

OPTIONS M, P' ET TA - 1ERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(DUREE : 4 HEURES)

L'énoncé de cette épreuve, commune aux candidats des options M, P' et TA, comporte 3 pages.

Il est demandé expressément aux candidats de donner des démonstrations précises et rigoureuses. Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en considération par le correcteur.

RAPPEL : \mathbb{R} désigne l'ensemble de tous les réels, \mathbb{R}^* l'ensemble des réels différents de 0,

Soit f une fonction donnée définie dans \mathbb{R}^* , à valeurs dans \mathbb{R} ; on considère la série de terme général $u_n(x)$:

$$u_n(x) = f(n+x) - f(n). \quad n = 1, 2, \dots$$

Si pour $x \in \mathbb{R}$, cette série est convergente, on considère la fonction F définie par :

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

On étudie les propriétés de F connaissant certaines propriétés de f .

PREMIERE PARTIE

1°) Déterminer une condition nécessaire et suffisante (C_1) portant sur f , pour que le nombre $F(1)$ existe. Etudier dans chacun des exemples suivants, si la condition (C_1) est satisfaite et calculer $F(1)$ lorsque ce nombre existe :

$$f_1 : x \mapsto \left(\frac{|x|^\alpha}{1 + |x|^\alpha} \right)^x \quad \alpha \text{ réel donné}$$

$$f_2 : x \mapsto \sin\left[(4x + \sqrt{|x|}) \frac{\pi}{2}\right]$$

$$f_3 : x \mapsto \sin\left[(2x + \sqrt{|x|}) \frac{\pi}{2}\right]$$

$$f_4 : x \mapsto \sin\left(\frac{x^4 + 1}{x^2 + 1} \cdot \pi\right)$$

2°) Déterminer une condition nécessaire et suffisante (C_2) portant sur f pour que le nombre $F(2)$ existe. Comparer les deux conditions (C_1) et (C_2). Etudier les exemples f_2 et f_3 précédents.

3°) a) Soit p un entier donné ($p > 1$) ; trouver une condition nécessaire et suffisante (C_p) pour que $F(p)$ existe.

b) Soit p un entier naturel ; p = 0, 1, 2... ; préciser F(0).

En supposant que la condition (C₁) est vérifiée, calculer F(p+1) - F(p) en utilisant f.
Quelle est la limite de F(p+1) - F(p) lorsque l'entier p tend vers + ∞ ?

4°) On suppose que la série de terme général f(n) est convergente. Soit S sa somme :

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) .$$

Montrer que F(p) existe quel que soit p ∈ ℕ. Montrer que la série de terme général F(p+1) - F(p) est convergente. Calculer au moyen de S sa somme :

$$\sum_{p=0}^{\infty} (F(p+1) - F(p))$$

DEUXIEME PARTIE

Dans cette partie, on suppose f continûment dérivable dans ℝⁿ et telle qu'il existe trois constantes N, K, α (N entier > 1, K réel > 0, α réel > 1) telles que :

$$\forall x \geq N \quad |f'(x)| \leq \frac{K}{x^\alpha}$$

1°) Soit x un réel fixé distinct d'un entier négatif.

a) En utilisant une majoration de |f(x+n) - f(x)| pour n assez grand, montrer que la fonction F est définie pour tout x réel différent d'un entier relatif strictement négatif.

b) Que peut-on en déduire pour f(p) lorsque p entier tend vers + ∞ ?
Est-ce que f(x) admet une limite lorsque x tend vers + ∞ ?

2°) Soient deux réels fixés x et x' tous deux strictement positifs.

On pose :

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{n=N} [f(x+n) - f(n)]$$

le nombre N étant celui défini précédemment.

a) Montrer l'inégalité suivante

$$|S_N(x) - S_N(x')| \leq N A |x - x'|$$

où A = Sup { |f'(y)| | y ∈ [1, +∞[} . (On commencera par démontrer l'existence de cette borne supérieure).

b) Montrer une inégalité du même type pour la somme :

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} [f(x+n) - f(x'+n)]$$

et en déduire qu'il existe une constante L telle que :

$$|F(x) - F(x')| \leq L |x - x'|$$

c) Montrer que F est continue sur ℝ₊ⁿ. Est-ce que F est continue à droite au point x = 0 ?

.../...

3°) Soit de nouveau x un réel fixé distinct d'un entier négatif.

a) Calculer $F(x+1) - F(x)$ en utilisant f et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. En déduire la continuité de F sur $]-1,0[$ puis sur l'ensemble des réels qui ne sont pas des entiers strictement négatifs.

b) En reprenant brièvement les résultats de la question 2°) précédente, montrer que $\lim_{x \rightarrow -1} [F(x) - f(1+x)]$ existe ; exprimer cette limite au moyen de la somme d'une série convergente.

c) Montrer, plus généralement que $\lim_{x \rightarrow -p} [F(x) - f(x+p)]$ existe lorsque p est un entier strictement positif ; exprimer cette limite au moyen de la somme d'une série convergente.

4°) On suppose, dans cette question, que f est impaire et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. On définit alors G

sur l'ensemble des réels différents d'un entier relatif :

$$G(x) = F(x) - F(-x) + f(x).$$

a) Montrer que G est impaire périodique de période 1.

b) Déduire des résultats précédents que pour tout entier naturel $p, p = 0, 1, 2, \dots$, l'expression $G(x) - f(x+p)$ tend vers zéro lorsque x tend vers $-p$.

c) Déduire de ce résultat et de ceux de la question précédente, la somme de la série :

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq p}}^{\infty} [f(p+n) - f(-p+n)]$$

pour tout entier relatif p différent de 0.

5°) Applications : Déterminer les sommes s_1, s_2, s_3 des séries suivantes, après avoir montré leur convergence :

$$s_1 = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq p}}^{\infty} \frac{1}{n^2 - p^2} \quad p \text{ entier donné } \neq 0$$

$$s_2 = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq p}}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n+p}} - \frac{\varepsilon(n-p)}{\sqrt{|n-p|}} \right] \quad \begin{array}{l} p \text{ entier donné } > 0 \\ \varepsilon(n-p) \text{ étant le signe de } n-p. \end{array}$$

$$s_3 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2 - 1)^2}$$
