1 I Inégalité polynomiale de Bernstein

1.1 I.A - Polynôme de Tchebychev

.

1. Q1 Montrons pars récurrence que le degré de (T_n) est égale à n . On a la propriété est vraie pour $n = 0$, et pour $n = 1$ supposons quelle est vraie pour n et n+1 et montrons quelle est vraie pour n+2 on a $T_{n+2} = 2X.T_{n+1} - T_n$ et le degré de $2XT_{n+1} = n + 2$ donc $d^{\check{r}}(T_{n+2}) = n + 2$ (propriété sur les degrés des polynômes).donc $d^{\check{r}}(T_n) = n$.
On a $(T_n)_{0\leq k\leq n}$ est une famille échelonnée en degré de polynômes non nuls de $\mathbb{C}_\ltimes[\mathbb{X}]$ donc libre donc base de $\mathbb{C}_\ltimes[\mathbb{X}]$ (Car le cardinal de la famille est égale à la dimension de $\mathbb{C}_\ltimes[\mathbb{X}]$.

2. Q2 Montrons par récurrence que $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$
la propriété est vraie pour n=0 et n =1 supposons vraie pour n et n +1. on a : $T_{n+2}(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)T_{n+1}(\cos(\theta) - T_n(\cos(\theta)$
$= 2\cos(\theta)\cos((n + 1)\theta) - \cos(n\theta) = \cos((n + 2)\theta)) + \cos(n\theta) - \cos(n\theta)$
$= \cos((n + 2)\theta)$. (car : $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a + b) + \cos(a - b)$. CQFD

3. Q3 Soit $P \in \mathbb{C}_\ltimes[X]$ alors il existe $(a_0, ..., a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tels que $P = \sum_{k=0}^{n} a_kT_k$ (car $(T_n)_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{C}_\ltimes[\mathbb{X}]$).
Donc $P(\cos(\theta) = \sum_{k=0}^{n} a_kT_k(\cos(\theta)) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(k\theta)$
.
Donc $\theta \mapsto P(\cos(\theta)$ est dans δ_n.

4. Q4 on a : $||T_n||_{\mathbb{L}}^{\infty}([0, 1]) = sup_x \in [0, 1]|T_n(x)| = sup_x \in \mathbb{R}|\cos(n\theta)| = 1$.(le sup atteint en zéro).

5. Q5 On montre par récurrence que $|\sin(n\theta)| \leq n|\sin(\theta)|$ la propriété est vraie pour n=0 et n=1. supposons vraie pour n fixé $|\sin((n + 1)\theta)| = |\sin(n\theta)\cos(\theta) + \cos(n\theta)sin(\theta)| \leq n|\sin(\theta) + |\sin(\theta)| = (n + 1)|\sin(\theta)|$. Soit $f(\theta) = T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ alors : $|f^{'}(\theta)| = | - \sin(\theta)T_n^{'}(\cos(\theta))| = n\sin(n\theta))| \leq n^2$.
donc : $||T_n^{'}||_{\mathbb{L}}^{\infty}([0, 1]) = sup_x \in [0, 1]|T_n^{'}(x)| = sup_x \in \mathbb{R}|T_n^{'}(\cos(\theta))| = sup_\theta \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}|\frac{n\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}| = n^2$.(En tendant θ vers zéro)

1.2 I.B - Inégalité de Bernstein

1. Q6 Soit A polynôme scindé de racines simples $(\alpha_1, ..., \alpha_{2n}$.
Soit :$B \in \mathbb{C}_{2n}[X]$ et $R = \sum_{k=1}^{2n} B(\alpha_k)\dfrac{A(X)}{(x - \alpha_k)A'(\alpha_k)}$. montrons que B=R.
on a : pour tout $j \in [|1, 2n|]$: $B(\alpha_j) - R(\alpha_j) = 0$
Or $d^{\check{r}}(B - R) \leq 2n - 1$ et admet au moins 2n racines .donc B = R . CQFD

2. Q7 Soit $P \in \mathbb{C}_2n[X]$ et $P_\lambda(X) = P(\lambda X) - P(\lambda)$.
On a : $P_\lambda(1) = 0$ donc $X - 1$ *divise* P_λ.

3. Q8 On a : $Q_\lambda(1) = \lim_{x\to 1} Q_\lambda(x) = \lim_{x\to 1} \frac{P(\lambda x)-P(\lambda)}{x-1} = \lambda P'(\lambda)$.

4. Q9 Soit $R = X^{2n} + 1$ les racines dans C de R sont les racines 2n ième de : -1 ;
c.a.d les $\omega_k = e^{i\varphi_k}\ avec\ \varphi_k = \dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}$ k dans $[|1, 2n|]$ donc :$R = \prod_{k=1}^{2n}(X - \omega_k)$.

5. Q10 On applique Q6 pour les deux polynômes A= R et B $=Q_\lambda; \alpha_k = \omega_k$.
$R' = 2nX^{2n-1}; doncR'(\omega_k) = -2n(\omega_k)^{-1}$;
on obtient la formule voulue :
$Q_\lambda(X) = \frac{-1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} \frac{P(\lambda\omega_k)-P(\lambda)}{\omega_k-1}\frac{X^{2N}+1}{X-1}\omega_k$.
En remplaçant $Xpar1$ dans la formule ci-dessus et utiliser Q8 $Q_\lambda(1) = \lambda P'(\lambda)$
on obtient : pour tout λ complexe :
$\lambda P'(\lambda) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} P(\lambda\omega_k)\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} - \frac{P(\lambda)}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2}$.

6. Q11 Il suffit de montrer que $\sum_{k=1}^{2n}\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} = -2n^2$, pour cella décomposons la fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q}$ avec $P = 1etQ = X^{2n} + 1$ On a :$F = \sum_{k=1}^{2n}\frac{\lambda_k}{X-\omega_k}$ avec $\lambda_k = \frac{P(\omega_k}{Q'(\omega_k} = \frac{1}{-2n\omega_k)^{-1}}$.
en dérivant les deux membres en 1 on obtient :
$\frac{-2n}{4} = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{\omega_k}{(1-\omega_k)^2}$. donc $\sum_{k=1}^{2n}\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} = -2n^2$, CQFD.

7. Q12 Soit f un élément de δ_n ;
$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt))$alors $f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(\frac{a_k+b_k}{2}e^{ikt} + \frac{a_k-b_k}{2}e^{-ikt})$
donc $e^{int}f(t) = a_0e^{int} + \sum_{k=1}^{n}(\frac{a_k+b_k}{2}e^{i(n+k)t} + \frac{a_k-b_k}{2}e^{i(n-k)t})$.
$=a_0e^{int} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_{n-k}-b_{n-k}}{2}e^{ikt} + \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{a_{k-n}+b_{k-n}}{2}e^{ikt}$.
$= U(e^{it}$ avec $U = a_0X^n + \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_kX^k + \sum_{k=n+1}^{2n}\beta_kX^k$.
$\alpha_k = \frac{a_{k-n}+b_{k-n}}{2}$ pour k dans $[|, n+1, 2n|]; \beta_k = \frac{a_{n-k}-b_{n-k}}{2}$ pour k dans $[|0, n-1|]$ d'où l'existence de U.CQFD

8. Q13 on a :$\frac{2e^{i\varphi_k}}{(1-e^{i\varphi_k})^2} = \frac{2e^{i\varphi_k}}{e^{i\varphi_k}(-2i\sin(\frac{\varphi_k}{2}))^2} = \frac{-1}{2(\sin\frac{\varphi_k}{2})^2}$.
On a : $f(t) = e^{-int}U(e^{it})$ donc $f'(t) = -ine^{-int}U(e^{it}) + ie^{it}e^{-int}U'(e^{it})$
d'après Q11 on obtient $f'(t) = -inf(t) + ie^{-int}\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}U(e^{-in(t+\varphi_k)}\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} + inf(t)$.
Donc $f'(t) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^ke^{-in(t+\varphi_k)}U(e^{i(t+\varphi_k)}\frac{1}{2(\sin\frac{\varphi_k}{2})^2}$.
($ie^{-in\varphi_k} = e^{-i(\frac{\pi}{2}+(k-1)\pi)} = (-1)^{k-1}$).
Donc pour tout t réel on a : $f'(t) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}f(t+\varphi_k)\frac{(-1)^k}{2(\sin\frac{\varphi_k}{2})^2}$.

9. Q14 Daprès Q13 et inégalité triangulaire on a :
$|f'(t)| \leq \frac{||f||_{\mathbb{L}}^{\infty}(\mathbb{R})}{4n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{(\sin\frac{\varphi_k}{2})^2}$.
il suffit alors de montrer que : $\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{(\sin\frac{\varphi_k}{2})^2} = 4n^2$
On applique la formule de Q13 à $g(t) = \sin(nt)$ élément de δ_n et pour t=0 on aura : $n\cos(n.0) = \frac{1}{4n}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\sin(\frac{pi}{2}+k\pi)\frac{1}{(\sin(\frac{\varphi_k}{2})^2}$; or $\sin(\frac{pi}{2}+k\pi) = (-1)^k$ donc $\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{(\sin\frac{\varphi_k}{2})^2} =$

$4n^2$ CQFD.

1.3 I.C Quelques conséquences de l'inégalité

1. Q15 pour tout x dans $[0,1]$*il existe t réel tel que* : $x=\cos(t)$
   on a $P(\cos)$ est dans δ_n donc d'après Q14 :
   $|P'(x)\sqrt{1-x^2} = |P'(\cos(t)\sqrt{1-\cos^2(t)}| \leq |P'(\cos(t)| \leq n||P||^{\infty}_{\mathbb{L}}([0,1])$.

2. Q16 Soit $Q\in\mathbb{C}_{n-1}[X]$ on a : $Q(\cos(n\theta)\sin(\theta) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k\cos(k\theta)\sin(\theta)$
   (car $(T_k)_0 \leq k \leq n-1$; base de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ donc $Q(\cos(\theta)\sin(\theta) = a_0\sin(\theta)+\sum_{k=1} n-1\frac{a_k}{2}(\sin(k+1)\theta-\sin((k-1)\theta)$; dans donc f est dans δ_n or $f'(0)=Q(1)$
   donc $|Q(1)|=|f'(0)| \leq n.sup_0 \leq x \leq 1|f(x)| = n.sup|Q(t)\sqrt{1-t^2}; \qquad t=\cos(x)$
3. Q17 On pose $S_t(X)=R(tX)$ S_t verifie les hypothèses de Q16 donc
   - $|R(t)| = |S_t(1)| \leq n.sup|S_t(x)\sqrt{1-x^2}| \leq n.sup|R(tx)\sqrt{1-(tx)^2}$ pour tout t dans $[-1,1]$ ($\sqrt{1-x^2} \leq \sqrt{1-(tx)^2}$ pour tout t entre -1 et 1). donc $|R(t)| \leq n.sup|R(x)\sqrt{1-x^2}$

4. Q18 si P est de degré inférieur ou égal à n alors $P^{'}$ vérifie les hypothèses de Q17 et Q15 et on aura le résultat voulu.

5. Q19 on peux avoir l'égalité pour $P=T_n$ d'après Q4 et Q5

2 II Inégalité de Bernstein et transformée de Fourier

2.1 II .A -Transformée de Fourier d'une fonction

1. Q20 Soit $f\in\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ alors pour tout ξ réel l'application $x\mapsto f(t)e^{it\xi}$ est continue et $|f(x)e^{ix\xi}| \leq |f(x)|$ et f intégrable sur $\mathbb{R}$ Donc $x\mapsto f(t)e^{it\xi}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ donc $\widehat{f}$ est bien définie. on a pout tout réel x :$\xi\mapsto f(x)e^{-ix\xi}$ est continue et d'après ce qui précède $\widehat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$. (continuité sous le signe intégrale).

2. Q21 l'application $f\mapsto\widehat{f}$ est linéaire car si f et g sont dans $\mathbb{L}^1$ et α réel alors :$\widehat{\alpha f+g}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty}(\alpha f(x)+g(x))e^{-ix\xi}dx = \alpha\widehat{f}(\xi)+\widehat{g}(\xi)$.
   et continue car pour tout ξ réel $|\widehat{f}(\xi)| = |\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ix\xi}dx| \leq \int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx = ||f||_1$ Donc en passant au sup :$||\widehat{f}||_\infty \leq 1.||f||_1$ d'ou la continuité (caractérisation de la continuité des applications linéaires).

3. Q22 pour tout λ strictement positif l'application $x\mapsto\lambda x$ est un C^1 difféomorphisme et f est intégrable donc g aussi intégrable sur IR ; on pose $\lambda x=u$ on aura :
   $\widehat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda x)e^{-ix\xi}dx = \frac{1}{|\lambda|}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-iu\frac{\xi}{\lambda}}du = \frac{1}{|\lambda|}\widehat{f}(\frac{\xi}{\lambda})$.(la valeur absolue de λ car si $\lambda<0$ les bornes de l intégrale se permutent.

2.2 II.B - Produit de convolution

1. Q23 Soit $f\in\mathbb{L}^1(\mathbb{R}; et\ g\in\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})$ alors pour tout x réel l'application $t\mapsto f(t)g(x-t)$ est continue et intégrable sur IR car f et g sont continues et pour tout x ,t réels :$|f(t)g(x-t)| \leq$

$||g||_\infty|f(t)|$ et f intégrable donc $f*g$ est bien définie et on a pour tout x réel en posant x-t =u :
$f*g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)g(x-t)dt=\int_{+\infty}^{-\infty}f(x-u)g(u)(-du)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)f(x-t)dt=g*f(x)$.

2. Q24 Pour tout x réel on a :
$|f*g(x)|=|\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)g(x-t)dt|\leq||g||_\infty\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt=||g||_\infty||f||_1$ donc $f*g$ est bornée et on a :
$||f*g||_\infty\leq||g||_\infty||f||_1$.

3. Q25 Soit k entier tel que g soit de classe C^k et $||g^{(j)}||\infty\leq M_j$ pour tout j entre 0 et k.on a
-Pour tout réel x $t\mapsto f(t)g(x-t)$ est continue et intégrable sur IR
-pour tout réel t :$x\mapsto f(t)g(x-t)$ est de classe C^k sur IR. -Pour tout x et t réels $|f(t)g^(j)(x-t)|\leq M_k|f(t)|=h(t)$h intégrable sur IR.
donc d'après le théorème de dérivation sous l'intégrale $f*g$ est de classe C^k.et on peut dériver sous l'intégral :
$(f*g)^{(j)}(x)=(f*g^{(j)})(x)$.

4. Q26 Pour tout ξ réel on a :

$\widehat{f*g}(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}f*g(x)e^{-ix\xi}dx$
$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ix\xi}(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)g(x-t)dt)dx.$
$=\int_{-\infty}^{+\infty}(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ix\xi}f(t)g(x-t)dx)dt.$
$=\int_{-\infty}^{+\infty}(f(t)(\int_{-\infty}^{+\infty}g(x-t)e^{-ix\xi}dx)dt.$ en posant x-t= u on aura :
$=\int_{-\infty}^{+\infty}(f(t)\int_{-\infty}^{+\infty}g(u)e^{-i(u+t)\xi}du)dt.$
$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-it\xi}dt\int_{-\infty}^{+\infty}g(u)e^{-iu\xi}du.$
$=\widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$. CQFD

5. Q27 On a : φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ composée de fonctions de classe C^∞.
récurrence sur k. pour k=0 évident supposons qu'il existe P_k polynôme tel que $\varphi^{(k)}(t)=P_k(\frac{1}{t})e^{\frac{-1}{t}}$ pour tout t ; $0<t$ pour tout $t>0$ on a :
$\varphi^{(k+1)}(t)=\frac{-1}{t^2}P_k'(\frac{1}{t})e^{\frac{-1}{t}}-\frac{-1}{t^2}P_k(\frac{1}{t})e^{\frac{1}{t}}$.
$=P_{k+1}(\frac{1}{t})e^{\frac{1}{t}}$ avec $P_{k+1}=-X^2(P_k+P_k')$.
pour tout k on a :

$$\lim_{t\to 0}\varphi^{(k)}(t)=0$$

.
Donc d'après le théorème du prolongement de la dérivée φ est de classe C^∞ sur IR.

6. Q28 On a : $\psi(t)=\varphi(1-t^2)$ donc ψ est de classe C^∞. comme composée de fonction de classes C^∞.

7. Q29 On a : θ' est nulle sur les deux intervalles $]-\infty,-1]\quad et\ [1,+\infty[$ donc ils existent A et B réels tels que θ est égale à la constante A sur $]-\infty,-1]$ et égale à B sur $[1,+\infty[$ A et B sont différentes car θ est impaire puisque ψ est pair.

8. Q30 θ définie ci- dessus est de classe C^{∞} positive différente de la fonction nulle alors $a = \int_{-1}^{1} \theta(t)dt$ est non nul et $\theta_1 = a^{-1}\theta$ est de classe C^{∞}.
   Soit $V = x \in \mathbb{R}/\forall t \in [-1, 1] : |x - t| \leq 1$;
   I_V la fonction caractéristique de V : $I_V(t) = 1$ si $t \in V$ et $I_V(t) = 0$ si non.
   enfin soit $\rho = \theta_1 * I_V$ produit de convolution ;alors ρ est de classe C^{∞} d'après Q25 et vérifie :
   -$\rho(x) = 0$ pour tous x réel tel que $|x| > 2$
   -$\rho(x) = 1$ pour tout $x \in [-1, 1]$. en effet si |x|>2 alors x n'appartient pas à V donc $\rho(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(t)I_V(x - t)dt$=0 $\quad (I_V(x - t) = 0)$.
   -si $|x| \leq 1$ alors $\rho(t) = \theta_1 * I_V(x) = \int_{-1}^{1} \theta_1(t)dt = 1$

2.3 II.D-Inégalité de Bernstein

1. Q31 On a :
   -pour tout ξ réel $x \mapsto e^{ix\xi}\rho(\xi)$ est de classe C^1.
   - pour tout x réel $\xi \mapsto e^{ix\xi}\rho(\xi)$ est continue et intégrable sur IR ($|e^{ix\xi}\rho(\xi)| \leq |\rho(\xi)|$ et ρ intégrable sur IR nulle en dehors d'un segment.
   -Pour tout x et ξ réel on a : $|\partial \frac{e^{-s\xi}\rho(\xi)}{\partial x}| \leq |\xi\rho(\xi)|$ qui est intégrable sur IR. donc r est de classe C^1 et on a :
   $r'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi e^{ix\xi}\rho(\xi)d\xi$.

2. Q32 Montrons que $x \mapsto x^2 r(x)$ est bornée pour cela montrons que sa limite en ∞ est nulle on a :
   $x^2 r(x) = \frac{x^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi}\rho(\xi)d\xi =\frac{1}{2\pi} \int_{-2}^{2} x^2 e^{ix\xi}\rho(\xi)d\xi$
   $=[\frac{-ixe^{ix\xi}\rho(\xi)}{2\pi}]_{-2}^{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^{2} ixe^{ix\xi}\rho'(\xi)d\xi$ le membre entre crochés est nul
   $= [\frac{e^{ix\xi}\rho'(\xi)}{2\pi}]_{-2}^{2} + -\frac{1}{2\pi} \int_{-2}^{2} e^{ix\xi}\rho"(\xi)d\xi$; le membre entre crochés est nul
   $= -\frac{1}{2\pi} \int_{-2}^{2} e^{ix\xi}\rho"(\xi)d\xi$. Donc pour x >0 :$|x^2 r(x)| \leqslant \frac{M}{x} + \frac{1}{2x\pi} \int_{-2}^{2} \rho"'(\xi)d\xi$ qui tend vers zéro lorsque x tend vers $+\infty$ de même en $-\infty$. donc $x^2 r(x)$ est bornée au voisinage de l infini or continue donc bornée sur tout segment de IR donc bornée sur IR.

3. Q33 On a $\lambda f \quad et \quad r_\lambda$ vérifie les hypothèses de Q26 donc :
   $\widehat{\lambda f * r_\lambda} = \lambda \widehat{f}.\widehat{r_\lambda}$
   pour tout réel ξ on a : $\widehat{\lambda f * r_\lambda}(\xi) = \lambda\widehat{f}(\xi).\widehat{r_\lambda}(\xi) = \lambda\widehat{f}(\xi)\frac{1}{\lambda}\widehat{r}(\frac{\xi}{\lambda} = \widehat{f}(\xi)\rho(\frac{\xi}{\lambda}$; $\widehat{r} = \rho$ d'après les formules d'inversion de Fourier. or si $|\xi| > \lambda$ $\widehat{f}(\xi) = 0$ et si $|\xi| \leqslant \lambda$ alors $\rho(\frac{\xi}{\lambda}) = 1$ (D'après les formules d'inversion de Fourier)
   donc : $\widehat{\lambda f * r_\lambda} = \widehat{f}$ donc $\lambda f * r_\lambda = f$.
   Q34 d'après Q25 et Q33 on a : $f' = \lambda f.r'\lambda$ donc pour tout t réel et$\lambda > 0$:
   $|f'(t)| = \lambda|f(t)||r'_\lambda(t)| \leq \lambda||f||_\infty||r'_\lambda||_\infty$
   $C = ||r'_\lambda||_\infty$ convient. d 'après Q32 r' est bornée donc r_λ aussi. et on a :
   $||f'||_\infty \leqslant C\lambda||f||_\infty$ CQFD.