Concours Commun des Mines

Épreuve de mathématique. Deuxième épreuve, PC et PSI

CORRIGÉ

Première partie

1. $C = \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est de dimension $\dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^2 = 18$, car

$$C = \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \times \{0\} \oplus \{0\} \times \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

2. $(C, +, \dot{\ })$ est un $\mathbb{R}$–espace vectoriel. Son élément neutre est $(0, 0)$.
$(C, +, *)$ est un anneau unitaire d'élément neutre $e = (I_3, 0)$ (à gauche et à droite). On vérifie par calcul que le produit $*$ est associatif.
Enfin, on a $\lambda\dot{(}P, Q) = (\lambda P, Q) = (P, \lambda Q)$.

3. La loi $*$ est interne dans G. Si $(P, Q) \in G, (R, S) \in G$ alors $PR \in SO(\mathbb{R}^3)$ (car $SO(\mathbb{R}^3)$ est un groupe) et

$${}^t(PR)(PS + QR) +^t (PS + QR)PR =^t RS +^t R^tPQR +^t SR +^t R^tQPR = 0 +^t R(^tPQ +^t QP)R = 0$$

La loi $*$ est associative, et l'inverse de (P, Q) est ${}^t(P, Q) = ({}^tP, ^t Q)$. Il reste à prouver que $v \in G$. En effet, comme P est orthogonale directe :

$${}^tQ = -{}^tPQ^tP \Rightarrow P^tQ = -q^tP \Rightarrow P^tQ + Q^tP = 0$$

4. H est un sous–groupe de G car $(P, 0) * (P', 0) = (PP', 0)$ et $PP' \in SO(\mathbb{R}^3)$. L'inverse de $(P, 0)$ est $({}^tP, 0)$ et ${}^tP \in SO(\mathbb{R}^3)$. Enfin l'application φ définie sur $SO(\mathbb{R}^3)$ pat

$$\varphi : P \longmapsto (P, 0)$$

est un morphisme bijectif de groupes entre $SO(\mathbb{R}^3)$ et H (démonstration élémentaire).

5. On a $(I_3, Q) \in G$ si et seulement si Q est antisymétrique. De plus $(I, Q) * (I, Q') = (I, Q + Q') \in A$ et l'inverse de (I, Q) est $(I, -Q) \in A$. Ainsi A est un sous–groupe de G.

6. $(P, Q) \in G$ si et seulement si $P \in SO(\mathbb{R}^3)$ (ou ${}^tPP = I_3$ et $\det(P) = 1$) et ${}^tPQ +^t QP = 0$ ce qui se traduit également par ${}^t(P, Q) * (P, Q) = (I_3, 0)$ et $\det(P) = 1$.

Deuxième partie

7. Si $a = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, la matrice associée à P_a est

$$\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$$

8. Soit $\mathcal{B} = (e_1; e_2, e_3)$ la base orthonormée canonique de $\mathbb{R}^3$. L'application r étant une rotation directe $r(\mathcal{B})$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$; donc si $x = \sum_{i=1}^{3} x_i e_i, y = \sum_{i=1}^{3} x_i e_i$, on a

$$r(x \wedge y) = \left(\sum_{i,j} x_i y_j r(e_i \wedge e_j) \right) = \sum_{i,j} x_i y_j r(e_i) \wedge r(e_j) = r(x) \wedge r(y)$$

9. Soit $x \in \mathbb{R}^3$
$$r \circ p_a \circ r^{-1}(x) = r(a \wedge r^{-1}(x)) = r(a) \wedge x$$
Donc $b = r(a)$.

10. Soit $M, M' \in D$. On a
$$OM \wedge u - OM' \wedge u = MM' \wedge u = 0$$
car MM' et u sont liés. Posons $v = OA \wedge u$, pour A un point quelconque de D. Alors
Les vecteurs u et v sont orthogonaux par propriété du produit vectoriel.

11. • $v \neq 0$. La famille $(u, v, u \wedge v)$ est libre de $\mathbb{R}^3$. C'en est une base. Soit $x \in \mathbb{R}^3$. On écrit $x = \alpha u + \beta v + \gamma(u \wedge v)$ et
$$x \wedge u = -\beta(u \wedge v) + \gamma v = v \Leftrightarrow \beta = 0, \gamma = 1$$
Donc
$$x = \alpha u + u \wedge v, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$
• $v = 0$. L'équation $x \wedge u = 0$ a pour solution la droite vectorielle engendrée par u.

Dans tous les cas, l'ensemble des solutions est
$$x = \alpha u + u \wedge v, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

12. Une droite de $\mathbb{R}^3$ affine est déterminée de manière unique par un point A et un vecteur directeur u. Utilisons la question précédente. Soit u unitaire et v orthogonal à u. On a
$$OM \wedge u = v \Leftrightarrow OM = u \wedge v + \lambda u = OA + \lambda u \Leftrightarrow M \in D(A, u)$$

13. On a $OA = u \wedge v = \begin{pmatrix} 0 \\ -c \\ b \end{pmatrix}$ et
$$D = D(A, u) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ -c \\ b \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

14. Les couples (u, v) et (u', v') déterminent la même droite si et seulement si (u, u') sont liés (comme ils sont unitaires $u' = \pm u$) et le point A' déterminé par $OA' = u' \wedge v'$ appartient à D, soit $(u' \wedge v') \wedge u = v$.
- si $u' = u$, $v = (u' \wedge v') \wedge u = v'$,
- si $u' = -u$, $v = (u' \wedge v') \wedge u = -v'$.

15. L'image d'une droite $D(A, u)$ par un déplacement d est la droite $D(A', r(u))$, où $A' = d(A)$. Ainsi D' est associée au couple (u', v') avec $u' = r(u)$ et $v' = OA' \wedge u'$. Donc
$$v' = (a + r(OA)) \wedge r(u) = a \wedge r(u) + r(OA \wedge u) = a \wedge r(u) + r(v)$$
Ainsi $\alpha = r, \beta = p_a \circ r$.

Réciproquement, ces deux conditions donnent l'existence d'un couple (u', v') tel que la droite D' ainsi déterminée est image par le déplacement $d = t_a \circ r$ de la droite D déterminée par (u, v).

16. Dans une base orthonormée A, matrice associée à une rotation, est orthogonale et de déterminant 1, et $B = M_{p_a} A$. Donc
$${}^tAB +{}^t BA ={}^t AM_{p_a} A +{}^t A(-M_{p_a})A = 0$$

17. Supposons qu'à deux déplacements $d = t_a \circ r, d' = t_b \circ r'$, on associe le même couple (A, B). On a $r = r'$ (même matrice A) et $p_a \circ r = p_b \circ r$ entraîne que $p_a = p_b$, puis que $a = b$ car si $a \wedge x = 0, \forall x \in \mathbb{R}^3$, alors $a = 0$.

L'application est donc injective.

18. L'équation paramétrique de la droite D est $\begin{pmatrix} \lambda \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (avec $\lambda \in \mathbb{R}$). La matrice associée à la rotation est dans la base canonique

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi $u' = r(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$. Puis

$$v' = r(v) + a \wedge r(u) = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ -y_0 - \cos\theta \end{pmatrix}$$

19. On sait que l'application J est injective. Montrons qu'elle est surjective.
A est une matrice orthogonale directe ; c'est donsc la matrice d'une rotation dans une base orthonormée. Soit $C = B^tA$. La matrice C est antisymétrque. En effet, comme $(A, B) \in G$, on a $({}^tA, {}^tB) \in G$ (c'est l'inverse de (A, B)), soit

$$B^tA = -A^tB = -{}^t(B^tA)$$

Cette matrice antisymétrique est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $a = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$, et $d = t_a \circ r$. Par construction de a et r, dans une base orthonormée, les matrices associée aux applications α et β définie dans la question 15, sont A et B.

20. Soit $D = D(u, v)$ invariante par d. Alors $D = D(u', v')$ où

$$\begin{cases} u' = A(u) \\ v' = A(v) + B(u) \end{cases}$$

• $A = I$. Il vient $u' = u$ et, par la question 14, $v' = v$; donc $0 = B(u) = a \wedge u$. Cette équation admet des solutions si et seulement si $u = \dfrac{a}{||a||}$. Le vecteur v est alors quelconque. Dans ce cas, $d = t_a$ et $t_a(D) = D$ si et seulement si D admet a comme vecteur directeur. Donc $D = D(M, a)$

• A est une rotation d'angle π. L'équation $u' = A(u)$ a pour solution $u' = u$ (u est le vecteur directeur de la rotation) et $u' = -u \in P$, où P est le plan orthogonal à u. Par la question 14,

$$u' = u \Rightarrow v' = v \Rightarrow (I - A)v = Bu = a \wedge u$$

Cette dernière équation admet une solution $v = \dfrac{1}{2}(a \wedge u)$, car $a \wedge u \in P$. Dans ce cas il y a une droite invariante.

Par la question 14,

$$u' = -u \Rightarrow v' = -v \Rightarrow (I + A)v = -Bu = -a \wedge u$$

Cette dernière équation n'admet de solution que si $a \wedge u = 0$ soit $u = \dfrac{a}{||a||}$. Donc $a \in P$, plan orthogonal à l'axe de la rotation et toute droite appartenant à ce plan, parallèle à a est invariante.

• A est une rotation d'angle $\theta \neq 0, \pi$. On a $u' = u$ (u est un vecteur propre de A). Le vecteur v est déterminé par l'équation $v = A(v) + B(u)$, soit $(I - A)v = B(u)$. Cette équation admet des solutions, puisque v est dans un plan P orthogonal à u et $(I-A)\mid_P$ est inversible. De plus $Bu \in \mathrm{Im}(I-A)$ car $Bu = (p_a \circ r)(u) = p_a(u) = a \wedge u$ appartient au plan P. Il y a donc une droite invariante.

21. a) Supposons $\theta \neq 2\pi$. Par la question précédente $u = k$ et $v = A(v) + B(u)$. Ce qui donne

$$v = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \operatorname{cotan} \theta/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie que v est orthogonal à u. La droite D invariante par d a pour équation

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} -1/2 \operatorname{cotan}(\theta/2) \\ 1/2 \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

b) Si $\theta = 2\pi$ $(A = I)$, $d = t_a$ et $t_a(D) = D$ si et seulement si D admet a comme vecteur directeur. Donc $D = D(A, a)$