

CCS PSI MATHS2 2025

Rémi Crétois

version du 7 mai 2025

I Deux approches pour une valeur à ...

Q 1. Soit $x \in \mathbb{R}$:

- si $x < 0$, alors $e^{-nx} \rightarrow +\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, donc la série $\sum_{n \geq 0} e^{-nx}$ diverge grossièrement ;
- si $x = 0$, $e^{-nx} \rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, donc la série $\sum_{n \geq 0} e^{-nx}$ diverge grossièrement ;
- si $x > 0$, $n^2 e^{-nx} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, donc $e^{-nx} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 1} e^{-nx}$ converge.

Ainsi, f est définie sur $D_f = \mathbb{R}_+^*$.

Soit $x > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{n=1}^N e^{-nx} = \sum_{n=1}^N (e^{-x})^n = e^{-x} \frac{1 - e^{-Nx}}{1 - e^{-x}}$ car $e^{-x} \neq 1$. En passant à la limite

lorsque $N \rightarrow +\infty$, $f(x) = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$.

Q 2. D'après la question précédente, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f(x) = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$, donc

f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ par opérations.

De plus, pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = \frac{-e^{-x}(1 - e^{-x}) - e^{-x}e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} = -\frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2}$.

Q 3. On développe le numérateur à l'ordre 2 et le dénominateur à l'ordre 4 (on va le factoriser par x^2 :

— $e^{-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$$\begin{aligned} (1 - e^{-x})^2 &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)^2 \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 \left(1 - x + \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{4} + o(x^2)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 \left(1 - x + \frac{7}{12}x^2 + o(x^2)\right) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \frac{1}{(1 - e^{-x})^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x^2} \left(1 + x - \frac{7}{12}x^2 + \left(x - \frac{7}{12}x^2\right)^2 + o(x^2) \right) = \frac{1}{x^2} \left(1 + x + \frac{5}{12}x^2 + o(x^2) \right).$$

Enfin,

$$\begin{aligned} \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x^2} \left(1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) \left(1 + x + \frac{5}{12}x^2 + o(x^2) \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x^2} \left(1 - x^2 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{12}x^2 + o(x^2) \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x^2} + \frac{0}{x} - \frac{1}{12} + o(1) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \boxed{a = 1, b = 0 \text{ et } c = -\frac{1}{12}}.$$

Q 4. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n : x \mapsto e^{-nx}$.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$;

— la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ (voir question 1) ;

— soit $a > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup_{[a, +\infty[} (u_n) = ne^{-na}$, et $n^3 e^{-na} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc la série $\sum_{n \geq 1} ne^{-na}$

converge : la série $\sum_{n \geq 0} u'_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a, +\infty[$.

D'après le théorème de dérivation des séries de fonctions, f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, +\infty[$ et pour tout

$x \in [a, +\infty[$, $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} ne^{-nx}$. Ceci étant valable pour tout $a > 0$, le résultat tient sur $]0, +\infty[$.

Ainsi, pour tout $x > 0$, $\sum_{n=0}^{+\infty} ne^{-nx} - \frac{1}{x^2} = f(x) - \frac{1}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{12} + o(1)$ d'après les questions 2 et 3.

$$\text{Donc } \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} ne^{-nx} - \frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{12}}.$$

Q 5. Soit $n \in \mathbb{N} : a + nx \in]a, b]$ $\iff a < a + nx \leq b \iff 0 < n \leq \frac{b-a}{x}$ car $x > 0$. Comme n est

un entier, $0 < n \leq \frac{b-a}{x} \iff 0 < n \leq \lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor$. Ainsi, l'ensemble des entiers naturels tels que

$a + nx \in]a, b]$ est $\boxed{\llbracket 1, \lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor \rrbracket}$.

Q 6. Par définition de la partie entière, $\frac{L}{x} - 1 < \lfloor \frac{L}{x} \rfloor \leq \frac{L}{x}$, donc $0 \leq L - \lfloor \frac{L}{x} \rfloor x < x$. Ainsi, $\boxed{\left| L - \lfloor \frac{L}{x} \rfloor x \right| \leq x}$.

Q 7. Par linéarité et d'après Chasles :

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor} \left(\int_{a+n-1x}^{a+nx} f(a+nx) - f(t) dt \right) - \int_{a+\lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor x}^b f(t) dt &= \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor} \int_{a+n-1x}^{a+nx} f(a+nx) dt \\
 &\quad - \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor} \int_{a+n-1x}^{a+nx} f(t) dt - \int_{a+\lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor x}^b f(t) dt \\
 &= \sum_{n=1}^{\frac{b-a}{x}} x f(a+nx) - \int_a^{a+\lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor} f(t) dt \\
 &\quad - \int_{a+\lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor x}^b f(t) dt \\
 &= x \sum_{n=1}^{\frac{b-a}{x}} f(a+nx) - \int_a^b f(t) dt
 \end{aligned}$$

Ainsi, on trouve bien

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor} \left(\int_{a+n-1x}^{a+nx} f(a+nx) - f(t) dt \right) - \int_{a+\lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor x}^b f(t) dt = x \sum_{n=1}^{\frac{b-a}{x}} f(a+nx) - \int_a^b f(t) dt}$$

Q 8. — Comme f est de classe \mathcal{C}^1 sur le segment $[a, b]$, d'après l'inégalité des accroissements finis, f est lipschitzienne sur $[a, b]$: il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $y, z \in [a, b]$, $|f(y) - f(z)| \leq M|y - z|$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor} \left(\int_{a+n-1x}^{a+nx} f(a+nx) - f(t) dt \right) \right| &\leq \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor} \left(\int_{a+n-1x}^{a+nx} |f(a+nx) - f(t)| dt \right) \\
 &\leq \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor} \left(\int_{a+n-1x}^{a+nx} M|a+nx - t| dt \right) \\
 &\leq \frac{M}{2} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor} x^2 \\
 &\leq \frac{M}{2} x^2 \frac{b-a}{x} \\
 &\leq \frac{M(b-a)}{2} x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0
 \end{aligned}$$

Donc $\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor} \left(\int_{a+n-1x}^{a+nx} f(a+nx) - f(t) dt \right) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ par encadrement.

— Comme f est continue sur $[a, b]$ elle est bornée donc il existe $M' \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $t \in [a, b]$, $|f(t)| \leq M'$. Donc $\left| \int_{a+\lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor x}^b f(t) dt \right| \leq \int_{a+\lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor x}^b |f(t)| dt$ par inégalité triangulaire et comme $b \geq a + \lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor x$ (question 5).

Ainsi, $\left| \int_{a+\lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor x}^b f(t) dt \right| \leq \int_{a+\lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor x}^b M dt = \left(b - a - \lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor x \right) M = \left| b - a - \lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor x \right| M \leq xM \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ d'après 6.

Donc $\int_{a+\lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor x}^b f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ par encadrement.

D'après la question 7, on a donc $x \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor} f(a+nx) - \int_a^b f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$, donc $x \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor} f(a+nx) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \int_a^b f(t) dt$.

Q 9. D'après le théorème fondamental de l'analyse, $\int_0^K \psi'(t) dt = \psi(K) - \psi(0) = K\varphi(K) - 0 = 0$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\psi'(t) = t\varphi'(t) + \varphi(t)$. Donc, de même $\int_0^K \psi''(t) dt = \psi'(K) - \psi'(0) = 0 - \varphi(0) = -1$.

Q 10. On utilise la question 8 avec $a = 0$, $b = K$ et $f = \psi$ (qui est bien de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, K]$). On a

donc : $x \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \psi(x) = x \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} nx\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \int_0^K \psi(t) dt$.

On applique la même question en remplaçant la fonction par ψ' puis ψ'' (qui sont \mathcal{C}^1 sur $[0, K]$) :

$x \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \psi'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \int_0^K \psi'(t) dt = 0$ et $x \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \psi''(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \int_0^K \psi''(t) dt = -1$ (d'après la question 9).

Q 11. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{N}$. On applique la formule de Taylor avec reste intégral sur \mathbb{R}_+ à la fonction

$\psi^{(l)}$ (qui est de classe \mathcal{C}^{k+1}) et avec $a = K$: pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\psi^{(l)}(t) = \sum_{i=0}^k \frac{(t-K)^i}{i!} \psi^{(l+i)}(K) +$

$\int_K^t \frac{(t-s)^k}{k!} \psi^{(l+k+1)}(s) ds$, et $\psi^{(l)}(t) = \int_K^t \frac{(t-s)^k}{k!} \psi^{(l+k+1)}(s) ds$ car ψ et toutes ses dérivées s'annulent en K .

Q 12. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{N}$. Comme $\psi^{(l+k+1)}$ est continue sur $[0, K]$, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $s \in [0, K]$, $|\psi^{(l+k+1)}(s)| \leq M$.

Soit $t \in \left[\lfloor \frac{K}{x} \rfloor x, K \right]$:

$$|\psi^{(l)}(t)| \leq \frac{1}{k!} \int_t^K (s-t)^k |\psi^{(l+k+1)}(s)| ds \leq \frac{M}{(k+1)!} (K-t)^{k+1}$$

Donc

$$\begin{aligned} \left| \int_{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor x}^K \psi^{(l)}(t) dt \right| &\leq \int_{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor x}^K |\psi^{(l)}(t)| dt \\ &\leq \frac{M}{(k+1)!} \int_{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor x}^K (K-t)^{k+1} dt \\ &\leq \frac{M}{(k+2)!} (K - \lfloor K \rfloor x)^{k+2} = \frac{M}{(k+2)!} |K - \lfloor K \rfloor x|^{k+2} \\ &\leq \frac{M}{(k+2)!} x^{k+2} \end{aligned}$$

Ainsi, $\left| \frac{1}{x^k} \int_{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor x}^K \psi^{(l)}(t) dt \right| \leq \frac{M}{(k+2)!} x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0.$

Par encadrement, $\boxed{\frac{1}{x^k} \int_{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor x}^K \psi^{(l)}(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0.}$

Q 13. On refait pareil : soit $k \in \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{N}$, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $s \in [0, K]$, $|\psi^{(k+l)}(s)| \leq M$.
 Pour $n \in \llbracket 1, \lfloor \frac{K}{x} \rfloor \rrbracket$ et $t \in [(n-1)x, nx]$:

$$\begin{aligned} \left| \int_{nx}^t \frac{(t-s)^k}{k!} \psi^{(k+l)}(s) ds \right| &\leq \int_t^{nx} \frac{(s-t)^k}{k!} |\psi^{(k+l)}(s)| ds \\ &\leq \frac{M}{k!} \int_t^{nx} (s-t)^k ds \\ &\leq \frac{M}{(k+1)!} (nx-t)^{k+1} \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned} \left| \int_{(n-1)x}^{nx} \int_{nx}^t \frac{(t-s)^k}{k!} \psi^{(k+l)}(s) ds dt \right| &\leq \int_{(n-1)x}^{nx} nx \frac{M}{(k+1)!} (nx-t)^{k+1} dt \\ &\leq \frac{M}{(k+2)!} x^{k+2} \end{aligned}$$

Enfin, $\left| \frac{R_{k,l}(x)}{x^k} \right| \leq \frac{1}{x^k} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \frac{M}{(k+2)!} x^{k+2} = \frac{M}{(k+2)!} \lfloor \frac{K}{x} \rfloor x^2 \leq \frac{MK}{(k+2)!} x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0.$

Par encadrement, $\boxed{\frac{R_{k,l}(x)}{x^k} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0.}$

Q 14. Soit $l \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$: on commence par intervertir les deux sommes dans le terme de droite :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^p \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \left(\int_{(n-1)x}^{nx} \frac{(t-nx)^k}{k!} \psi^{(k+l)}(nx) dt \right) &= \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \left(\int_{(n-1)x}^{nx} \sum_{k=1}^p \frac{(t-nx)^k}{k!} \psi^{(k+l)}(nx) dt \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \left(\psi^{(l)}(t) - \psi^{(l)}(nx) - \int_{nx}^t \frac{(t-s)^p}{p!} \psi^{(l+p+1)}(s) ds \right) dt \end{aligned}$$

en utilisant la formule de Taylor reste intégral à l'ordre p , avec $a = nx$, $b = t$, $f = \psi^{(l)}$. Donc :

$$\sum_{k=1}^p \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \left(\int_{(n-1)x}^{nx} \frac{(t-nx)^k}{k!} \psi^{(k+l)}(nx) dt \right) + R_{p,l+1}(x) = \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} (\psi^{(l)}(t) - \psi^{(l)}(nx)) dt$$

$$- \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \int_{nx}^t \frac{(t-s)^p}{p!} \psi^{(l+p+1)}(s) ds dt$$

$$+ \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \int_{nx}^t \frac{(t-s)^p}{p!} \psi^{(l+p+1)}(s) ds dt$$

et enfin, $\sum_{k=1}^p \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \left(\int_{(n-1)x}^{nx} \frac{(t-nx)^k}{k!} \psi^{(k+l)}(nx) dt \right) + R_{p,l+1}(x) = \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} (\psi^{(l)}(t) - \psi^{(l)}(nx)) dt$.

Q 15. On applique la question 14 avec $l = 0$ et $p = 2$, on divise par x^2 :

$$\frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \psi(t) - \psi(nx) dt = \frac{1}{x^2} \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \left(\int_{(n-1)x}^{nx} \frac{(t-nx)^k}{k!} \psi^{(k)}(nx) dt \right) + \frac{R_{2,1}(x)}{x^2}$$

$$= \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \psi'(nx) \int_{(n-1)x}^{nx} (t-nx) dt$$

$$+ \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \psi''(nx) \int_{(n-1)x}^{nx} \frac{(t-nx)^2}{2} dt + \frac{R_{2,1}(x)}{x^2}$$

Donc $\frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \psi(t) - \psi(nx) dt = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \psi'(nx) + \frac{x}{6} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \psi''(nx) + \frac{R_{2,1}(x)}{x^2}$.

Q 16. On applique la question 7 avec $a = 0$, $b = K$, $f = \psi'$ (qui est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, K]$) qui donne directement la formule voulue car $\int_0^K \psi'(t) dt = 0$ (question 9).

Q 17. On utilise la question 14 avec $p = 1$, $l = 1$: $\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \psi'(t) - \psi'(nx) dt = \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} (t - nx) \psi''(nx) dt + R_{1,2}(x) = -\frac{x^2}{2} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \psi''(nx) + R_{1,2}(x)$.

On utilise maintenant la question 16 en divisant par x et on obtient

$$\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \psi'(nx) = \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \psi''(nx) - \frac{R_{1,2}(x)}{x} - \frac{1}{x} \int_{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor x}^K \psi'(t) dt$$

Q 18. D'après les questions 15 et 17 :

$$\frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \psi(t) - \psi(nx) dt = -\frac{x}{12} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \psi''(nx) + \frac{1}{2} \frac{R_{1,2}(x)}{x} + \frac{1}{2} \frac{1}{x} \int_{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor x}^K \psi'(t) dt + \frac{R_{2,1}(x)}{x^2}$$

D'après la question 13, $\frac{R_{1,2}(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ et $\frac{R_{2,1}(x)}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$.

D'après la question 12, $\frac{1}{x} \int_{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor x}^K \psi'(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$.

D'après la question 10, $x \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \psi''(nx) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -1$.

$$\text{Ainsi, } \boxed{\frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \psi(t) - \psi(nx) dt \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{12}}$$

Q 19. On applique la question 7 avec $a = 0$, $b = K$, $f = \psi$ puis on divise par x^2 et on obtient la formule voulue.

Q 20. On pose $A = \int_0^K \psi(t) dt$. D'après la question 12, $\frac{1}{x^2} \int_{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor x}^K \psi(t) dt = o(1)$.

D'après la question 18, $\frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \psi(t) - \psi(nx) dt \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{12}$.

Donc d'après la question 19, $\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} n\varphi(nx) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} \frac{A}{x^2} - \frac{1}{12} + o(1)$.

Or, pour tout $n > \lfloor \frac{K}{x} \rfloor$, on a $nx > K$, donc $\varphi(nx) = 0$.

$$\text{Ainsi, } \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} n\varphi(nx) = \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} n\varphi(nx) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} \frac{A}{x^2} - \frac{1}{12} + o(1)}$$

II Les sommes infinies au sens de Ramanujan

Q 21. — On a $B'_1 = B_0 = 1$ donc il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $B_1 = X + c$. De plus, $\int_0^1 B_1(x) dx = [x^2/2 + cx]_0^1 = \frac{1}{2} + c = 0$. Donc $c = -\frac{1}{2}$. Ainsi, $\boxed{B_1 = X - \frac{1}{2}}$.

— On a $B'_2 = 2B_1 = 2X - 1$, donc il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que $B_2 = X^2 - X + c$. De plus, $\int_0^1 B_2(x) dx = [x^3/3 - x^2/2 + cx]_0^1 = -\frac{1}{6} + c = 0$. Donc $c = \frac{1}{6}$. Ainsi, $\boxed{B_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}}$.

Q 22. Montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que $B_p(1 - X) = (-1)^p B_p(X)$.

— Initialisation : pour $p = 0$, $B_0(1 - X) = 1$ et $(-1)^0 B_0(X) = 1$, donc la formule est vraie.

— Hérité : soit $p \geq 0$. Supposons que $B_p(1 - X) = (-1)^p B_p(X)$. Alors $B'_{p+1}(1 - X) = (p + 1)B_p(1 - X) = (-1)^p (p + 1)B_p(X) = (-1)^p B'_{p+1}(X)$. Donc il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $-B_{p+1}(1 - X) = (-1)^p B_{p+1}(X) + c$, d'où $B_{p+1}(1 - X) = (-1)^{p+1} B_{p+1}(X) - c$.

Puis $\int_0^1 B_{p+1}(1 - x) dx = \int_0^1 B_{p+1}(u) du = 0$ (par changement de variable $u = 1 - x$). Donc

$$\int_0^1 (-1)^{p+1} B_{p+1}(x) - c dx = -c = 0.$$

On a bien $B_{p+1}(1 - X) = (-1)^{p+1} B_{p+1}(X)$.

Par principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } p \in \mathbb{N}, B_p(1 - X) = (-1)^p B_p(X)}$.

Q 23. Montrons par récurrence sur $p \geq 2$ que $b_p = B_p(1)$.

— Initialisation : pour $p = 2$, d'après la question 21, $B_2 = X - 2 - X + \frac{1}{6}$, donc $B_2(0) = \frac{1}{6}$ et $B_2(1) = 1 - 1 + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$, d'où $b_2 = B_2(0) = B_2(1)$.

— Hérédité : soit $p \geq 2$. Supposons que $b_p = B_p(1)$. Alors $B_{p+1}(1) - B_{p+1}(0) = \int_0^1 B'_{p+1}(x) dx = \int_0^1 (p+1)B_p(x) dx = 0$, donc $B_{p+1}(1) = b_{p+1}$.

Par principe de récurrence, $\boxed{\forall p \geq 2, b_p = B_p(1)}$.

Soit $p \geq 3$ impair. On a donc $B_p(0) = B_p(1)$, et d'après la question 22, $B_p(1 - X) = -B_p(X)$, ce qui donne en évaluant en 0, $B_p(1) = -B_p(0)$. Donc $\boxed{b_p = 0}$.

Q 24. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$. On fait le changement de variable $u = t - k$ puis une intégration par parties puis le changement de variable dans l'autre sens :

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} \frac{f^{(p)}(t)}{p!} \tilde{B}_p(t) dt &= \int_0^1 \frac{f^{(p)}(u+k)}{p!} B_p(u) du \\ &= \left[\frac{f^{(p)}(u+k)}{p!} \frac{B_{p+1}(u)}{p+1} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{f^{(p+1)}(u+k)}{(p+1)!} B_{p+1}(u) du \\ &= \frac{f^{(p)}(k+1)B_{p+1}(1) - f^{(p)}(k)B_{p+1}(0)}{(p+1)!} - \int_k^{k+1} \frac{f^{(p+1)}(x)}{(p+1)!} \tilde{B}_{p+1}(x) dx \end{aligned}$$

Ce qui donne $\boxed{\int_k^{k+1} \frac{f^{(p)}(t)}{p!} \tilde{B}_p(t) dt = \frac{f^{(p)}(k+1)B_{p+1}(1) - f^{(p)}(k)B_{p+1}(0)}{(p+1)!} - \int_k^{k+1} \frac{f^{(p+1)}(x)}{(p+1)!} \tilde{B}_{p+1}(x) dx}$.

Q 25. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 24 avec $p = 0$:

$$\begin{aligned} \int_1^n f(t) dt &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t) dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{f^{(0)}(t)}{0!} B_0(t) dt \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(0)}(k+1)B_1(1) - f^{(0)}(k)B_1(0)}{1!} - \int_k^{k+1} \frac{f^{(1)}(x)}{1!} \tilde{B}_1(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f(k+1) + f(k)}{2} - \int_0^n f'(x) \frac{\tilde{B}_1(x)}{1!} dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} f(k) - r_{1,n} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n f(k) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} f(k) - r_{1,n} \\ &= -\frac{f(1) + f(n)}{2} + \sum_{k=1}^n f(k) - r_{1,n} \end{aligned}$$

donc $\boxed{\sum_{k=1}^n f(k) = \int_1^n f(t) dt + \frac{f(1) + f(n)}{2} + r_{1,n}}$.

Q 26. Soit $l \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la question 24 et la question 23, on trouve :

$$\begin{aligned} r_{l,n} &= \int_1^n \frac{\tilde{B}_l(t)}{l!} f^{(l)}(t) dt = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{f^{(l)}(k+1)B_{l+1}(1) - f^{(l)}(k)B_{l+1}(0)}{(l+1)!} - \int_k^{k+1} \frac{f^{(l+1)}(x)}{(l+1)!} \tilde{B}_{l+1}(x) dx \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(l)}(k+1)B_{l+1}(1) - f^{(l)}(k)B_{l+1}(0)}{(l+1)!} - r_{l+1,n} \\ &= b_{l+1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(l)}(k+1) - f^{(l)}(k)}{(l+1)!} - r_{l+1,n} \\ &= b_{l+1} \frac{f^{(l)}(n) - f^{(l)}(1)}{(l+1)!} - r_{l+1,n} \end{aligned}$$

en télescopant.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On somme maintenant $(-1)^{l+1}r_{l,1}$ pour l allant de 1 à $2p$:

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{2p} (-1)^{l+1}r_{l,n} &= \sum_{l=1}^{2p} \left((-1)^{l+1}b_{l+1} \frac{f^{(l)}(n) - f^{(l)}(1)}{(l+1)!} - (-1)^{l+1}r_{l+1,n} \right) \\ &= \sum_{l=1}^{2p} (-1)^{l+1}b_{l+1} \frac{f^{(l)}(n) - f^{(l)}(1)}{(l+1)!} - \sum_{l=1}^{2p} (-1)^{l+1}r_{l+1,n} \\ &= \sum_{l=1}^{2p} (-1)^{l+1}b_{l+1} \frac{f^{(l)}(n) - f^{(l)}(1)}{(l+1)!} + \sum_{l=2}^{2p+1} (-1)^{l+1}r_{l,n} \end{aligned}$$

En simplifiant par $\sum_{l=2}^{2p} (-1)^{l+1}r_{l,n}$ des deux côtés, on trouve :

$$r_{1,n} = \sum_{l=2}^{2p+1} (-1)^l b_l \frac{f^{(l-1)}(n) - f^{(l-1)}(1)}{l!} + r_{2p+1,n}$$

Dans la somme, tous les termes impairs sont nuls (d'après la question 23), donc

$$r_{1,n} = \sum_{l=1}^p b_{2l} \frac{f^{(2l-1)}(n) - f^{(2l-1)}(1)}{l!} + r_{2p+1,n}$$

Ainsi, avec la question 25, on trouve

$$\boxed{\sum_{k=1}^n f(k) = \int_1^n f(t) dt + \frac{f(1) + f(n)}{2} + \sum_{l=1}^p b_{2l} \frac{f^{(2l-1)}(n) - f^{(2l-1)}(1)}{l!} + r_{2p+1,n}}$$

Q 27. Soit $p \geq q$ un entier. Comme B_{2p+1} est continue sur $[0, 1]$, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall t \in [0, 1], |B_{2p+1}(t)| \leq M$. Par périodicité, on a donc $\forall t \in \mathbb{R}, |\tilde{B}_{2p+1}(t)| \leq M$. Ainsi, $\forall t \in [1, +\infty[$, $\left| \frac{B_{2p+1}(t)}{(2p+1)!} f^{(2p+1)}(t) \right| \leq \frac{M}{(2p+1)!} |f^{(2p+1)}(t)|$. Or, $f^{(2p+1)}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ par hypothèse.

Donc C_p est bien définie.

On utilise la question 24 en sommant de 1 à $+\infty$, ce qui a un sens car les fonctions sont intégrables et $f^{(2p+1)}(k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$. On obtient :

$$\int_1^{+\infty} \frac{B_{2p+1}(t)}{(2p+1)!} f^{(2p+1)}(t) dt = -b_{2p+2} \frac{f^{(2p+1)}(1)}{(2p+2)!} - \int_1^{+\infty} \frac{B_{2p+2}(t)}{(2p+2)!} f^{(2p+2)}(t) dt$$

On a aussi de même

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{B_{2p+2}(t)}{(2p+2)!} f^{(2p+2)}(t) dt &= -b_{2p+3} \frac{f^{(2p+2)}(1)}{(2p+3)!} - \int_1^{+\infty} \frac{B_{2p+3}(t)}{(2p+3)!} f^{(2p+3)}(t) dt \\ &= - \int_1^{+\infty} \frac{B_{2p+3}(t)}{(2p+3)!} f^{(2p+3)}(t) dt \end{aligned}$$

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{B_{2p+1}(t)}{(2p+1)!} f^{(2p+1)}(t) dt = -b_{2p+2} \frac{f^{(2p+1)}(1)}{(2p+2)!} + \int_1^{+\infty} \frac{B_{2p+3}(t)}{(2p+3)!} f^{(2p+3)}(t) dt$.

On obtient alors $C_{p+1} = C_p$. Autrement dit, C_p ne dépend pas de l'entier p .

Q 28. — Prenons $f : x \mapsto 1$. Pour $q = 0$, on a bien que pour tout $p \geq 0$, $f^{(2p+1)} = 0$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ et que $f^{(2p+1)}(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$.

De plus, $C_0 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$. Donc $\sum_{k \geq 1}^{\mathbb{R}} 1 = -\frac{1}{2}$.

— Prenons $f : x \mapsto x$. Pour $q = 1$, on a bien que pour tout $p \geq 1$, $f^{(2p+1)} = 0$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ et que $f^{(2p+1)}(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$.

De plus, $C_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{b_2}{2} f'(1)$, donc $\sum_{k \geq 1}^{\mathbb{R}} k = -\frac{1}{12}$.

— Prenons $f : x \mapsto x^2$. Pour $q = 1$, on a bien que pour tout $p \geq 1$, $f^{(2p+1)} = 0$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ et que $f^{(2p+1)}(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$.

De plus, $C_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{b_2}{2} f'(1)$, donc $\sum_{k \geq 1}^{\mathbb{R}} k^2 = 0$.

Q 29. D'après la question 25

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(k) - \int_0^n f(t) dt &= - \int_0^1 f(t) dt + \frac{f(1)}{2} + \int_1^n \tilde{B}_1(t) f'(t) dt + \frac{f(n)}{2} \\ &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} - \int_0^1 f(t) dt + \frac{f(1)}{2} + \int_1^{+\infty} \tilde{B}_1(t) f'(t) dt = C_0 \end{aligned}$$

par hypothèses.

Donc $\sum_{k=1}^n f(k) - \int_0^n f(t) dt \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \sum_{k \geq 1}^{\mathbb{R}} f(k)$.

Si $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge, alors $\sum_{k \geq 1} f(k)$ converge aussi et $\sum_{k \geq 1}^{\mathbb{R}} f(k) = \sum_{k=1}^{+\infty} f(k) - \int_0^{+\infty} f(t) dt$.

III Développements tayloriens généralisés

Q 30. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que P_n existe et est unique.

— Initialisation : pour $n = 0$, $P_0 = 1$ est bien uniquement défini.

— Hérédité : soit $n \geq 0$. Supposons que P_n existe et est unique. Alors prenons Q une primitive de $(n + 1)P_n$ et notons $c = \varphi(Q)$. On pose alors $P_{n+1} = Q - c$: on a bien $P'_{n+1} = (n + 1)P_n$ et $\varphi(P_{n+1}) = \varphi(Q) - c\varphi(1) = 0$. Donc P_{n+1} existe.

Soit R tel que $R' = (n + 1)P_n$ et $\varphi(R) = 0$. Alors $R' = P'_{n+1}$ donc il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que $R = P_{n+1} + d$. De plus, $0 = \varphi(R) = \varphi(P_{n+1}) + d\varphi(1) = d$, donc $R = P_{n+1}$. Ainsi, P_{n+1} est unique.

Par principe de récurrence, la suite (P_n) existe et est unique.

Q 31. Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $\psi : t \mapsto \int_0^t P_n(s) \, ds$. Pour $t \in [0, 1]$, $P_{n+1}(t) = (n + 1) \left(\int_0^t P_n(s) \, ds - \varphi(\psi) \right)$.

Donc $|P_{n+1}(t)| \leq (n + 1) \left(\int_0^t |P_n(s)| \, ds + |\varphi(\psi)| \right)$. Comme φ est continue, il existe $C \geq 0$ tel que

$$\forall g \in E, |\varphi(g)| \leq C \|g\|_\infty.$$

$$\text{D'où } |P_{n+1}(t)| \leq (n + 1)(t \|P_n\|_\infty + C \|\psi\|_\infty).$$

$$\text{Or } |\psi(t)| \leq t \|P_n\|_\infty, \text{ donc } \|\psi\|_\infty \leq \|P_n\|_\infty.$$

$$\text{Ainsi, } |P_{n+1}(t)| \leq (n + 1)(1 + C) \|P_n\|_\infty \text{ et } \boxed{\|P_{n+1}\|_\infty \leq (n + 1)(1 + C) \|P_n\|_\infty}.$$

Q 32. D'après la question 31, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{\|P_{n+1}\|_\infty}{(n + 1)!} \leq (1 + C) \frac{\|P_n\|_\infty}{n!}$.

Par récurrence, on obtient que $\frac{\|P_n\|_\infty}{n!} \leq (1 + C)^n \|P_0\|_\infty = (1 + C)^n$.

Soit $x \in [0, 1]$, posons $a_k = \frac{P_k(x)}{k!}$. On a $|a_k| \leq (1 + C)^k$. Or, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k \geq 0} (1 + C)^k t^k$ est $R = \frac{1}{1 + C} > 0$ (série géométrique). Donc par comparaison,

$$\boxed{\text{pour tout } t \in] - R, R[, S(x, t) \text{ existe}}.$$

Q 33. Soit $t \in] - R, R[$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, posons $g_k : x \mapsto \frac{P_k(x)}{k!} t^k$.

— Pour tout $k \in \mathbb{N}$, g_k est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$, $g'_0 = 0$ et pour $k > 0$, $g'_k : x \mapsto t g_{k-1}(x)$;

— $\sum_{k \geq 0} g_k(x)$ converge simplement sur $[0, 1]$ (question 32) ;

— Pour tout $k \geq 0$, $\|g'_k\|_\infty \leq (1 + C)^{k-1} t^k = R \left(\frac{t}{R} \right)^k$ (voir question 32), et comme $t \in] - R, R[$,

$$\sum_{k \geq 0} \left(\frac{t}{R} \right)^k \text{ converge, donc } \sum_{k \geq 0} g'_k \text{ converge normalement donc uniformément.}$$

$$\boxed{\text{D'après le théorème de dérivation des séries de fonctions, } x \mapsto S(x, t) \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0, 1].}$$

Q 34. Soit $t \in] - R, R[$. Posons $h : x \mapsto S(x, t)$. D'après la question 33, h est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$ et sa dérivée est $x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} t g_{k-1}(x) = t h(x)$. Donc h est solution de $h' = t h$. Il existe donc $\alpha(t) \in \mathbb{R}$ tel que

$$\text{pour tout } x \in [0, 1], \boxed{h(x) = \alpha(t) e^{tx}}.$$

Q 35. Soit $t \in] - R, R[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $T_n : x \mapsto \sum_{k=0}^n g_k(x)$. Comme dans la question 33, la série

$\sum_{k \geq 0} g_k$ converge normalement sur $[0, 1]$, donc elle converge uniformément. Donc la suite (T_n) converge

uniformément vers h . Comme φ est continue sur E pour la norme uniforme, $\varphi(h) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(T_n)$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(T_n) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} \varphi(P_k) = 1$ par définition des P_k .

Ainsi, $\boxed{\varphi(h) = 1}$.

D'après la question 34, $x \mapsto S(x, t) = x \mapsto \alpha(t)e^{tx}$, donc $1 = \alpha(t)\varphi(x \mapsto e^{tx})$ en appliquant φ . Ainsi,

$$\boxed{\alpha(t) = \frac{1}{\varphi(x \mapsto e^{tx})}}$$

Q 36. Pour tout $g \in \mathcal{C}([0, 1])$, on pose $\varphi(g) = \int_0^1 g(t) dt$. C'est une forme linéaire sur E par linéarité de l'intégrale, et pour tout $g \in E$, $|\varphi(g)| \leq \int_0^1 |g(t)| dt \leq \int_0^1 \|g\|_\infty dt = \|g\|_\infty$. Donc φ est continue sur E . D'après la question 30, $\boxed{\text{la suite } (B_n) \text{ existe et est unique}}$.

D'après la question 31, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|B_{n+1}\|_\infty \leq 2(n+1) \|B_n\|_\infty$ ($C = 1$).

D'après la question 32, pour tout $x \in]0, 1[$, et pour tout $t \in]-1/2, 1/2[$, $S(x, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B_k(x)}{k!} t^k$ existe.

On a pour tout $t \in]-1/2, 1/2[$, $\alpha(t) = \varphi(x \mapsto e^{tx}) = \int_0^1 e^{tx} dx = \begin{cases} \frac{e^t - 1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$.

D'après les questions 34 et 35, pour tout $t \in]-1/2, 1/2[$ et tout $x \in [0, 1]$, $S(x, t) = \alpha(t)e^{tx} = g(t)$. Autrement dit, pour $x \in [0, 1]$, g est DSE sur $]-1/2, 1/2[$ et on a pour tout $t \in]-1/2, 1/2[$,

$$\boxed{g(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B_k(x)}{k!} t^k}$$

Q 37. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ la formule voulue.

- Initialisation : pour $p = 0$, la somme est nulle, et $\int_y^x \frac{P_0(x+y-t)}{0!} f^{(0+1)}(t) dt = \int_y^x f'(t) dt = f(x) - f(y)$. Ainsi, $f(x) = f(y) + \int_y^x \frac{P_0(x+y-t)}{0!} f^{(0+1)}(t) dt$ et la formule est vérifiée.
- Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons que la formule est vraie pour p . On fait une intégration par parties sur l'intégrale (on primitive $P_p = \left(\frac{P_{p+1}}{p+1}\right)'$ et on dérive $f^{(p+1)}$) :

$$\begin{aligned} \int_y^x \frac{P_p(x+y-t)}{p!} f^{(p+1)}(t) dt &= \left[-\frac{P_{p+1}(x+y-t)}{(p+1)!} f^{(p+1)}(t) \right]_y^x + \int_y^x \frac{P_{p+1}(x+y-t)}{(p+1)!} f^{(p+2)}(t) dt \\ &= -\frac{P_{p+1}(y)}{(p+1)!} f^{(p+1)}(x) + \frac{P_{p+1}(x)}{(p+1)!} f^{(p+1)}(y) + \int_y^x \frac{P_{p+1}(x+y-t)}{(p+1)!} f^{(p+2)}(t) dt \end{aligned}$$

Ainsi, par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y) + \sum_{k=1}^p \left(\frac{P_k(x)}{k!} f^{(k)}(y) - \frac{P_k(y)}{k!} f^{(k)}(x) \right) - \frac{P_{p+1}(y)}{(p+1)!} f^{(p+1)}(x) \\ &\quad + \frac{P_{p+1}(x)}{(p+1)!} f^{(p+1)}(y) + \int_y^x \frac{P_{p+1}(x+y-t)}{(p+1)!} f^{(p+2)}(t) dt \\ &= f(y) + \sum_{k=1}^p \left(\frac{P_k(x)}{k!} f^{(k)}(y) - \frac{P_k(y)}{k!} f^{(k)}(x) \right) + \int_y^x \frac{P_{p+1}(x+y-t)}{(p+1)!} f^{(p+2)}(t) dt \end{aligned}$$

D'après le principe de récurrence, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$f(x) = f(y) + \sum_{k=1}^p \left(\frac{P_k(x)}{k!} f^{(k)}(y) - \frac{P_k(y)}{k!} f^{(k)}(x) \right) + \int_y^x \frac{P_p(x+y-t)}{p!} f^{(p+1)}(t) dt$$

Q 38. Fixons $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$. On applique la forme linéaire φ aux fonctions de y dans la formule de la question 37. On a $\varphi(y \mapsto f(x)) = f(x)\varphi(y \mapsto 1) = f(x)$, et

$$\begin{aligned} & \varphi \left(y \mapsto f(y) + \sum_{k=1}^p \left(\frac{P_k(x)}{k!} f^{(k)}(y) - \frac{P_k(y)}{k!} f^{(k)}(x) \right) + \int_y^x \frac{P_p(x+y-t)}{p!} f^{(p+1)}(t) dt \right) \\ &= \varphi(y \mapsto f(y)) + \sum_{k=1}^p \frac{P_k(x)}{k!} \varphi(y \mapsto f^{(k)}(y)) - \sum_{k=1}^p \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \varphi(P_k) + \varphi \left(y \mapsto \int_y^x \frac{P_p(x+y-t)}{p!} f^{(p+1)}(t) dt \right) \\ &= \sum_{k=0}^p \frac{P_k(x)}{k!} \varphi(y \mapsto f^{(k)}(y)) + \varphi \left(y \mapsto \int_y^x \frac{P_p(x+y-t)}{p!} f^{(p+1)}(t) dt \right) \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient
$$f(x) = \sum_{k=0}^p \frac{P_k(x)}{k!} \varphi(y \mapsto f^{(k)}(y)) + \varphi \left(y \mapsto \int_y^x \frac{P_p(x+y-t)}{p!} f^{(p+1)}(t) dt \right).$$

Q 39. Pour tout $g \in E$, $|\varphi(g)| = |g(0)| \leq \|g\|_\infty$, donc φ est continue sur E .

Pour ce φ , on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = X^n$: on a bien $\varphi(P_n) = 0$ si $n > 0$ et $\varphi(P_0) = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P'_n = nP_{n-1}$.

La formule de la question 38 donne alors la formule de Taylor avec reste intégral.

Q 40. On applique la question 40 à la fonction $g : x \mapsto f(x+j)$ qui est de classe C^∞ sur \mathbb{R} . Pour tout

$$x \in \mathbb{R}, g(x) = \sum_{k=0}^p \frac{P_k(x)}{k!} \varphi(y \mapsto g^{(k)}(y)) + \varphi \left(y \mapsto \int_y^x \frac{P_p(x+y-t)}{p!} g^{(p+1)}(t) dt \right).$$

On prend $x = 0$: $f(j) = \sum_{k=0}^p \frac{P_k(0)}{k!} \varphi(y \mapsto f^{(k)}(y+j)) + \varphi \left(y \mapsto \int_y^0 \frac{P_p(y-t)}{p!} f^{(p+1)}(t+j) dt \right).$

On pose enfin $u = t + j$ dans l'intégrale :

$$f(j) = \sum_{k=0}^p \frac{P_k(0)}{k!} \varphi(y \mapsto f^{(k)}(y+j)) + \varphi \left(y \mapsto \int_{y+j}^j \frac{P_p(y-u+j)}{p!} f^{(p+1)}(u) du \right)$$

Enfin,
$$f(j) = \sum_{k=0}^p \frac{P_k(0)}{k!} \varphi(y \mapsto f^{(k)}(y+j)) - \varphi \left(y \mapsto \int_{y+j}^j \frac{P_p(y-u+j)}{p!} f^{(p+1)}(u) du \right).$$

Q 41. On refait comme dans la question 36 : de même que dans la question 39, φ est continue sur E avec pour tout $g \in E$, $|\varphi(g)| \leq \|g\|_\infty$, donc la suite (E_n) existe et est unique. De plus, pour tout

$$x \in [0, 1] \text{ et tout } t \in]-1/2, 1/2[, \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{E_k(x)}{k!} t^k = \alpha(t)e^{tx}, \text{ où } \alpha(t) = \frac{1}{\varphi(x \mapsto e^{tx})} = \frac{2}{1+e^t}.$$

Ainsi,
$$\forall t \in]-1/2, 1/2[, \forall x \in [0, 1], \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{E_k(x)}{k!} t^k = \frac{2e^{tx}}{1+e^t}.$$

Q 42. Soit $x \in [0, 1]$. Alors $1 - x \in [0, 1]$ et pour tout $t \in] - 1/2, 1/2[$, $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{E_k(1-x)}{k!} t^k = \frac{2e^{t(1-x)}}{e^t + 1} = \frac{2e^{(-t)x}}{1 + e^{-t}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{E_k(x)}{k!} (-t)^k$.

Par unicité du développement en série entière, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 1]$, $\frac{E_k(1-x)}{k!} = (-1)^k \frac{E_k(x)}{k!}$, donc $E_k(1-x) = (-1)^k E_k(x)$. Les polynômes $E_k(1-X)$ et $(-1)^k E_k(X)$ ont donc une infinité de valeurs communes et ils sont égaux : $\forall k \in \mathbb{N}, E_k(1-X) = (-1)^k E_k(X)$.

Q 43. Soit $j, p \in \mathbb{N}$. On applique la question 40 :

$$\begin{aligned} f(j) &= \sum_{k=0}^p \frac{E_k(0)}{k!} \frac{f^{(k)}(j) + f^{(k)}(j+1)}{2} - \frac{1}{2} \int_j^{j+1} \frac{E_p(1-t+j)}{p!} f^{(p+1)}(t) dt \\ &= \sum_{k=0}^p \frac{e_k}{k!} \frac{f^{(k)}(j) + f^{(k)}(j+1)}{2} - \frac{1}{2} \int_j^{j+1} \frac{(-1)^p E_p(t-j)}{p!} f^{(p+1)}(t) dt \end{aligned}$$

en appliquant la question 42. On obtient bien

$$f(j) = \sum_{k=0}^p \frac{e_k}{k!} \frac{f^{(k)}(j) + f^{(k)}(j+1)}{2} - \frac{1}{2} \int_j^{j+1} \frac{(-1)^p E_p(t-j)}{p!} f^{(p+1)}(t) dt$$

Q 44. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$. On applique la question 43 :

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n (-1)^{l-1} f(l) &= \sum_{l=1}^n (-1)^{l-1} \sum_{k=0}^p \frac{e_k}{k!} \frac{f^{(k)}(l) + f^{(k)}(l+1)}{2} - \sum_{l=1}^n (-1)^{l-1} \frac{1}{2} \int_l^{l+1} \frac{(-1)^p E_p(t-l)}{p!} f^{(p+1)}(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^p \frac{e_k}{k!} \left(\sum_{l=1}^n (-1)^{l-1} f^{(k)}(l) + \sum_{l=1}^n (-1)^{l-1} f^{(k)}(l+1) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \int_l^{l+1} \frac{(-1)^{p+l} E_p(t-l)}{p!} f^{(p+1)}(t) dt \end{aligned}$$

On remarque que pour $l \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $t \in [l, l+1[$, $l = \lfloor t \rfloor$, donc $(-1)^{l+p} E_p(t-l) = \tilde{E}_p(t)$, ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n (-1)^{l-1} f(l) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^p \frac{e_k}{k!} \left(\sum_{l=1}^n (-1)^{l-1} f^{(k)}(l) + \sum_{l=2}^{n+1} (-1)^l f^{(k)}(l) \right) + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \int_j^{j+1} \frac{\tilde{E}_p(t)}{p!} f^{(p+1)}(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^p \frac{e_k}{k!} (f^{(k)}(1) + (-1)^{n+1} f^{(k)}(n+1)) + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \int_j^{j+1} \frac{\tilde{E}_p(t)}{p!} f^{(p+1)}(t) dt \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \sum_{l=1}^n (-1)^{l-1} f(l) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^p \frac{e_k}{k!} f^{(k)}(1) + \frac{(-1)^{n-1}}{2} \sum_{k=0}^p \frac{e_k}{k!} f^{(k)}(n+1) + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \int_j^{j+1} \frac{\tilde{E}_p(t)}{p!} f^{(p+1)}(t) dt.$$

• • • FIN • • •