CONCOURS MINES-PONTS M et P' Math 1

ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES,
ECOLES NATIONALES SUPERIEURES DE L'AERONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCEES, DES TELECOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TELECOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ECOLE POLYTECHNIQUE
(Option T.A.)

CONCOURS D'ADMISSION 1992

# MATHEMATIQUES

## PREMIERE EPREUVE

## OPTIONS M ET P'

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHEMATIQUES I.*

*L'énoncé de cette épreuve, commune aux candidats des options M et P', comporte 5 pages.*

Dans tout le problème, on désigne par $\lambda$ un réel appartenant à l'intervalle $]0, 1[$ et par g la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{x^{1-\lambda}\,(x-1)^{\lambda}} .$$

On se propose de déterminer une suite $(v_n)$ de fractions rationnelles convergeant uniformément vers g sur tout intervalle compact de $]1, +\infty[$ , ce qui fait l'objet de la partie III .

La partie II est consacrée à l'étude d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ et la partie I au calcul, utile dans la suite, de l'intégrale $u_k = \displaystyle\int_0^1 t^k\,\omega(t)\,dt$ , k désignant un entier naturel et $\omega$ la fonction définie sur $]0, 1[$ par :

$$\omega(t) = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi}\,\frac{1}{t^{1-\lambda}\,(1-t)^{\lambda}} .$$

page 142 4/5 1992

CONCOURS MINES-PONTS M et P'. M1

I - Calcul de $u_k = \int_0^1 t^k\, \omega(t)\, dt$ :

On note $I(\lambda) = \int_0^1 \dfrac{dt}{t^{1-\lambda}\,(1-t)^\lambda}$ .

1. Transformation de $I(\lambda)$ :

a) Etablir la convergence de $I(\lambda)$ .

b) A l'aide d'un changement de variable homographique, montrer que :

$$I(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^{1-\lambda}\,(1+u)} .$$

c) En déduire l'expression de $I(\lambda)$ au moyen de $J(\lambda)$ et de $J(1-\lambda)$

où $J(\lambda) = \int_0^1 \dfrac{du}{u^{1-\lambda}\,(1+u)}$ .

2. Développement en série de $I(\lambda)$ :

a) Prouver que, pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $u \in [0, 1]$ :

$$\frac{1}{1+u} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k\, u^k + (-1)^n\, \frac{u^n}{1+u} .$$

En déduire une expression de $J(\lambda)$ comme somme d'une série convergente.

b) En déduire que : $\quad I(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda} + 2\lambda \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda^2 - n^2}$ .

3. Calcul de $u_0$ :

Soit $f$ la fonction $2\pi$-périodique telle que : $\forall\, t \in [-\pi, +\pi] \quad f(t) = \cos(\lambda t)$ .

a) $f$ est-elle développable en série de Fourier sur $\mathbb{R}$ ?

b) Déterminer le développement en série de Fourier de $f$ .

c) En déduire $u_0$ .

4. Calcul de $u_k$, $k \in \mathbb{N}^*$ :

a) Prouver que, si $k \in \mathbb{N}^*$ : $\quad u_k = \dfrac{k + \lambda - 1}{k}\, u_{k-1}$ .

b) En déduire $u_k$ .

5. Application au calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\omega(t)}{x-t}\,dt$ pour $x > 1$ :

a) Démontrer que, pour $x > 1$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\omega(t)}{x-t}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{x^{n+1}}$. (On procèdera comme au I-2.a) .)

b) Démontrer que la fonction g, définie dans l'introduction, est égale à la somme d'une série entière par rapport à $1/x$ .

c) En déduire l'égalité : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\omega(t)}{x-t}\,dt = g(x)$ .

II - Etude d'un produit scalaire dans $\mathbb{R}[X]$ :

Dans toute la suite, on munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire

$$(P,\ Q) \mapsto (P|Q) = \int_0^1 \omega(t)\ P(t)\ Q(t)\ dt$$

et de la norme euclidienne associée $P \mapsto \|P\| = \sqrt{(P|P)}$ .

$\mathbb{R}[X]$ muni de ce produit scalaire sera noté $(\mathbb{R}[X],\ (|))$ .
(On ne demande pas de vérifier que $(|)$ est un produit scalaire.)

1. Etude de la projection orthogonale de $X^n$ sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ pour $n \geqslant 1$ :

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $A_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k(n)\,X^k$ la projection orthogonale de $X^n$ sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ (espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n-1) .

a) Montrer que la suite des réels $(a_0(n),\ a_1(n),\ \dots,\ a_{n-1}(n))$ est solution du système

$$\forall\ p \in \{0,\ 1,\ \dots,\ n-1\}\ ,\qquad \sum_{k=0}^{n-1} a_k(n) \prod_{i=k+1}^{n} \frac{i+p}{i+\lambda-1+p} = 1\ .$$

b) On associe à $A_n(X)$ la fraction rationnelle :

$$F(X) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} a_k(n) \prod_{i=k+1}^{n} \frac{i+X}{i+\lambda-1+X}\ .$$

Déterminer les zéros et les pôles de F ; que vaut $F(-n)$ ? En déduire :

$$F(X) = \prod_{p=0}^{n-1} \frac{n-\lambda-p}{n+p} \cdot \frac{X-p}{X+\lambda+p}\ .$$

c) En déduire la valeur de $a_{n-1}(n)$ coefficient dominant de $A_n(X)$ .

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

page 144 4/5 1992
CONCOURS MINES-PONTS M et P' Math 1

2. Etude d'une famille orthogonale de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ :

a) Démontrer qu'il existe une famille unique $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$, vérifiant pour tout entier n, les propriétés suivantes :

i) le coefficient dominant de $P_n$ est égal à 1,

ii) $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de $(\mathbb{R}_n[X], (\,|\,))$.

Ecrire $P_0$ et $P_1$ et exprimer, pour $n \geqslant 1$, $P_n(X)$ en fonction de $A_n(X)$.

b) Norme de $P_n$ pour $n \geqslant 1$ :

Montrer que $\|P_n\|^2 = \big(X^n \mid X^n - A_n(X)\big) = u_{2n}\, F(n)$.

c) Racines de $P_n$ pour $n \geqslant 1$ :
Soit p le nombre des racines $a_i$ d'ordre impair du polynôme $P_n$ appartenant à l'intervalle $]0, 1[$.

Si $p = 0$, on pose $S(x) = 1$ ; sinon, on pose $S(x) = \prod_{i=1}^{p} (x - a_i)$.

Démontrer que l'intégrale $\int_0^1 P_n(x)\; S(x)\; \omega(x)\, dx$ est nulle si $p < n$.

En déduire que $P_n$ a n racines distinctes appartenant à $]0, 1[$.

d) Relation de récurrence vérifiée par $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ :

Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe des réels $\alpha_n$ et $\beta_n$ tels que :

$$X\,P_n = P_{n+1} + \alpha_n\, P_n + \beta_n\, P_{n-1} .$$

Calculer $(X\,P_n \mid P_{n+1})$ puis $\beta_n$ en fonction de $\|P_{n-1}\|^2$, $\|P_n\|^2$ et de $\|P_{n+1}\|^2$.

Calculer $\alpha_n$ en fonction de n et de $\lambda$.

3. Application à l'étude de la famille de polynômes $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \;,\quad \forall\, x \geqslant 1 \qquad Q_n(x) = \int_0^1 \omega(t)\, \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x - t}\, dt .$$

a) Déterminer $Q_0$ et $Q_1$ et montrer que pour $n \geqslant 1$ : $X\,Q_n = Q_{n+1} + \alpha_n\, Q_n + \beta_n\, Q_{n-1}$.

b) En déduire que $(P_n\, Q_{n+1} - P_{n+1}\, Q_n)\dfrac{1}{\|P_n\|^2}$ est indépendant de n et donner sa valeur.

## III - Application à l'étude de la suite des fractions rationnelles $v_n = \dfrac{Q_n}{P_n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Dans ce qui suit, $x$ désigne un réel strictement supérieur à 1 .

1. Que vaut $v_0(x)$ ?
Exprimer $v_{n+1}(x)$ en fonction de $v_n(x)$ , $P_n(x)$ et $P_{n+1}(x)$ .

2. a) Que vaut $\displaystyle\int_0^1 \omega(t) \frac{P_n(t) - P_n(x)}{t - x} P_n(t)\,dt$ ?

b) En déduire que : $\displaystyle g(x) - v_n(x) = \frac{1}{P_n(x)^2} \int_0^1 \omega(t) \frac{P_n(t)^2}{x - t}\,dt$ .

3. Soit $a$ un réel donné $a > 1$ ; il sera admis que l'application $<\ ,\ >$ :

$$(P, Q) \mapsto <P,Q> = \int_0^1 \frac{\omega(t)}{a - t} P(t)\,Q(t)\,dt$$ est un produit scalaire.

L'espace euclidien ainsi défini sera noté : $(\mathbb{R}_n[X]\ ,\ <\ ,\ >)$ et la norme déduite du produit scalaire : $|||\ \ |||$ .

a) Soit $F_n(a)$ le sous-ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ nuls en $a$ :
$$F_n(a) = \{P \mid P \in \mathbb{R}_n[X]\ ,\ P(a) = 0\} .$$

Démontrer que $F_n(a)$ est l'hyperplan orthogonal au polynôme $P_n$ dans $(\mathbb{R}_n[X]\ ,\ <\ ,\ >)$ .

b) Soit $G_n(a)$ le sous-ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ prenant la valeur 1 en $a$ .

Démontrer que $G_n(a)$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}_n[X]$ obtenu à partir de $F_n(a)$ par une translation. Déterminer le vecteur translation lorsque ce vecteur est orthogonal à $F_n(a)$ .

En déduire l'égalité : $\displaystyle\inf_{P \in G_n(a)} |||P|||^2 = |||P_n|||^2 / P_n(a)^2$ .

4. Convergence de la suite $v_n$ :

Déduire des résultats précédents, pour tout réel $a$ , $a > 1$, l'inégalité :

$$g(a) - v_n(a) \leqslant \frac{1}{a^2\ P_{n-1}(a)^2} \int_0^1 \frac{\omega(t)}{a - t}\, t^2\ P_{n-1}(t)^2\,dt .$$

5. Démontrer, pour tout réel $a$ , $a > 1$, les inégalités : $\displaystyle 0 \leqslant g(a) - v_n(a) \leqslant \frac{1}{a^{2n}}\, g(a)$ .

En déduire que la suite des fractions rationnelles $v_n$ converge simplement vers $g$ sur $]1, +\infty[$ et converge uniformément sur tout intervalle compact contenu dans $]1, +\infty[$ .

FIN DU PROBLEME