

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
(OPTION T.A.)

CONCOURS D'ADMISSION 1994

ÉPREUVE PRATIQUE DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : ÉPREUVE PRATIQUE DE MATHÉMATIQUES.

L'énoncé de cette épreuve, commune aux candidats des options M et P', comporte 3 pages.

L'objectif de ce problème est l'étude de la fonction ζ (dite fonction zêta de Riemann) définie, pour x strictement supérieur à 1, par la relation : $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

La première partie est consacrée à l'étude globale de cette fonction ζ ; la deuxième partie aux calculs de valeurs numériques de $\zeta(x)$ au voisinage de 1 en faisant appel à une méthode d'accélération de convergence. Enfin, la troisième partie précise le comportement asymptotique de ζ au voisinage de 1.

Dans tout le problème, N et n désignent des entiers supérieurs ou égaux à 1.

Première partie

Désignons par f_n , S_N et R_N les trois fonctions définies par les relations :

$$f_n(x) = \frac{1}{n^x} ; \quad S_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} ; \quad R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^x} .$$

Les deux premières fonctions sont définies sur \mathbb{R} ; la fonction R_N est définie lorsque la série de terme général $f_n(x)$ est convergente.

1°) Démontrer que la série de terme général $f_n(x)$ est convergente dans l'intervalle $I =]1, \infty[$. Prouver que les trois séries de fonctions de termes généraux respectifs f_n , f'_n et f''_n sont uniformément convergentes sur tout intervalle $[a, \infty[$ contenu dans I .

Est-ce qu'il y a convergence uniforme pour ces trois séries de fonctions dans I ?

Par définition, ζ est la fonction somme de la série de fonctions de terme général f_n :

pour tout réel x de I :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} .$$

- 2°) a. Démontrer que la fonction ζ est de classe C^2 sur l'intervalle I et donner les signes de ζ' et de ζ'' .
- b. Démontrer, pour tout réel x de l'intervalle I et pour tout entier N (de \mathbb{N}^*), l'encadrement :
- $$\frac{1}{(x-1)(N+1)^{x-1}} \leq R_N(x) \leq \frac{1}{(x-1)N^{x-1}} .$$
- En déduire un encadrement de $\zeta(x)$ valable pour tout entier N .
- c. Étudier les limites de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1 dans I et lorsque x croît indéfiniment ; donner un équivalent de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1.
- 3°) a. En utilisant notamment l'encadrement précédent, calculer à 10^{-6} près les nombres $\zeta(4)$, $\zeta(\frac{7}{2})$, $\zeta(3)$.
- b. Tracer la courbe représentative de la fonction ζ .

Deuxième partie

Les résultats obtenus précédemment ne permettent pas un calcul précis et rapide de $\zeta(x)$ pour des valeurs de x voisines de 1. L'objectif de cette partie est de proposer, pour de telles valeurs, une méthode d'accélération de convergence. Étant donné un réel x et un entier n strictement supérieurs à 1, désignons par φ_n la fonction $u \mapsto \varphi_n(u)$ définie sur l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$ par la relation :

$$\varphi_n(u) = \int_{n-u}^{n+u} \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{t^x} \right) dt .$$

- 1°) a. Démontrer que la fonction φ_n est de classe C^∞ sur l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$; calculer $\varphi_n(0)$, $\varphi_n'(0)$ et $\varphi_n''(0)$.
- b. Démontrer, pour tout entier $n > 1$ et pour tout réel x de I , la relation :

$$f_n(x) = \int_{n-1/2}^{n+1/2} \frac{dt}{t^x} + \varphi_n\left(\frac{1}{2}\right) .$$

c. Démontrer l'encadrement :

$$\frac{x(x+1)}{24} \frac{1}{(n+1)^{x+2}} \leq -\Phi_n\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{x(x+1)}{24} \frac{1}{(n-1)^{x+2}}$$

d. Soient x un réel et N un entier strictement supérieurs à 1 ; en utilisant la question 1°a. précédente, démontrer la double inégalité :

$$\frac{x}{24(N+2)^{x+1}} \leq \frac{1}{(x-1)(N+\frac{1}{2})^{x-1}} - R_N(x) \leq \frac{x}{24(N-1)^{x+1}}$$

2°) En utilisant les résultats précédents, calculer à 10^{-6} près les nombres $\zeta(1,1)$, $\zeta(1,01)$ et $\zeta(1,005)$.

Troisième partie

1°) On considère la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ des fonctions définies sur $]0, \infty[$ par la relation :

$$g_n(x) = S_n(x) - \int_1^n \frac{dt}{t^x}.$$

S_n est la fonction définie sur $]0, \infty[$:

$$S_n(x) = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \dots + \frac{1}{n^x}.$$

a. Démontrer que cette suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente sur l'intervalle $]0, \infty[$. Soit g la fonction limite. Préciser la restriction de la fonction g à l'intervalle $I =]1, \infty[$.

b. En utilisant un encadrement de la fonction $g_{n+p} - g_n$ (où $p \in \mathbb{N}^*$), démontrer, pour tout x strictement positif et pour tout entier n de \mathbb{N}^* , la relation :

$$-\frac{1}{n^x} \leq g(x) - g_n(x) \leq 0.$$

c. Établir que g est continue sur $]0, \infty[$.

2°) Démontrer que l'expression $\zeta(x) - \frac{1}{x-1}$ admet une limite égale à $g(1)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures.

FIN DU PROBLÈME