

Thème du problème : cercles tangents (géométrie plane).

Tous les cercles donnés ont un rayon non nul.

PREMIÈRE PARTIE

A

**Cercles dont la distance des centres égale la somme des rayons.**

On considère deux cercles  $\mathcal{C}_A$  et  $\mathcal{C}_B$  de centres respectifs A et B, de rayons respectifs  $r_1$  et  $r_2$  tels que  $AB = r_1 + r_2$ .

Démontrer que ces cercles ont un seul point commun K, situé sur le segment [AB], et que, hormis le point K, tout point de l'un des cercles est extérieur au disque déterminé par l'autre.

Montrer que  $\mathcal{C}_A$  et  $\mathcal{C}_B$  admettent en K la même tangente.

On dit que de tels cercles sont tangents extérieurement, ou que le contact de ces cercles tangents est extérieur.

B

**Cercles dont la distance des centres égale la valeur absolue de la différence des rayons.**

On considère deux cercles  $\mathcal{C}_A$  et  $\mathcal{C}_B$  de centres respectifs A et B, de rayons respectifs distincts  $r_1$  et  $r_2$  tels que  $AB = |r_1 - r_2|$ .

Démontrer que ces cercles ont un seul point commun K, situé sur la droite (AB), et que tout point du cercle de plus petit rayon est contenu dans le disque déterminé par le cercle de plus grand rayon.

Montrer que  $\mathcal{C}_A$  et  $\mathcal{C}_B$  admettent en K la même tangente.

On dit que deux tels cercles sont tangents intérieurement, ou que le contact de ces cercles tangents est intérieur.

C

**Homothéties qui échangent deux cercles tangents.**

1. Soit deux cercles  $\mathcal{C}_A$  et  $\mathcal{C}_B$  tangents en K, de centres respectifs A et B, de rayons respectifs  $r_1$  et  $r_2$  distincts.

Montrer qu'il existe une homothétie de centre K transformant  $\mathcal{C}_A$  en  $\mathcal{C}_B$ . Préciser son rapport.

Montrer qu'il existe une autre homothétie transformant  $\mathcal{C}_A$  en  $\mathcal{C}_B$ . Préciser son rapport et construire son centre T.

2. Que peut-on dire si les deux rayons  $r_1$  et  $r_2$  sont égaux ?

D

**Étude sur un exemple de trois cercles tangents deux à deux.**

On considère un triangle ABC dont les côtés  $a = BC$ ,  $b = CA$ ,  $c = AB$  sont respectivement 7 cm, 5 cm, 6 cm.

Soit trois cercles  $\mathcal{C}_A$ ,  $\mathcal{C}_B$ ,  $\mathcal{C}_C$  de centres respectifs A, B, C et de rayons respectifs  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  avec  $r_1 = 2$  cm,  $r_2 = 4$  cm,  $r_3 = 3$  cm.

1. Démontrer que ces cercles sont tangents extérieurement deux à deux. On note I le point de contact de  $\mathcal{C}_B$  et  $\mathcal{C}_C$ , J celui de  $\mathcal{C}_C$  et  $\mathcal{C}_A$ , K celui de  $\mathcal{C}_A$  et  $\mathcal{C}_B$ .

2. Quel est le rapport de l'homothétie de centre K qui transforme  $\mathcal{C}_A$  en  $\mathcal{C}_B$  ?

3. La droite (IK) recoupe le cercle  $\mathcal{C}_A$  au point X; la droite (JI) recoupe le cercle  $\mathcal{C}_B$  en Y; la droite (YK) recoupe le cercle  $\mathcal{C}_A$  en Z.

M est un point de  $\mathcal{C}_A$  distinct de K, X, Z. La droite (MK) recoupe  $\mathcal{C}_B$  en N, la droite (NI) recoupe  $\mathcal{C}_C$  en P, la droite (PJ) recoupe  $\mathcal{C}_A$  en Q. Montrer que M et Q sont diamétralement opposés sur le cercle  $\mathcal{C}_A$ .

Étudier successivement les cas particuliers où M est l'un des trois points K, X, Z.

### DEUXIÈME PARTIE

#### Construction de trois cercles tangents deux à deux

Le but de cette partie est la construction de trois cercles tangents deux à deux à partir de la donnée de leurs centres : trois points non alignés A, B, C. Ces trois points constituent un triangle dont les côtés sont  $a = BC$ ,  $b = CA$ ,  $c = AB$ .

#### A Préliminaire.

Démontrer que lorsque trois cercles, de centres non alignés, sont tangents deux à deux, il ne peut s'agir que de l'un des cas suivants :

- soit les trois contacts sont extérieurs;
- soit deux contacts sont intérieurs et le troisième extérieur.

#### B Étude du cas où les trois contacts sont extérieurs.

##### 1. Étude de conditions nécessaires.

Soit trois cercles  $\mathcal{C}_A, \mathcal{C}_B, \mathcal{C}_C$ , de centres respectifs A, B, C non alignés, de rayons respectifs  $r_1, r_2, r_3$ . On les suppose tangents extérieurement deux à deux,  $\mathcal{C}_B$  et  $\mathcal{C}_C$  en I,  $\mathcal{C}_C$  et  $\mathcal{C}_A$  en J,  $\mathcal{C}_A$  et  $\mathcal{C}_B$  en K.

Pour réaliser une figure d'étude uniquement, on peut prendre, comme à la première partie,  $a = 7$  cm,  $b = 5$  cm,  $c = 6$  cm avec  $r_1 = 2$  cm,  $r_2 = 4$  cm,  $r_3 = 3$  cm.

Les perpendiculaires en I et J à (BC) et (CA) se coupent en  $\Omega$ .

a. Justifier l'égalité  $\Omega I = \Omega J$ . En déduire que :

$$\Omega A^2 - KA^2 = \Omega B^2 - KB^2, \text{ puis que } \Omega A^2 - \Omega B^2 = KA^2 - KB^2.$$

Montrer que  $\Omega$  et K sont sur une même perpendiculaire à la droite (AB).

b. Démontrer que  $\Omega$  est le centre du cercle inscrit au triangle ABC, I, J, K étant les points de contact avec les côtés.

##### 2. Construction.

On donne trois points A, B, C non alignés. Construire trois cercles de centres respectifs A, B, C, tangents deux à deux extérieurement. Combien ce problème a-t-il de solutions ?

#### Étude du cas où un seul des trois contacts est extérieur.

##### 1. Étude de conditions nécessaires.

Soit trois cercles  $\mathcal{C}_A, \mathcal{C}_B, \mathcal{C}_C$  de centres respectifs A, B, C non alignés et de rayons respectifs  $r_1, r_2, r_3$ . On suppose que  $\mathcal{C}_B$  et  $\mathcal{C}_C$  sont tangents extérieurement en I,  $\mathcal{C}_C$  et  $\mathcal{C}_A$  tangents intérieurement en J,  $\mathcal{C}_A$  et  $\mathcal{C}_B$  tangents intérieurement en K.

Une figure d'étude peut être obtenue avec  $a = 6$  cm,  $b = 3$  cm,  $c = 5$  cm,  $r_1 = 7$  cm,  $r_2 = 2$  cm,  $r_3 = 4$  cm.

Démontrer que I, J, K sont les points de contact avec les côtés du cercle exinscrit au triangle ABC dans l'angle  $\widehat{CAB}$ .

##### 2. Construction.

On donne trois points A, B, C non alignés. Construire trois cercles de centres respectifs A, B, C, tangents deux à deux, les deux derniers seuls ayant un contact extérieur. Combien ce problème a-t-il de solutions ?

TROISIÈME PARTIE

Quelques propriétés de la figure formée  
par trois cercles tangents deux à deux mettant en jeu les rayons

A Cas où les trois contacts sont extérieurs.

Soit trois cercles  $\mathcal{C}_A, \mathcal{C}_B, \mathcal{C}_C$  de centres respectifs A, B, C non alignés, de rayons respectifs  $r_1, r_2, r_3$ , tangents deux à deux extérieurement en I sur [BC], J sur [CA], K sur [AB].

Le triangle ABC de côtés  $a = BC, b = CA, c = AB$  a pour demi-périmètre  $p$ .

- Démontrer que  $r_1 + r_2 + r_3 = p$  puis que  $r_1 = p - a, r_2 = p - b, r_3 = p - c$ .
- En utilisant le barycentre G des points A, B, C respectivement affectés des coefficients  $r_2 r_3, r_3 r_1, r_1 r_2$ , démontrer que les droites (AI), (BJ), (CK) sont concourantes.

B Cas où un seul des trois contacts est extérieur.

Soit trois cercles  $\mathcal{C}_A, \mathcal{C}_B, \mathcal{C}_C$  de centres respectifs A, B, C non alignés, de rayons respectifs  $r_1, r_2, r_3$  tels que  $\mathcal{C}_B$  et  $\mathcal{C}_C$  soient tangents extérieurement en I,  $\mathcal{C}_C$  et  $\mathcal{C}_A$  tangents intérieurement en J,  $\mathcal{C}_A$  et  $\mathcal{C}_B$  tangents intérieurement en K.

Le triangle ABC de côtés  $a = BC, b = CA, c = AB$  a pour demi-périmètre  $p$ .

- Démontrer que  $r_1 = p, r_2 = p - c, r_3 = p - b$ .  
Démontrer que  $r_1 r_2 + r_1 r_3 - r_2 r_3 > 0$ .
- Démontrer que les droites (AI), (BJ), (CK) sont concourantes.

C

- Soit un triangle ABC de côtés  $a = BC, b = CA, c = AB$ , de demi-périmètre  $p$ , d'aire  $s$ . Le cercle inscrit a pour centre  $\Omega$  et pour rayon  $R$ , le cercle exinscrit dans l'angle  $\widehat{BAC}$  a pour centre  $\Omega'$  et pour rayon  $R'$ .

- En reliant les aires des triangles ABC,  $\Omega BC, \Omega CA$  et  $\Omega AB$ , montrer que  $s = pR$ .
- Montrer que  $s = (p - a)R'$ .
- On rappelle que dans le triangle ABC :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A} \quad \text{et} \quad 2s = bc \sin \widehat{A}.$$

Établir que :  $16s^2 = (a + b + c)(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)$ .

En déduire que :  $s = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$ .

- On considère trois cercles  $\mathcal{C}_A, \mathcal{C}_B, \mathcal{C}_C$  de centres respectifs A, B, C non alignés, de rayons respectifs  $r_1, r_2, r_3$  tangents deux à deux.
  - Montrer que, si les trois contacts sont extérieurs,

$$\frac{1}{r_2 r_3} + \frac{1}{r_3 r_1} + \frac{1}{r_1 r_2} = \frac{1}{R^2}.$$

- Montrer que, si  $\mathcal{C}_B$  et  $\mathcal{C}_C$  ont seuls un contact extérieur,

$$\frac{1}{r_2 r_3} - \frac{1}{r_3 r_1} - \frac{1}{r_1 r_2} = \frac{1}{R'^2}.$$

## QUATRIÈME PARTIE

**Première étude, sur des cas particuliers,  
de la famille  $\mathcal{F}$  des cercles tangents à deux cercles tangents donnés**

Soit deux cercles  $\mathcal{C}_A$  et  $\mathcal{C}_B$  tangents en un point K, de centres respectifs A et B, de rayons respectifs  $3\lambda$  et  $\lambda$  où  $\lambda$  est un réel donné strictement positif.

**A Cas où  $\mathcal{C}_A$  et  $\mathcal{C}_B$  sont tangents intérieurement.**

1. Soit O le milieu du segment [AB]. On choisit un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  dans lequel le point A a pour coordonnées  $(\lambda, 0)$ . A tout point M de coordonnées  $(x, y)$ , on associe le nombre complexe  $z = x + iy$ .

On considère l'ensemble E des points M du plan tels que :

$$14 z\bar{z} - z^2 - \bar{z}^2 = 48 \lambda^2$$

( $\bar{z}$  est le complexe conjugué de  $z$ ).

Écrire l'équation cartésienne de E.

Montrer que E est une ellipse de centre O, de foyers A et B, dont on précisera les sommets et l'excentricité.

Tracer E.

2. M étant un point quelconque de l'ellipse E, démontrer que  $MA + MB = 4\lambda$ .

En déduire que M est le centre d'un cercle tangent à la fois à  $\mathcal{C}_A$  et à  $\mathcal{C}_B$ .

3. Démontrer que l'ellipse E est l'ensemble des centres des cercles tangents intérieurement à  $\mathcal{C}_A$  et tangents extérieurement à  $\mathcal{C}_B$ .

**B Cas où  $\mathcal{C}_A$  et  $\mathcal{C}_B$  sont tangents extérieurement.**

1. Montrer que si M est le centre d'un cercle tangent extérieurement à  $\mathcal{C}_A$  et  $\mathcal{C}_B$ , alors  $MA - MB = 2\lambda$ .

2. Montrer que si M est le centre d'un cercle tangent intérieurement à  $\mathcal{C}_A$  et  $\mathcal{C}_B$ , alors  $MB - MA = 2\lambda$ .

3. En déduire que si M est le centre d'un cercle tangent à  $\mathcal{C}_A$  et  $\mathcal{C}_B$ , les contacts étant de même nature, alors M est sur une hyperbole H, de foyers A et B, dont on précisera les sommets, l'excentricité, les asymptotes.

4. Tracer H.

5. Démontrer que l'hyperbole H est l'ensemble des centres des cercles tangents à  $\mathcal{C}_A$  et  $\mathcal{C}_B$ , les contacts étant de même nature.

6. On considère un repère orthonormal analogue à celui envisagé à la question A.1. de cette quatrième partie. A tout point M de coordonnées  $(x, y)$ , on associe le nombre complexe  $z = x + iy$ . Trouver une relation entre  $z$  et  $\bar{z}$  caractérisant les points de H.

## CINQUIÈME PARTIE

**Famille  $\mathcal{F}$  des cercles tangents à deux cercles tangents donnés  
(deuxième étude)****A Préliminaire : introduction de la puissance d'un point par rapport à un cercle.**

1. Soit un cercle  $\mathcal{C}$  de centre O et de rayon  $r$ , et un point M du plan. Une droite  $\Delta$  passant par M coupe  $\mathcal{C}$  en P et Q. On désigne par P' le point de  $\mathcal{C}$  diamétralement opposé à P.

Montrer que :  $\overline{MP} \cdot \overline{MQ} = \overline{MP} \cdot \overline{MP'}$ .

En déduire que ce nombre peut encore s'écrire  $MO^2 - r^2$  et qu'il ne dépend pas de la sécante choisie. Ce nombre est appelé la puissance du point M par rapport au cercle  $\mathcal{C}$  et noté  $\mathcal{P}_r(M)$ .

Montrer que si M est extérieur au disque déterminé par  $\mathcal{C}$  et si t désigne le point de contact d'une tangente à  $\mathcal{C}$  issue de M,  $\mathcal{P}_r(M) = Mt^2$ .

2. Préciser le signe de  $\mathcal{P}_r(M)$  suivant la position de M par rapport à  $\mathcal{C}$ .

B

Soit deux cercles  $\mathcal{C}_A$  et  $\mathcal{C}_B$  tangents en un point  $K$ , de centres respectifs  $A$  et  $B$ , de rayons respectifs distincts  $r_1$  et  $r_2$ . Soit  $T$  le centre de la deuxième homothétie  $h$  transformant  $\mathcal{C}_A$  en  $\mathcal{C}_B$ .

1. Soit  $\mathcal{C}$  un cercle de centre  $\omega$  tangent à  $\mathcal{C}_A$  et  $\mathcal{C}_B$  en deux points distincts  $U$  et  $V$ .
  - a. En utilisant les homothéties de centre  $U$  transformant  $\mathcal{C}_A$  en  $\mathcal{C}$  et de centre  $V$  transformant  $\mathcal{C}$  en  $\mathcal{C}_B$ , montrer que  $U, V$  et  $T$  sont alignés.
  - b. En introduisant le cercle circonscrit au triangle  $UVK$ , qui existe en général, et en appliquant les résultats obtenus dans la deuxième partie, montrer que  $\overline{TU} \cdot \overline{TV} = TK^2$ .  
En déduire que :  $\mathcal{P}_r(T) = TK^2$ .  
Examiner le cas où  $\omega$  est sur la droite  $(TK)$ .
2. Réciproquement, soit  $\Delta$  une droite passant par  $T$  coupant le cercle  $\mathcal{C}_A$  en  $U_1$  et  $U_2$  supposés distincts. On désigne par  $V_1$  et  $V_2$  les images de  $U_1$  et  $U_2$  par l'homothétie  $h$ .  
Montrer que les droites  $(AU_1)$  et  $(BV_2)$  sont en général sécantes ; on appelle  $\omega$  leur point d'intersection. Montrer que le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $\omega$  passant par  $U_1$  est tangent aux deux cercles  $\mathcal{C}_A$  et  $\mathcal{C}_B$ , et que la puissance de  $T$  par rapport à  $\mathcal{C}$  est  $TK^2$ .  
Examiner le cas où  $\Delta$  est la droite  $(TK)$ .
3. Caractérisation des cercles de la famille  $\mathcal{F}$ , famille des cercles tangents à  $\mathcal{C}_A$  et  $\mathcal{C}_B$  en des points distincts.  
Montrer qu'un cercle  $\mathcal{C}$  appartient à  $\mathcal{F}$  si et seulement si  $\mathcal{C}$  est tangent à l'un des cercles  $\mathcal{C}_A$  ou  $\mathcal{C}_B$  et  $\mathcal{P}_r(T) = TK^2$ .  
En déduire que par tout point de  $\mathcal{C}_A$ , autre que les points de contact des tangentes éventuelles à  $\mathcal{C}_A$  passant par  $T$ , il passe un cercle tangent à  $\mathcal{C}_A$  et  $\mathcal{C}_B$ .

C

Soit trois cercles  $\mathcal{C}_A, \mathcal{C}_B, \mathcal{C}_C$  de centres respectifs  $A, B, C$  non alignés et de rayons respectifs  $r_1, r_2, r_3$  distincts deux à deux. On les suppose tangents deux à deux aux points respectifs  $K$  sur  $(AB)$ ,  $I$  sur  $(BC)$ ,  $J$  sur  $(CA)$ .  $R, S, T$  sont les centres des autres homothéties transformant respectivement  $\mathcal{C}_B$  en  $\mathcal{C}_C$ ,  $\mathcal{C}_C$  en  $\mathcal{C}_A$ ,  $\mathcal{C}_A$  en  $\mathcal{C}_B$ .

1. Faire une figure soignée.
2. Justifier les alignements (de trois points) qui apparaissent, faisant intervenir des éléments de  $\{I, J, K, R, S, T\}$ .