

PARTIE I

I.A.1) On pose : $\theta = \text{Arccos } x$

Pour calculer $\cos(n\theta)$ on utilise la formule de Moivre :

$$\cos(n\theta) = \sum_{k=0, 2k \leq n} \binom{n}{2k} \cos^{n-2k}(\theta) \sin^{2k}(\theta) = \sum_{k=0, 2k \leq n} \binom{n}{2k} \cos^{n-2k}(\theta) (1 - \cos^2(\theta))^k$$

avec $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$

$\cos(n\theta)$ est un polynôme de degré n en $\cos \theta$ donc f_n est un polynôme de degré n en x

I.A.2) De la question précédente on obtient :

$$a_n = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0, 2k \leq n} \binom{n}{2k} = \frac{1}{2^{n-1}} \left(\frac{(1+1)^n - (1-1)^n}{2} \right) = 1$$

I.A.3)

$$\begin{aligned} T_1(X) &= X \\ T_2(X) &= X^2 - \frac{1}{2} \\ T_3(X) &= X^3 - \frac{3}{4}X \\ T_4(X) &= X^4 - X^2 + \frac{1}{8} \end{aligned}$$

I.A.4) Formule de trigonométrie :

$$P_{n+1}(X) + P_{n-1}(X) = \cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2 \cos(n\theta) \cos \theta = 2X P_n(X)$$

I.A.5) Pour : $|X| \leq 1$ on pose toujours : $\theta = \text{Arccos } X$ ou $X = \cos \theta$ $\theta \in [0, \pi]$

$$P_n(X) = \cos(n\theta) = 0 \text{ donne : } \theta = \frac{-\pi + 2k\pi}{2n}$$

soit n valeurs distinctes de X pour $k = 1..n$

Ce sont donc toutes les racines de P_n polynôme de degré n et ce sont des racines simples.

I.A.6) Sous la forme : $f_n(x) = T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n\theta)$, les extréma absolu sont $\frac{1}{2^{n-1}}$ et $\frac{-1}{2^{n-1}}$ et sont atteint pour :

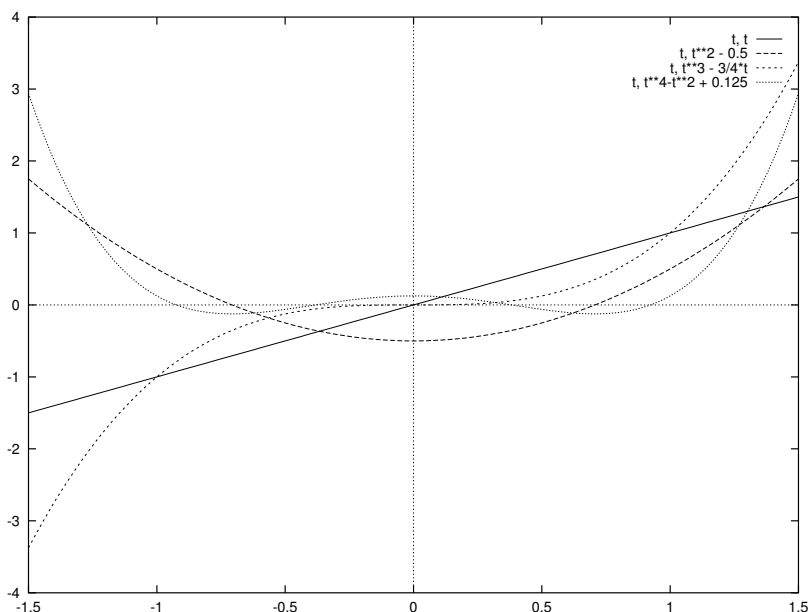
$$\theta = \frac{2k\pi}{2n} \text{ distinctes pour } k = 0..n$$

I.A.7) Avec la formule : $P_n = -P_{n-2} + 2XP_{n-1}$ à partir de $P_1 = X$ et $P_2 = 2X^2 - 1$

maple

```
restart : n := 10 ;
f[1] := x :
f[2] := x^2-1 :
if n>2 then
for k from 3 to n do
f[k] := collect(2*x*f[k-1]-f[k-2],x) ;
od ; fi ;
seq(f[k],k=1..n) ;
n := 10
```

$$\begin{aligned} & x \\ & x^2 - 1 \\ & 2x^3 - 3x \\ & 4x^4 - 7x^2 + 1 \\ & 8x^5 - 16x^3 + 5x \\ & 16x^6 - 36x^4 + 17x^2 - 1 \\ & 32x^7 - 80x^5 + 50x^3 - 7x \\ & 64x^8 - 176x^6 + 136x^4 - 31x^2 + 1 \\ & 128x^9 - 384x^7 + 352x^5 - 112x^3 + 9x \\ & 256x^{10} - 832x^8 + 880x^6 - 360x^4 + 49x^2 - 1 \end{aligned}$$



I.B.1)

I.B.2) T_n et P étant unitaires $T_n - P$ est donc de degré $< n$

Pour les valeurs y_k des extrema de f_n on constate que $(T_n - P)(y_k)$ est positif pour un maximum et négatif pour un minimum donc P_n possède au moins n racines distinctes, ce qui est impossible.

I.B.3) Fin du raisonnement par l'absurde : on déduit de la question précédente : $\sup_{-1 \leq x \leq 1} |P(x)| \geq \frac{1}{2^n - 1}$
d'où le résultat.

I.B.4) Intégrale généralisée à étudier aux bornes en distinguant si $f(1)$ et $f(-1)$ sont nuls ou pas.

Pour 1, Si $f(1) \neq 0$: $f(x) \sim \frac{f(1)}{\sqrt{2(1-x)^{1/2}}}$ et l'intégrale converge en 1 (règle de Riemann)

Si $f(1) = 0$, sur un voisinage de 1 $|f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2(1-x)^{1/2}}}$ et l'intégrale converge encore en 1.

Même étude en -1.

I.B.5)a) On reconnaît une forme bilinéaire symétrique définie positive (propriété de l'intégrale d'une fonction continue positive)

I.B.5)b)

$$(h_n, h_m) = \int_{-1}^1 \frac{2}{\pi} \frac{P_n(x) \cdot P_m(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^\pi \frac{2}{\pi} \cos(n\theta) \cdot \cos(m\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos((n+m)\theta) + \cos((n-m)\theta)) d\theta = \delta_{mn}$$

PARTIE II

II.A.1)

$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ est continue sur $E \times E$

E est inclus dans un rectangle de \mathbb{R}^2 , la longueur de la diagonale de ce rectangle est un majorant de $d(A, B)$ et de $d(A, B, C)$ donc d_2 et d_3 existent.

II.A.2) quelque soit A, B, C $d(A, B, C)$ est majoré par d_2 donc $d_3 \leq d_2$ comme plus petit des majorants.

II.A.3) $d_3 \leq \sup_{(A,B) \in E^2} \left(\sup_{C \in E} d(A, B, C) \right)$

d étant une fonction continue sur E fermé et borné d atteint ses bornes.

Donc : $\exists C_{A,B} / \sup_{c \in E} d(A, B, C) = d(A, B, C_{A,B}) \leq d_3$

II.B. Pour C fixé le sup est atteint pour A et B aux bornes de l'intervalle.

x étant l'abscisse de C : $d(A, B, C) = [a \cdot (x - x_a)(a - x + x_a)]^{1/3}$

l'étude de la fonction donne : $d_3 = \left(\frac{a^3}{4} \right)^{1/3}$

II.C.1) Etude d'un triangle isocèle : $AB = 2R \sin \frac{\gamma - \beta}{2}$.

II.C.2) Soit $\psi(\beta) = \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \sin \frac{\gamma - \beta}{2}$

$$\psi'(\beta) = \frac{1}{4} \left(\cos \frac{\beta - \alpha}{2} \sin \frac{\gamma - \beta}{2} - \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \cos \frac{\gamma - \beta}{2} \right) = \frac{1}{4} \sin \left(\frac{2\beta - \alpha - \gamma}{2} \right)$$

d'où un maximum pour : $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$ sur $[\alpha, \gamma]$.

II.C.3) Il reste à étudier l'extrémum de $g(\alpha, \gamma) = \sin \frac{\gamma - \alpha}{2} \sin^2 \frac{\gamma - \alpha}{4} = 2 \cos \frac{\gamma - \alpha}{4} \sin^3 \frac{\gamma - \alpha}{4}$
on obtient $2\varphi(t)$ en posant $t = \sin \frac{\gamma - \alpha}{4}$

$$\varphi'(t) = \frac{t^2(3 - 4t^2)}{\sqrt{1 - t^2}}$$

donne un maximum pour : $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$

II.C.4)

$$d_3 = \left(16R^3 \varphi \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = \sqrt{3} \cdot R$$

PARTIE III

III.A.1) D est une fonction continue de E^{n+1} fermé borné $\rightarrow \mathbb{R}$ donc elle atteint ses bornes.

Remarque : question hors programme

III.A.2) Pour les valeurs de la question précédente :

$$D_{n+1} = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} |x_j - x_i| = \left(\prod_{2 \leq j \leq n+1} |x_j - x_1| \right) \left(\prod_{2 \leq i < j \leq n+1} |x_j - x_i| \right) \leq \left(\prod_{2 \leq j \leq n+1} |x_j - x_1| \right) D_n$$

III.A.3) Cette formule écrite pour $i = 1$ peut se généraliser pour chaque valeur de i . En faisant le produit de ces formules, on obtient :

$$D_{n+1}^{n+1} \leq \left(\prod_{1 \leq i \leq n+1} \left(\prod_{\substack{1 \leq j \leq n+1 \\ i \neq j}} |x_j - x_i| \right) \right) D_n^{n+1} \leq D_n^{n+1} D_{n+1}^2$$

puisque dans le produit figure deux fois les facteurs de D_{n+1} .

Après simplification : $D_{n+1}^{n-1} \leq D_n^{n+1}$

III.A.4) d_n est une suite positive, calculons

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{\frac{2}{D_{n+1}^{n(n+1)}}}{\frac{2}{D_n^{n(n-1)}}} = \left(\frac{D_{n+1}^{n-1}}{D_n^{n+1}} \right)^{\frac{2}{n(n-1)(n+1)}} \leq 1$$

La suite est décroissante minorée, elle est donc convergente.

III.B.1) $\mu(P) \geq \frac{1}{2^{n-1}}$ valeur atteinte pour T_n donc $\mu_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ et $m_n = \frac{1}{2^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{2} 2^{\frac{1}{n}}$

III.B.2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n} \ln 2} = 1$

Donc : $m = \frac{1}{2}$

III.B.3)

• cas $l = 0$ En écrivant la définition de la limite : $\forall \varepsilon \exists n_o / \forall n > n_o \quad |u_n| < \varepsilon$

$$\frac{u_1 \dots n u_n}{n(n+1)} = \frac{u_1 \dots n_o u_{n_o}}{n(n+1)} + \frac{(n_o + 1) u_{n_o+1} \dots n u_n}{n(n+1)}$$

$$\text{avec : } \left| \frac{(n_o + 1) u_{n_o+1} \dots n u_n}{n(n+1)} \right| \leq \left| \frac{1 + \dots + n_o + (n_o + 1) \dots n}{n(n+1)} \right| \varepsilon \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

• cas $l \neq 0$ On pose : $v_n = u_n - l$

$$\frac{u_1 \dots n u_n}{n(n+1)} = \frac{v_1 \dots n v_n}{n(n+1)} + \frac{l}{2} \text{ converge vers } \frac{l}{2}$$

III.C.1) Propriétés des déterminants : Développement par rapport à une ligne puis antisymétrie.

III.C.2) A partir de **III.A.2)** et par développement du déterminant par rapport à la dernière ligne, pour tout $P \in \mathcal{P}_n$ et pour les coefficient de **III.A.1)**

$$D_{n+1} = |V(\lambda_1 \dots \lambda_{n+1})| \leq \sum_{i=1}^{n+1} |P(\lambda_i)| \cdot |V_{i_j \neq i}(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_j}, \dots, \lambda_{i_n})|$$

$$D_{n+1} = (n+1)\mu(P)D_n$$

En prenant : $P = T_n$ on retrouve : $\mu(T_n) = \mu_n$ donc :

$$D_{n+1} = (n+1)\mu_n D_n$$

$$\text{Soit avec les définitions : } \frac{n(n+1)}{d_{n+1}^2} \leq (n+1) \frac{n(n-1)}{d_n^2} m_n^n$$

III.C.3) Avec ce polynôme, dans le déterminant de **III.C.1)** : $P(x_1) = \dots = P(x_n) = 0$ et son développement par rapport à la dernière ligne se réduit à : $V(x_1, \dots, x_n, x) = P(x)V(x_1, \dots, x_n)$ soit :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n \quad x_{n+1} \text{ étant tel que : } \mu(P) = P(x_{n+1}) \quad D_{n+1} \geq |V(x_1, \dots, x_{n+1})| = \mu(P) \cdot |V(x_1, \dots, x_n)|$$

$$D_{n+1} \geq \mu_n \cdot |V(x_1, \dots, x_n)|$$

$$\text{Donc } D_{n+1} \geq \mu_n \cdot D_n$$

$$\text{Soit avec les définitions : } \frac{n(n+1)}{d_{n+1}^2} \geq d_n \frac{n(n-1)}{2} m_n^n$$

III.C.4) On déduit du résultat précédent (relation entre nombres positifs) :

$$m_n \leq d_{n+1} \cdot \left(\frac{d_{n+1}}{d_n} \right)^{\frac{n-1}{2}}$$

On a démontré que la suite (d_n) est décroissante d'où le résultat.

Par passage à la limite : $m \leq d$

III.C.5) on a : $d_2 = 2$

Ecrivons le logarithme de **III.C.2)** pour un indice $p \quad 2 \leq p \leq n$

$$\frac{p(p+1)}{2} \ln(d_{p+1}) \leq \frac{p(p-1)}{2} \ln(d_p) + p \ln(m_p) + \ln(p+1)$$

soit en sommant :

$$\sum_2^n \frac{p(p+1)}{2} \ln(d_{p+1}) = \sum_3^{n+1} \frac{p(p-1)}{2} \ln(d_p) \leq \sum_2^n \frac{p(p-1)}{2} \ln(d_p) + \sum_2^n p \ln(m_p) + \sum_2^n \ln(p+1)$$

$$\frac{n(n+1)}{2} \ln(d_{n+1}) \leq \ln(d_2) + \sum_2^n p \ln(m_p) + \sum_2^n \ln(p+1)$$

$$\frac{1}{2} \ln(d_{n+1}) \leq \frac{\ln(2)}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)} \sum_2^n p \ln(m_p) + \frac{1}{n(n+1)} \sum_2^n \ln(p+1)$$

On utilise **III.B.3)** et on vérifie : $0 \leq \frac{1}{n(n+1)} \sum_2^n \ln(p+1) \leq \frac{\ln(n+1)}{n+1}$ pour faire le passage à la limite :

$$\frac{1}{2} \ln(d) \leq \frac{1}{2} \ln(m) + 0$$

$$\text{soit } d \leq m$$

Les deux inégalités prouvent : $m = d = \frac{1}{2}$