Exercice 1

Soit $f : m = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum_{j=1}^{n} \mathrm{e}^{x_j}$.

1. La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ comme somme de fonctions de classe C^1. Dans ce cas, une condition nécessaire d'existence d'un extremum local est l'existence d'un point crtitique.
Or pour tout $m = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $i \in [\![1, n]\!]$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(m) = \mathrm{e}^{x_i} \neq 0$, donc la différentielle de f ne s'annule jamais, il n'y a pas de point critique, donc pas d'extremum local.

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x, 0, \dots, 0) = +\infty$ donc f n'est pas majorée.

3. La fonction f est clairement positive donc possède une borne inférieure.
De plus, f est minorée par 0 et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x, x, \dots, x) = 0$ donc $\inf\limits_{\mathbb{R}^n} f = 0$.

4. g est linéaire donc sa différentielle est elle-même en tout point, donc pour tout $m \in H$, $dg(m) \neq 0$. Alors d'après le cours, si f admet un extremum local sur H en un point m, la différentielle de f en m est colinéaire à celle de g en m, ce qui est équivalent à dire que les vecteurs gradients en m sont colinéaires.
En $m = (x_1, \dots, x_n) \in H$, le vecteur gradient de f est $\nabla f(m) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{x_1} \\ \vdots \\ \mathrm{e}^{x_n} \end{pmatrix}$ et celui de g est $\nabla g(m) = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.
Donc si les deux vecteurs sont colinéaires, alors $\mathrm{e}^{x_1} = \dots = \mathrm{e}^{x_n} = t > 0$ donc $x_1 = \dots = x_n = \ln t$. Or $m \in H$ donc $\sum_{j=1}^{n} x_j = n \ln t = 0$ donc $m = (0, \dots, 0)$.
Conclusion : le seul point où f peut admettre un extremum local sur H est l'origine $(0, \dots, 0)$.

5. La dérivée seconde de la fonction exp est elle-même, donc est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc exp est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$. En particulier, sa courbe est au-dessus de ses tangentes, en particulier celle en 0 d'équation $y = 1 + t$. Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^t \geqslant 1 + t$.

6. Pour tout $m = (x_1, \dots, x_n) \in H$, $f(m) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{e}^{x_j} \geqslant \sum_{j=1}^{n} (1 + x_j) = n + \sum_{j=1}^{n} x_j = n$ car $m \in H$. Or $f(0) = n$, donc on a montré : pour tout $m \in H$, $f(m) \geqslant f(0)$. Ceci prouve que f possède un minimum global sur H, atteint en 0, qui vaut n.

Exercice 2

1. Pour tout $(A, B) \in \mathbb{C}[X]^2$, si $B \neq 0$, alors
pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{C}[X]^2$ tel que $\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases}$

2. $X^n - 1 = (X^n - X) + (X - 1) = 1 \times (X^n - X) + (X - 1)$ et comme $\deg(X - 1) = 1 < \deg(X^n - X) = n$, donc le quotient de la division euclidienne de A par B est 1 et le reste est $X - 1$.

3. D'après l'algorithme d'Euclide, $\mathrm{pgcd}(A, B) = \mathrm{pgcd}(B, X - 1) = X - 1$ car $X - 1$ divise B

4. Les racines de A sont les racines n-èmes de l'unité : les complexes $\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.
$B = X(X^{n-1} - 1)$ donc les racines de B sont les racines $n - 1$-èmes de l'unité et 0.
Dans la suite, on pose donc $z_k = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n-1}}$ pour $k \in [\![1, n - 1]\!]$ et $z_n = 0$.

******

5. Soit $(P_1, P_2) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.
On effectue trois divisions euclidiennes :

$$\begin{aligned} AP_1 &= BQ_1 + R_1 \text{ et } \deg R_1 < n = \deg B \\ AP_2 &= BQ_2 + R_2 \text{ et } \deg R_2 < n = \deg B \\ A(P_1 + \lambda P_2) &= BQ_3 + R_3 \text{ et } \deg R_3 < n = \deg B \end{aligned}$$

Donc on obtient $A(P_1 + \lambda P_2) = BQ_3 + R_3 = B(Q_1 + \lambda Q_2) + (R_1 + \lambda R_2)$ et $\deg R_3 < n$, $\deg(R_1 + \lambda R_2) < n$: on a donc deux divisions euclidiennes de $A(P_1 + \lambda P_2)$.

Par unicité de celle-ci, on en déduit en particulier que $R_3 = R_1 + \lambda R_2$, c'est-à-dire $f(P_1 + \lambda P_2) = f(P_1) + \lambda f(P_2)$. Ceci prouve la linéarite de f. De plus, pour tout $P \in E$, $\deg f(P) < \deg B = n$ donc $f(P) \in E$. Au total, f est un endomorphisme de E.

6. Pour $k \in [\![0, n-2]\!]$, $AX^k = X^{n+k} - X^k = X^k(X^n - X) + X^{k+1} - X^k$: comme $\deg(X^{k+1} - X^k) = k+1 \leqslant n-1 < \deg B$, on en déduit que $f(X^k) = X^{k+1} - X^k$.

7. De même,

$$\begin{aligned} AX^{n-1} &= X^{n-1}(X^n - X) + X^n - X^{n-1} \\ &= X^{n-1}(X^n - X) + (X^n - X) - X^{n-1} + X \\ &= (X^{n-1} + 1)(X^n - X) + (-X^{n-1} + X) \end{aligned}$$

Comme $\deg(-X^{n-1} + X) = n - 1 < \deg B$, on en déduit que $f(X^{n-1}) = -X^n + X$.

8. $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

9. Il est alors évident que $\mathrm{tr}(M) = -n$.

Étude du noyau et de l'image de f

10. La suite d'opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, ..., $L_n \leftarrow L_n + L_{n-1}$ (dans cet ordre) transforme M en une matrice équivalente (= de même rang) :

$$M \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & -0 \end{pmatrix}$$

et on voit parfaitement que cette dernière matrice est de rang $n-1$, puisqu'elle est triangulaire supérieure de diagonale $(-1, \ldots, -1, 0)$, donc $\mathrm{rg}(M) = n - 1$.

11. $E = \mathrm{vect}(1, X, \ldots, X^{n-1})$ donc par linéarité de f, $\mathrm{Im}(f) = f(E) = \mathrm{vect}(f(1), f(X), \ldots, f(X^{n-1}))$.
Comme la famille $(f(1), f(X), \ldots, f(X^{n-1}))$ est de rang $n-1$, un des vecteurs peut être supprimé sans changer le sous-espace engendré. Or les $n-1$ premiers vecteurs sont linéairement indépendants, puisqu'ils forment une famille de polynômes étagés en degré, donc $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}(f(1), f(X), \ldots, f(X^{n-2}))$, donc $(f(1), f(X), \ldots, f(X^{n-2}))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

12. Daprès le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}(f) = \dim E - \mathrm{rg}(f) = n - (n-1) = 1$: $\mathrm{Ker}(f)$ est une droite vectorielle. Une base de $\mathrm{Ker}(f)$ est donc formée d'un seul vecteur.

Or il est facile de vérifier que le polynôme $S = \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} X^j$ appartient à f en effectuant le produit matriciel de M avec la matrice-colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ des coordonnées de S dans la base canonique.

Donc une base de $\mathrm{Ker}(f)$ est (S).

13. Pour tout $P \in E$, il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $AP = BQ + f(P)$, or A et B ont pour racine commune 1, donc en évaluant en 1 cette égalité polynômiale, on obtient $f(P)(1) = 0$, autrement dit $X - 1$ divise $f(P)$ donc $f(P) = (X-1)U$ où $U \in \mathbb{C}_{n-2}[X]$ (car $\deg P \leqslant n - 1$).
Ceci prouve l'inclusion $\mathrm{Im}(f) \subset \{(X-1)P \mid P \in \mathbb{C}_{n-2}[X]\}$.
Or l'ensemble de droite est aussi un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$, car il est isomorphe à $\mathbb{C}_{n-2}[X]$ *via* l'application linéaire $P \mapsto (X-1)P$.
Donc par égalité des dimensions, $\mathrm{Im}(f) = \{(X-1)P \mid P \in \mathbb{C}_{n-2}[X]\}$.

14. $\mathrm{Im}(f)$ est un hyperplan de E et S n'est pas un vecteur de $\mathrm{Im}(f)$, donc $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{vect}(S) = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$.

Éléments propres de f

Soit $j \in [\![1, n]\!]$. On note P_j le polynôme de E défini par $P_j = \dfrac{B}{X - z_j} = \displaystyle\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (X - z_k)$ et $R_j = f(P_j)$.

15. B possède n racines distinctes, donc les racines de P_j sont toutes différentes de z_j.

16. Par définition de R_j, il existe $Q_j \in C[X]$ tel que $AP_j = BQ_j + R_j$ donc $AP_j = (X - z_j)Q_jP_j + R_j$ donc P_j divise R_j : les racines de P_j sont toutes raciens de R_j.

17. On vient de montrer que P_j divise R_j, donc il existe $U_j \in \mathbb{C}[X]$ tel que $R_j = U_jP_j$ donc $\deg R_j = \deg U_j + \deg P_j = \deg U_j + n - 1$. Or $\deg R_j \leqslant n - 1$, donc il vient $\deg U_j \leqslant 0$: le polynôme U_j est un polynôme constant qu'on note λ_j.
On a donc montré l'existence de $\lambda_j \in \mathbb{C}$ tel que $f(P_j) = \lambda_j P_j$: P_j est donc un vecteur propre de f puisque $P_j \neq 0$ et λ_j est la valeur propre associée.

18. On reprend l'égalité polynômiale précédente : $AP_j = (X - z_j)Q_jP_j + \lambda_jP_j$ et on évalue en z_j.
On obtient $A(z_j)P_j(z_j) = \lambda_jP_j(z_j)$, or $P_j(z_j) \neq 0$ donc $A(z_j) = \lambda_j$.

19. On en déduit que $\lambda_j = A(z_j) = z_j^n - 1 = z_j - 1$ car z_j est racine de B donc vérifie l'égalité $z_j^n - z_j = 0$.
En particulier, $\lambda_n = -1$ (et aussi $\lambda_{n-1} = 0$ car $z_{n-1} = 1$).

20. Les racines de B sont distinctes donc f possède n valeurs propres distinctes. Comme E est de dimension n, on en déduit que f est diagonalisable.

21. f est diagonalisable donc sa trace est la somme de ses valeurs propres (comptées selon leur multiplicité). Donc $\operatorname{tr}(f) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = \sum_{j=1}^{n} (z_j - 1) = \sum_{j=1}^{n} z_j - n$.
Or parmi les z_j, l'un est nul et les autres sont les $n-1$ racines $n-1$-èmes de l'unité avec $n - 1 \geqslant 2$ donc leur somme est nulle, donc on retrouve $\operatorname{tr}(f) = -n$.

22. f est diagonalisable donc $\chi_f = \displaystyle\prod_{j=1}^{n} (X - \lambda_j) = \prod_{j=1}^{n} (X - z_j + 1)$.

Donc $\chi_f = \displaystyle\prod_{j=1}^{n} ((X + 1) - z_j) = B(X + 1) = (X + 1)^n - (X + 1) = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} X^k + (n - 1)X$.

23. L'endomorphisme induit par f dans $\operatorname{Im}(f)$ a pour valeurs propres les valeurs propres non nulles de f car $\operatorname{Im}(f)$ et $\operatorname{Ker}(f)$ (le sous-espace propre pour la valeur propre 0) sont supplémentaires. Son déterminant est donc le produit $\displaystyle\prod_{j=1}^{n-2} \lambda_j \times \lambda_n$, qui est le produit des racines non nulles de χ_f, c'est-à-dire celles de $\dfrac{\chi_f}{X} = \dfrac{(X+1)^n - (X+1)}{X}$.

Or $\dfrac{(X+1)^n - (X+1)}{X} = \dfrac{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} X^k + (n-1)X}{X} = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} X^{k-1} + (n - 1)$.

Donc le produit des racines de ce polynôme unitaire est $(-1)^{n-1}(n - 1) = \displaystyle\prod_{j=1}^{n-2} \lambda_j \times \lambda_n$.

Exercice 3

Questions préliminaires

1. C'est du cours : $t \mapsto \dfrac{1}{1-t}$ est développable en série entière sur $]-1, 1[$ uniquement et $\dfrac{1}{1-t} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^n$ quand $t \in\ ]-1, 1[$.

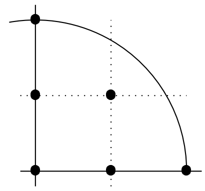
2. La série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} (n + 1)t^n$ est la série dérivée de la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} t^{n+1} = \sum_{n \geqslant 1} t^n$ donc d'après le cours, ces deux séries entières ont le même rayon de convergence, qui vaut 1.
De plus, pour tout $t \in\ ]-1, 1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n + 1)t^n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} t^n \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{1}{1-t} - 1 \right) = \frac{1}{(1-t)^2}$.

3. Réponse (d).

4. $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f$ (on reconnaît le résultat sur les sommes de Riemann).

******

5. Représentation graphique de E_2 :



donc $G(2) = 6$.

6. $J = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^{1/2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 u)^{1/2}\cos u\,\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/2} \cos^2 u\,\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2u)}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{4} + \left[\frac{\sin(2u)}{4}\right]_{u=0}^{\pi/2}$
donc $J = \dfrac{\pi}{4}$.

7. Les points de E_n ont des ordonnées entières comprises entre 0 et n : pour $k \in [\![0,n]\!]$, sur la droite d'équation $y = k$, les points (x,k) de E_n vérifient les deux conditions $x \in \mathbb{N}$ et $x^2 + k^2 \leqslant n^2$, c'est-à-dire $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{n^2-k^2}$.
Dans le segment $\left[0, \sqrt{n^2-k^2}\right]$, il y a $\lfloor\sqrt{n^2-k^2}\rfloor + 1$ entiers naturels, donc sur la droite d'équation $y = k$ il y a exactement $\lfloor\sqrt{n^2-k^2}\rfloor + 1$ points dans E_n.

On fait varier k de 0 à n et on additionne : on obtient le nombre de points de E_n. Donc $G(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\lfloor\sqrt{n^2-k^2}\rfloor + 1\right)$

8. On reconnaît une somme de Riemann : $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k^2}{n^2}\right)^{1/2}$ pour la fonction continue $t \mapsto (1-t^2)^{1/2}$ sur le segment $[0,1]$.
D'après le rappel précédent et le calcul de l'intégrale ci-dessus, on obtient
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k^2}{n^2}\right)^{1/2} = \int_0^1 (1-t^2)^{1/2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$.

9. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{n^2-k^2} = n^2 \times \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k^2}{n^2}\right)^{1/2} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2\frac{\pi}{4}$ d'après la question précédente.

10. $G(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\lfloor\sqrt{n^2-k^2}\rfloor + 1\right) = n+1+\sum_{k=0}^{n}\lfloor\sqrt{n^2-k^2}\rfloor = n+1+\sum_{k=0}^{n-1}\lfloor\sqrt{n^2-k^2}\rfloor$ (le terme pour $k = n$ est nul).
Or pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, $\sqrt{n^2-k^2} - 1 \leqslant \lfloor\sqrt{n^2-k^2}\rfloor \leqslant \sqrt{n^2-k^2}$ donc en additionnant les inégalités, on obtient $S_n - n \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\lfloor\sqrt{n^2-k^2}\rfloor \leqslant S_n$, donc $S_n + 1 \leqslant G(n) \leqslant S_n + n + 1$
D'après la question précédente, $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2\dfrac{\pi}{4}$, or $n = o(n^2)$ donc $S_n + n + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2\dfrac{\pi}{4}$
donc par encadrement, $G(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2\dfrac{\pi}{4}$

11. La fonction G est clairement croissante (plus le rayon x est grand, plus le quart de cercle est grand donc plus il contient de points à coordonnées entières).
Donc pour tout $x > 0$, $G(n) \leqslant G(x) \leqslant G(n+1)$ en posant $n = \lfloor x\rfloor$. On sait que $x \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.
D'après la question précédente, $G(n) \sim n^2\dfrac{\pi}{4} \sim (n+1)^2\dfrac{\pi}{4} \sim G(n+1)$ donc par encadrement, $G(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} n^2\dfrac{\pi}{4} \sim x^2\dfrac{\pi}{4}$.

12. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leqslant 1$ donc $|a_n t^n| \leqslant |t|^n$. Donc si $|t| < 1$, la série $\sum |t|^n$ converge donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum |a_n t^n|$ converge absolument. Donc le rayon de convergence R de la série $\sum a_n t^n$ est au moins égal à 1.
Pour $t = 1$, la série $\sum a_n$ diverge grossièrement puisqu'il y a une infinité de carrés dans $\mathbb{N}$.
Conclusion : $R = 1$.

13. Pour $|t| < 1$, la série entière $\sum a_n t^n$ converge absolument donc par produit de Cauchy,
$h(t)^2 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n$ où $b_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$.

Puis la série entière $\sum t^n$ converge absolument aussi, donc de même, $g(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ où $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k$.

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{k} a_\ell a_{k-\ell} = \sum_{\ell=0}^{n}\sum_{k=\ell}^{n} a_\ell a_{k-\ell} = \sum_{\ell=0}^{n}\left(a_\ell \sum_{k=\ell}^{n} a_{k-\ell}\right) = \sum_{\ell=0}^{n}\left(a_\ell \sum_{k=0}^{n-\ell} a_k\right).$$

Quand ℓ n'est pas un carré, le terme $a_\ell \sum_{k=0}^{n-\ell} a_k$ est nul, donc $b_n = \sum_{0 \leqslant j \leqslant \sqrt{n}} \left(\sum_{k=0}^{n-j^2} a_k \right)$.

Or $\sum_{k=0}^{n-j^2} a_k$ est le nombre de carrés parmi $0, 1, \ldots, n-j^2$, c'est-à-dire $b_n = \sum_{0 \leqslant i \leqslant \sqrt{n-j^2}} 1$.

Donc $b_n = \sum_{\substack{0 \leqslant i,j \\ 0 \leqslant j^2 \leqslant n \\ 0 \leqslant i^2 \leqslant n-j^2}} 1 = \sum_{\substack{(i,j)\in\mathbb{N}^2 \\ i^2+j^2 \leqslant n}} 1 = G(\sqrt{n})$.

Un équivalent de g

14. D'après la question 11, $G(\sqrt{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\frac{\pi}{4} \underset{n\to+\infty}{\sim} (n+1)\frac{\pi}{4}$, donc $G(\sqrt{n}) - (n+1)\frac{\pi}{4} \underset{n\to+\infty}{=} o(n+1)$

donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\left| G(\sqrt{n}) - \frac{\pi}{4}(n+1) \right| < \varepsilon(n+1)$

15. Soit $\varepsilon > 0$.

La question précédente donne un rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\left| G(\sqrt{n}) - \frac{\pi}{4}(n+1) \right| < \varepsilon(n+1)$.

Or pour tout $t \in [0,1[$, $\left| g(t) - \frac{\pi}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)t^n \right| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \left(G(\sqrt{n}) - \frac{\pi}{4}(n+1) \right) t^n \right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \left| G(\sqrt{n}) - \frac{\pi}{4}(n+1) \right| t^n$.

Donc

$$\begin{aligned}
\left| g(t) - \frac{\pi}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)t^n \right| &\leqslant \sum_{n=0}^{n_0-1} \left| G(\sqrt{n}) - \frac{\pi}{4}(n+1) \right| t^n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} \left| G(\sqrt{n}) - \frac{\pi}{4}(n+1) \right| t^n \\
&\leqslant \sum_{n=0}^{n_0-1} \left| G(\sqrt{n}) - \frac{\pi}{4}(n+1) \right| + \sum_{n=n_0}^{+\infty} \varepsilon(n+1)t^n \\
&\leqslant \sum_{n=0}^{n_0-1} \left| G(\sqrt{n}) - \frac{\pi}{4}(n+1) \right| + \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon(n+1)t^n \\
&= \sum_{n=0}^{n_0-1} \left| G(\sqrt{n}) - \frac{\pi}{4}(n+1) \right| + \varepsilon \frac{1}{(1-t)^2}
\end{aligned}$$

$K = \sum_{n=0}^{n_0-1} \left| G(\sqrt{n}) - \frac{\pi}{4}(n+1) \right|$ est une constante et $\lim_{t\to 1_-} \frac{1}{(1-t)^2} = +\infty$ donc

il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $t \in]1-\alpha, 1[$, $K \leqslant \varepsilon \frac{1}{(1-t)^2}$

donc pour tout $t \in]1-\alpha, 1[$, $\left| g(t) - \frac{\pi}{4} \frac{1}{(1-t)^2} \right| \leqslant 2\varepsilon \frac{1}{(1-t)^2}$

On a montré :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall t \in]1-\alpha, 1[\quad \left| g(t) - \frac{\pi}{4} \frac{1}{(1-t)^2} \right| \leqslant 2\varepsilon \frac{1}{(1-t)^2}$$

ce qui signifie que $g(t) - \frac{\pi}{4} \frac{1}{(1-t)^2} \underset{t\to 1_-}{=} o\left(\frac{1}{(1-t)^2} \right)$, c'est-à-dire $g(t) \underset{t\to 1_-}{\sim} \frac{\pi}{4} \frac{1}{(1-t)^2}$.

FIN