim\limits_{t\to+\infty} f_A(t) = 0_n$, alors $\alpha < 0$.

20) Montrer que $\mathbb{C}^n = \bigoplus\limits_{\lambda\in \operatorname{Sp}(A)} F_\lambda$.

21) En déduire l'existence de trois matrices P, D et N dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ telles que :

$$\begin{aligned}
&P \text{ est inversible,}\\
&D \text{ est diagonale,}\\
&N \text{ est nilpotente,}\\
&ND = DN\\
&A = P(D+N)P^{-1}\\
&\chi_A = \chi_D
\end{aligned}$$

22) En déduire qu'il existe un entier naturel p tel que, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on ait

$$v_{i,j}(t) = O\left(t^p e^{\alpha t}\right) \text{ lorsque } t \to +\infty$$

23) Étudier la réciproque de la question 19).

24) On suppose, dans cette question seulement, que les valeurs propres de la matrice A ont toutes des parties réelles positives ou nulles. Montrer que, si $X \in \mathbf{C}^n$, on a

$$\lim_{t\to+\infty} e^{tA}X = 0 \Longleftrightarrow X = 0$$

Dans les questions qui suivent, on introduit les polynômes suivants : $P_s(X) = \prod\limits_{\substack{\lambda\in\operatorname{Sp}(A)\\ \operatorname{Re}(\lambda)<0}} (X-\lambda)^{m_\lambda}$, $P_i(X) = \prod\limits_{\substack{\lambda\in\operatorname{Sp}(A)\\ \operatorname{Re}(\lambda)>0}} (X-\lambda)^{m_\lambda}$, $P_n(X) = \prod\limits_{\substack{\lambda\in\operatorname{Sp}(A)\\ \operatorname{Re}(\lambda)=0}} (X-\lambda)^{m_\lambda}$, et les sous-espaces $E_s = \operatorname{Ker}(P_s(A))$, $E_i = \operatorname{Ker}(P_i(A))$ et $E_n = \operatorname{Ker}(P_n(A))$ de $E = \mathbf{C}^n$. Les indices s, i, n signifient respectivement stable, instable et neutre.

25) Après avoir justifié que $E = E_s \oplus E_i \oplus E_n$, montrer que

$$E_s = \left\{X \in E \mid \lim_{t\to+\infty} e^{tA}X = 0\right\}.$$

On prouverait de même, mais ce n'est pas demandé, que

$$E_i = \left\{X \in E \mid \lim_{t\to-\infty} e^{tA}X = 0\right\}.$$

26) Montrer que

$$E_n = \left\{X \in E \mid \exists C \in \mathbf{R}_+^* \exists p \in \mathbf{N} \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad \left\|e^{tA}X\right\|_E \leq C(1+|t|)^p\right\}$$

E_n est donc l'ensemble des vecteurs X de $\mathbf{C}^n$ tels que la fonction vectorielle $t \mapsto e^{tA}X$ ait un comportement polynomial en $-\infty$ et $+\infty$.

FIN DU PROBLÈME

1. Questions préliminaires

1) On a $AB = BA$ et les applications $M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow M_n(\mathbb{K}) : M \longmapsto AM$ et $M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow M_n(\mathbb{K}) : M \longmapsto AM$ sont continues

donc $Ae^B = A\sum_{\rho=0}^{\infty}\frac{B^p}{p!} = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{AB^p}{p!} = \left(\sum_{p=0}^{\infty}\frac{B^p}{p!}\right)A = e^B A$

$\forall\, t \in \mathbb{R} : \quad g(t) = e^{t(A+B)}e^{-tB}$ on a : g est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :

$\forall\, t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} g'(t) &= e^{t(A+B)}(A+B)e^{-tB} + e^{t(A+B)}(-B) \\ &= e^{t(A+B)}Ae^{-tB} \\ &= e^{t(A+B)}e^{-tB}A \\ &= e^{t(A+B)}e^{-tB}A \quad [\text{car} A \text{ et } e^B \text{commutent}] \\ &= g(t)\cdot A \end{aligned}$$

2) On a g er f_A sont solutions du problème de Cauchy suivant : $\begin{cases} y' = y.A \\ y(0) = I_n \end{cases}$

qui admet une unique solution donc $g = f_A$, donc :

$$\forall\, t \in \mathbb{R} : \quad e^{t(A+B)}e^{-tB} = e^{tA}$$

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \quad e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$$

3) On dérive la relation précédente :

Soit $t \in \mathbb{R} : \quad e^{t(A+B)}(A+B) = e^{tA}A\cdot e^{tB} + e^{tA}e^{tB}B$

Pour $t = 0 : \quad (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ donc $A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$, alors $AB = BA$.

4) L'application norme est continue, donc :

$\|e^A\| = \left\|\sum_{p=0}^{\infty}\frac{A^P}{P!}\right\| = \left\|\lim_{N\to\infty}\sum_{p=0}^{N}\frac{A^p}{p!}\right\| = \lim_{N\to+\infty}\left\|\sum_{p=0}^{N}\frac{A^P}{p!}\right\| \le \lim_{N\to\infty}\sum_{p=0}^{N}\frac{|A^p\|}{p!} \leqslant \sum_{p=0}^{\infty}\frac{\|A\|^p}{p!} \le e^{\|A\|}$.

5) On suppose que : $A \in M_n(\mathbb{R})$, donc A est trigonalisable. donc $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$

et $\Delta = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1}\ddots & * \\ (0) & \ddots e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$, donc $e^A = Pe^{\Delta}p^{-1}$

Mais e^{Δ} est de La forme $\begin{pmatrix} e^{\lambda_1}\ddots & ** \\ (0) & \ddots e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$

donc $\det e^A = \det e^\Delta = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_I} = e^{\sum_{i=1}^n \lambda_i} = e^{tr(A)}$:
L'égalité est vraie aussi si $A \in M_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{C})$.

2. Formule de Trotter-Kato

6)

$$\begin{aligned} \|X_k\| &\leqslant \exp\frac{\|A\|}{k}\exp\frac{\|B\|}{k} \quad \text{Question4)} \\ &\leqslant \exp\left(\frac{\|A\|+\|B\|}{k}\right) \end{aligned}$$

de même pour $\|Y_k\| \leqslant \exp\left(\frac{\|A\|+\|B\|}{k}\right)$ Question 4.

7)

$$\begin{array}{rcl} X_k - Y_k &=& h\left(\frac{1}{k}\right) \\ &=& h(0) + \frac{1}{k}h'(0) + O(\frac{1}{k^2}) \\ &=& O(\frac{1}{k^2}) \end{array}$$

Car $h(0) = 0$ et $h'(0) = A + B - (A+B) = 0$.

8) h est C^1 sur $\mathbb{R}$ donc admet un DL à l'ordre 1 en 0.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-1} X_k^i (X_k - Y_k) Y_k^{k-i-1} &= \sum_{i=0}^{k-1} X_k^{i+1} Y_k^{k-i-1} - X_k^i Y_k^{k-i} \\ &= X_k^k - Y_k^k \text{ (télescopage)} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \left\| X_k^k - Y_k^k \right\| &\leqslant \sum_{i=0}^{k-1} \|X_k\|^i \|X_k - Y_k\| \|Y_k\|^{k-i-1} \\ &\leqslant \left(\exp\frac{\|A+B\|}{k}\right)^{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} \|X_k - Y_k\| \quad (Q6) \\ &\leqslant \exp(\|A\|+\|B\|) \quad k\|X_k - Y_k\| \quad \text{car} \quad k-1 \leq k \end{aligned}$$

or $k\|X_k - Y_k\| = O\left(\frac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'où la relation (2)

3. Vers les algèbres de Lie

9) Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ et $t \in \mathbb{R}$, supposons que $M \in \mathscr{A}_G$; alors $\forall t \in \mathbb{R}$: $\det\left(e^{tM}\right) = 1$, alors $\forall t \in \mathbb{R} : e^{ttr(M)} = 1 : (Q5)$.

Par dérivation : $\forall t \in \mathbb{R}$: $\mathrm{tr}(M)e^{ttr(M)} = 0$, alors $M \in \mathrm{Ker}(Tr)$. alors $\mathscr{A}_G \subset \mathrm{Ker}(Tr)$.

Supposons maintenant que $M \in \mathrm{Ker}(Tr)$ alors : $\forall t \in \mathbb{R} : \det\left(e^{tM}\right) = 1$ alors $M \in \mathscr{A}_G$ conséquence :

$$\mathscr{A}_G = \mathrm{Ker}(Tr)$$

10) Ici $G = O_n(\mathbb{R})$: soit $M \in M_n(\mathbb{R})$

Supposons que $M \in \mathscr{A}_G$

donc $\forall t \in \mathbb{R}; e^{tM}\left({}^T\left(e^{tM}\right)\right) = I_n$

donc $\forall t \in \mathbb{R}$ $\quad e^{t(M+{}^TM)} = I_n$, car les matrices e^M et $e^{{}^TM}$ commutent.

Par dérivation ; $M + {}^TM = 0$, alors $M \in A_n(\mathbb{R})$.

donc $\mathscr{A}_G \subset A_n(\mathbb{R}$: et l'autre inclusion est évidente.

11) On a $\mathscr{A}_G \subset M_n(\mathbb{R})$ et $M = 0 \in \mathscr{A}_G$;

Soit $A, B \in \mathscr{A}_G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$: Montrons que $A + \lambda B \in \mathscr{A}_G$:

Montrons que $\forall t \in \mathbb{R}_i$ $\quad e^{t(A+\lambda B)} \in G$.

Soit $t \in \mathbb{R}$, on a $e^{t(A+\lambda B)} = \lim\limits_{k\to+\infty}\left(\exp\dfrac{tA}{k}\exp\dfrac{\lambda tB}{k}\right)^k$ c'est la relation (2)

Soit $k \in \mathbb{N}^*$: On a $\exp\dfrac{t}{k}A; \exp\dfrac{\lambda t}{k}B \in G$ qui est 1 groupe donc $\left(\exp\dfrac{t}{k}A\exp\dfrac{\lambda t}{k}B\right)^k \in G$.

et puisque G est fermé, alors $e^{t(A+\lambda B)} \in G$ comme limite $d'1$ suite d'éléments de G. Alors $A + \lambda B \in \mathscr{A}_G$

Donc $\mathscr{A}_G$ est 1 sev de $M_n(\mathbb{R})$.

12) Soient $A, B \in \mathscr{A}_G$: et $t \in \mathbb{R}$. Montrons que $e^{tA}Be^{-tA} \in \mathscr{A}_G$:

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$: On a $e^{\alpha u(t)} = e^{tA}e^{\alpha B}e^{-tA}$ car e^{tA} est l'inverse de e^{-tA}.

Alors $e^{\alpha u(t)} \in G$, par conséquent $u(t) \in \mathscr{A}_G$.

13) Soit $t \in R$, $u'(t) = e^{tA}ABe^{-tA} - e^{tA}BAe^{-tA}$ et $u'(0) = [A, B]$.

Or $u'(0) = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{u(t) - u(0)}{t}$, par la caractérisation séquentiel de la limite, $u'(0) = \lim\limits_{k\to+\infty} k\left(u\left(\dfrac{1}{k}\right) - u(0)\right)$ et $\mathscr{A}_G$ est un sous espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ donc fermé. alors $[A, B] \in \mathscr{A}_G$

14) Soit $A \in \mathscr{A}_G$, donc $\forall t \in \mathbb{R}, e^{tA} \in G$.

Soit $\gamma] -1,1[\longrightarrow G, t \longmapsto e^{tA}$, γ est dérivable sur $]-1,1[$ et $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = A$. Alors $A \in T_{I_n}(G)$.

15) Soit $t \in \mathbb{R}$ et $M \in M_(\mathbb{R}) \subset M_(\mathbb{C})$, donc trigonalisable, alors A s'écrit $A = P\Delta P^{-1}$, avec $\Delta = \text{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ alors,

$\delta_M(t) = \det(I_n + tP\Delta P^{-1}) = \det(I_n + t\Delta) = \prod_{i=1}^{n}(1+t\lambda_i)$.

Donc $\delta'_M(t) = \sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\lambda_i(1+t\lambda_j)$, alors $\delta'_M(0) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = Tr(M)$.

Par conséquent $\delta_M(t) = \delta_M(0) + t\delta'_M(0) + o(t) = 1 + tTr(M) + o(t)$.

16) On a $\det(I_n + H) = \det(I_n) + d(\det)_{I_n}(H) + o(||H||)$ pour H tend vers 0. car det est différentiable sue $M_(\mathbb{R})$.

Alors pour $A \in M_(\mathbb{R})$, on a $\det(I_n + tA) = \det(I_n) + td(\det)_{I_n}(A) + o(|t|)$ quand t est proche de 0.

Qui s'écrit $\dfrac{\delta(t)-\delta(0)}{t} = d(\det)_{I_n}(A) + o(1)$, donc $d(\det)_{I_n} = Tr$.

17) La question 14 donne une inclusion.

Soit $A \in \mathscr{T}_{I_n}$, $\exists\varepsilon > 0$ et une application $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to G$, dérivable, telle que $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = A$,

• Si $G = SL_n(\mathbb{R})$, et $t \in \mathbb{R}$, alors $\gamma(t) \in G$, donc $\det(\gamma(t)) = 1$, en dérivant l'expression obtenue, on obtient :

$d(\det)(\gamma(t))(\gamma'(t)) = 0$, soit en évaluant en 0, $d(\det)(I_n)(A)$, ce qui se traduit par $Tr(A) = 0$ par la question 16.

Alors $A \in \mathscr{A}_G$ par la question 9.

• Si $G = O_n(\mathbb{R})$, et $t \in \mathbb{R}$, alors $\gamma(t) \in G$, donc ${}^T(\gamma(t))(\gamma(t)) = I_n$, en dérivant l'expression obtenue et en évaluant en 0 on obtient :

${}^T(\gamma'(0))(\gamma(0)) + {}^T(\gamma(0))(\gamma'(0)) = 0$ car la transposée est linéaire, donc continue.

Alors ${}^TA + A = 0$, donc par la question 10, $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{A}_G$

D'où le résultat.

Comportement asymptotique

18) Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé a A et β La base canonique de $\mathbb{C}^3$.

On a $\text{Ker}(u - \alpha id) \oplus \text{Ker}(u - \beta id)^2 = \mathbb{C}^3$, c'est le thm de C.H et le lemme des noyaux.

le premier espace est de dim 1 et le $2^{\text{ème}}$ est de dim 2.
soit (e_1) une base de $E_\alpha(u)$ et $e_2 \in E_\beta(u) \subset \mathrm{Ker}(u-\beta id)^2$ et soit $e_3 \in \mathbb{C}^3 / (e_2, e_3)$ base de $\ker(u-\beta id)^2$, alors $\beta'(e_1, e_2, e_3)$ est 1 base de $\mathbb{C}^3$.
Puisque. $\mathrm{Ker}(u-\beta id)^2$ est stable par u, alors la matrice de u dans cette base est de la forme T donné dans l'énoncé.
Par récurrence :

$$\forall p \in \mathbb{N}^* : T^p = \begin{pmatrix} \alpha^p & 0 & 0 \\ 0 & \beta^p & pa\beta^{p-1} \\ 0 & 0 & \beta^p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e^{tT} = \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 & 0 \\ 0 & e^\beta & ate^\beta \\ 0 & 0 & e^\beta \end{pmatrix}$$

$\exists Q \in GL_n(\mathbb{C}) / \quad e^{tA} = QTQ^{-1}$, donc :

$$\exists Q \in GL_n(\mathbb{C}) / \quad e^{tA} = Qe^{tT}Q^{-1} = Q\begin{pmatrix} e^{t\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t\beta} & ate^{t\beta} \\ 0 & 0 & e^{t\beta} \end{pmatrix}Q^{-1}$$

Par la continuité de $M \longmapsto PMP^{-1}$, on a alors :

$$\begin{aligned} \lim_{t\to+\infty} e^{tA} = 0 &\iff \lim_{t\to+\infty} e^{tT} = 0 \\ &\iff \lim_{t\to+\infty} e^{t\alpha} = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} e^{t\beta} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} te^{t\beta} = 0 \\ &\iff \mathrm{Re}(\alpha) < 0 \text{ et } \mathrm{Re}(\beta) < 0 \end{aligned}$$

.

19) Soit λ la plus grande valeur propre en module de A, $\exists X \in \mathbb{C}^n$ non nul qui vérifie $AX = \lambda X$
Par continuité de l'application $M \longmapsto MX$, alors

$$e^{tA}X = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\frac{(tA)^p}{p!}X\right) = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\frac{\lambda^p}{p!}X\right) = \left(\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(t\lambda)^p}{p!}\right)X = e^{t\lambda}X.$$

Donc si $\lim\limits_{t\to+\infty} f_A(t) = 0$, alors $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{t\lambda}X$, on a $X \neq 0$ si a est l'une de ses composantes non nulles alors $\lim\limits_{t\to+\infty} ae^{t\lambda} = 0$, donc $Re(\lambda) < 0$, alors $\alpha < 0$.

20) C'est le théorème de Cayley-Hamilton et le lemme de décomposition des noyaux.

21) Soit $\lambda_{A1} \ldots, \lambda_r$ les voleurs propres de 4 et u_i induit de μ sen F_{λ_i}, soit m_i sa dimension :

• Soit β_i une base de F_{λ_i}, alors $\beta = \bigcup\limits_{i=1}^{r} \beta_i$ est une base de $\mathbb{C}^n$ (Q20).

• $i \in [[1, r]]$: F_{λ_i} est stable par u, donc $\mathrm{mat}_\beta(u)$ est de la forme $\begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_r \end{pmatrix} =$ A'. On a alors $\chi_\mu = \prod\limits_{i=1}^{r} \chi_{u_i}$ et $A_i = \mathrm{mat}_{\beta i}(u_i)$

• Soit $x \in \mathbb{C}^n$, si $x \in F_{\lambda_i}$, alors $(u_i - \lambda_i id)^{m_{\lambda_i}}(x) = 0$ donc $(u_i - \lambda_i id)^{m_{\lambda_i}} = 0$, donc $\pi_{u_i} / (X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}}$ d'où $S_p(u_i) = \{\lambda_i\}$ car le corps de base est $\mathbb{C}$.

Donc $\chi_{u_i} = (X - \lambda_i)^{m_i}$, alors $\prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)^{m_i} = \prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{m_{\lambda_i}}$ l'unicité de la décomposition d'un polynôme en facteurs irréductibles, donne : $\forall i \in [[1, r]]$:

$$m_i = m_{\lambda_i}$$

• On a : $u_i = u_i - \lambda_i id + \lambda_i id$ de ce qui précède. u_i - $\lambda_i id$ est nilpotent et $\lambda_i id$ est diagonalisable. Posons $n_i = u_i - \lambda_i id$ et $d_i = \lambda_i id_i$ donc $A_i = D_i + N_i$ avec $N_i = \mathrm{mat}_{\beta_i}(d_i)$ et $D_i = \mathrm{mat}_{\beta_i}(n_i)$

Donc $A' = \begin{pmatrix} D_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & D_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & N_r \end{pmatrix} = D + N.$

Chaque D_i est une diagonale $\lambda_i I_{m_{\lambda_i}}$, donc commutent avec N_i, alors D et N commutent et D est une diagonale aussi.

• Les matrices A et A' représentent u dans deux bases, elles sont semblables, alors $\exists P$ inversible telles que $A = PA'P^{-1} = P(D+N)P^{-1}$.

• Chaque N_i est nilpotente, donc N aussi, plus précisément $N^n = 0$.

• Il apparait bien que le polynôme caractéristique de D est $\prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{m_{\lambda_i}}$, donc $\chi_A = \chi_D$.

22) Soit $t \in \mathbb{R}$, alors $e^{tA} = Pe^{tD}e^{tN}P^{-1}$ c'est la question 2, or N est nilpotente donc $e^{tN} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k}{k!}N^k$, donc les cœfficients de e^{tN} sont des polynômes en t.

Et, $e^{tD} = Diag(e^{t\lambda_1}, ..., e^{t\lambda_n})$, donc les coefficients de $e^{tD}e^{tN}$ sont de la forme $P(t)e^{t\lambda_i}$, avec P polynôme.

$\exists p \in \mathbb{N}$, tel que $\forall (i,j) \in [[1, n]]^2$, $v_{i,j}(t) = O(t^p e^{\alpha t})$ quand $t \to +\infty$.

23) On a $\lim\limits_{t\to+\infty} t^p e^{\alpha t} = 0$, donc $\forall (i,j) \in [[1,n]]^2$, $\lim\limits_{t\to+\infty} v_{i,j}(t) = 0$.

Alors $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{tA} = 0$.

24) Si $X = 0$, alors $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{tA}X = 0$.

Réciproquement supposons que $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{tA}X = 0$, par la continuité du produit matricielle et le fait P est inversible, alors $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{tD}e^{tN}X = 0$, posons $N^k = \left(b_{i,j}^{(k)}\right)_{i,j}$, alors $e^{tD}e^{tN} = \left(e^{t\lambda_i}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k}{k!}b_{i,j}^{(k)}\right)_{i,j}$

Si $x_1, ..., x_n$ sont les composantes du vecteur X, alors la i-ème composantes du vecteur $e^{tD}e^{tN}X$ est $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j e^{t\lambda_i} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} b_{i,j}^{(k)} = e^{t\lambda_i} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} \sum_{j=1}^{n} x_j b_{i,j}^{(k)}$, alors :

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} e^{tD}e^{tN}X = 0 &\implies \forall i \in [[1,n]],\quad \lim_{t\to+\infty} e^{t\lambda_i} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} \sum_{j=1}^{n} x_j b_{i,j}^{(k)} = 0 \\
&\implies \forall i \in [[1,n]], \lim_{t\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} \sum_{j=1}^{n} x_j b_{i,j}^{(k)} = 0; \text{car}; Re(\lambda_i) \geq 0 \\
&\implies \forall i \in [[1,n]], \forall k \in [[0,n-1]],\quad \sum_{j=1}^{n} x_j b_{i,j}^{(k)} = 0 \\
&\implies \forall i \in [[1,n]], \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1^k}{k!} \sum_{j=1}^{n} x_j b_{i,j}^{(k)} = 0 \\
&\implies e^N X = 0 \\
&\implies e^{-N}e^N X = 0 \\
&\implies X = 0
\end{aligned}$$

25) Soit I l'ensemble des valeurs propres de A ayant une partie réelle < 0, J l'ensemble des valeurs propres de A ayant une partie réelle > 0 et K l'ensemble des valeurs propres de A ayant une partie réelle $= 0$;

On a $\chi_A = P_s P_i P_n$ et ces trois polynômes sont premiers entre eux deux à deux, par application du lemme des noyaux, on a :

$\displaystyle\bigoplus_{\lambda\in \mathrm{Sp}(A)} F_\lambda = \oplus_{\lambda\in I} F_\lambda \oplus_{\lambda\in J} F_\lambda \oplus_{\lambda\in K} F_\lambda = Ker(\chi_A) = \mathbb{C}^n$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton, qui s'écrit $E = E_s \oplus E_i \oplus E_n$.

D'après la question 23, on a $E_s \subset \{X \in E \quad \backslash \quad \lim_{t\to+\infty} e^{tA}X = 0\}$.

Réciproquement soit $X \in E$, tel que $\lim_{t\to+\infty} e^{tA}X = 0$.

On a $\exists X_s \in E_s, X_i \in E_i$ et $X_n \in E_n$ tels que $X = X_s + X_i + X_n$.

Les espaces E_s, E_i et E_n sont stable par A (Par l'endomorphisme canoniquement associé à A), et ces espaces sont de dimensions finies donc ce sont des fermés, alors ils sont stables par e^{tA}.

Alors $e^{tA}X_s \in E_s$, $e^{tA}X_i \in E_i$ et $e^{tA}X_n \in E_n$.

En utilisant le fait q'en dimension finie une limite est nulle ssi toutes ses composantes dans une base arbitraire sont nulles, alors :

$\lim_{t\to+\infty} e^{tA}X_s = 0$ qui est toujours vraie par la question 19.

$\lim_{t\to+\infty} e^{tA}X_i = 0$ et $\lim_{t\to+\infty} e^{tA}X_n = 0$,

Si u_i désigne l'endomorphisme induit par u sur E_i, et u_n désigne l'endomorphisme induit par u sur E_n, Soit A_i la matrice de u_i dans une base de E_i et A_n la matrice de u_n dans une base de E_n, alors

$\lim\limits_{t\to+\infty} e^{tA}X_i = 0$ ce traduit par, $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{tA_i}X_i = 0$ donne $X_i = 0$ car $Sp(A_i) \subset J$ et d'après Q24

De même $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{tA}X_n = 0$ ce traduit par, $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{tA_n}X_n = 0$ donne $X_n = 0$ car $Sp(A_n) \subset K$ et d'après Q24

$X_i = X_n = 0$, alors $X = X_s \in E_s$, d'où l'égalité.

26) Soit $X \in E_n$ et $t \in \mathbb{R}$; On reprend les notations de $Q25$:

$e^{tA}X = e^{tu_n}X = e^{tA_n}$, On écrit d'après la question 21 $A_n = P(D_n + N_n)P^{-1}$, on prend $||PX|| = ||X||_E = \max|x_i|$, on a bien $||.||$ est une norme sur E car P inversible.

Soit d l'indice de nilpotence de N_n, alors :

$$\begin{aligned}\left|e^{t\lambda_i}\sum_{k=0}^{d-1}\frac{t^k}{k!}\sum_{j=1}^{n}x_j b_{i,j}^{(k)}\right| &= \left|\sum_{k=0}^{d-1}\frac{t^k}{k!}\sum_{j=1}^{n}x_j b_{i,j}^{(k)}\right| \quad \text{car} \quad Re(\lambda_i) = 0 \\ &\leq O\Big((1+|t|)^d\Big)\end{aligned}$$

Alors la première inclusion.

Soit maintenant $X \in E$ tel que

$$\exists C \in \mathbb{R}_+^*; \exists p \in \mathbb{N} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \left\|e^{tA}X\right\|_E \leq C(1+|t|)^p$$

Comme dans la question 25, $X = X_s + X_i + X_n$, $e^{tA}X = e^{tu_s}X_s + e^{tu_i}X_i + e^{tu_n}X_n$.

On a $\forall t \in \mathbb{R} \quad \left\|e^{tu_s}X_s\right\|_E \leq C(1+|t|)^p$, Si $X_s \neq 0$,

Alors $e^{t\lambda_i}\displaystyle\sum_{k=0}^{d-1}\frac{t^k}{k!}\sum_{j=1}^{n}x_j b_{i,j}^{(k)} = O((1+|t|)^p)$ ce qui est absurde car $Re(|\lambda_i) < 0$ et en travaillant en $-\infty$, donc $X_s = 0$.

Même travail pour $X_i = 0$, Donc $X = X_n \in E_n$; d'où l'égalité.

Merci de signaler les remarques par sadikoulmeki@yahoo.fr