

CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES 2 MPI

m.laamoum2@gmail.com ¹

EXERCICE 1

n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Q1. La fonction $f(x) = \ln(x)$ est concave sur $]0, +\infty[$.

Une propriété des fonctions concaves est que la courbe est en dessous de ses tangentes. La tangente à la courbe de $\ln(x)$ au point $x = 1 : y = x - 1$. Ainsi, pour tout $x > 0$, on a $\boxed{\ln(x) \leq x - 1}$, avec égalité pour $x = 1$.

Pour chaque $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\frac{x_k}{m} > 0$, donc

$$\ln\left(\frac{x_k}{m}\right) \leq \frac{x_k}{m} - 1$$

En sommant ces inégalités pour k allant de 1 à n , on obtient : $\boxed{\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{x_k}{m}\right) \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{x_k}{m} - 1\right)}$.

Q2. On a $m = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j$, donc

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{x_k}{m} - 1\right) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n x_k - n = 0$$

Le membre de gauche de l'inégalité démontrée en Q1, peut s'écrire :

$$\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{x_k}{m}\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^n \frac{x_k}{m}\right) = \ln\left(\frac{1}{m^n} \prod_{k=1}^n x_k\right)$$

L'inégalité de Q1 devient donc :

$$\ln\left(\frac{1}{m^n} \prod_{k=1}^n x_k\right) \leq 0$$

ce qui donne

$$\frac{1}{m^n} \prod_{k=1}^n x_k \leq 1$$

on en déduit

$$\prod_{k=1}^n x_k \leq m^n \text{ et } \left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{1/n} \leq m$$

Ainsi $\boxed{\left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k}$. C'est l'inégalité arithmético-géométrique.

¹Tous mes corrigés sont disponibles ici <https://tinyurl.com/4up84xze>

Q3. L'égalité dans l'inégalité arithmético-géométrique

$$\left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{1/n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

est équivalente à l'égalité

$$\sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{x_k}{m} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{x_k}{m} - 1 \right)$$

qui est équivalente à

$$\sum_{k=1}^n \left(\left(\frac{x_k}{m} - 1 \right) - \ln \left(\frac{x_k}{m} \right) \right) = 0$$

Comme $\ln(t) \leq t - 1$ pour tout $t > 0$, alors chaque terme $\left(\frac{x_k}{m} - 1 \right) - \ln \left(\frac{x_k}{m} \right)$ est positif ou nul. Donc, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\left(\frac{x_k}{m} - 1 \right) - \ln \left(\frac{x_k}{m} \right) = 0$$

ce qui est équivalent à $\frac{x_k}{m} = 1$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Ainsi, l'égalité a lieu si et seulement si $x_1 = x_2 = \dots = x_n = m$.

Q4. Soit $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. B est une matrice symétrique réelle définie positive. Ses valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont toutes réelles et strictement positives (*propriétés équivalentes*).

On sait que :

$$\det(B) = \prod_{k=1}^n \lambda_k \quad \text{et} \quad \text{Tr}(B) = \sum_{k=1}^n \lambda_k$$

Appliquons l'inégalité arithmético-géométrique (Q2) aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$:

$$\left(\prod_{k=1}^n \lambda_k \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \lambda_k$$

On obtient ainsi $\boxed{(\det(B))^{1/n} \leq \frac{1}{n} \text{Tr}(B)}$.

D'après Q3, l'égalité a lieu si et seulement si toutes les valeurs propres sont égales : $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda$.

Comme B diagonalisable (*car symétrique et réelle*), ceci est équivalent à $B = \lambda I_n$ avec $\lambda > 0$.

Q5. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Par définition on a

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad X^T A X > 0$$

Soit e_i le i -ème vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^n .

On a

$$Ae_i = \begin{pmatrix} a_{1,i} \\ \vdots \\ a_{n,i} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e_i^T Ae_i = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,i} \\ \vdots \\ a_{n,i} \end{pmatrix} = a_{i,i}$$

puisque A est définie positive et $e_i \neq 0$, on a $e_i^T Ae_i > 0$.

Donc $a_{i,i} > 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Q6. On pose $D = \text{Diag} \left(\frac{1}{\sqrt{a_{1,1}}}, \frac{1}{\sqrt{a_{2,2}}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{a_{n,n}}} \right)$ et $B = DAD$.

- $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$:

On a

$$B^T = (DAD)^T = D^T A^T D^T$$

Comme $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et D est diagonale, alors $A^\top = A$ et $D^\top = D$.

Donc

$$B^\top = DAD = B.$$

B est symétrique.

Soit $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

On a

$$X^\top BX = X^\top (DAD)X = (DX)^\top A(DX).$$

comme D est inversible et $X \neq 0$, alors $DX \neq 0$. Par suite $X^\top BX > 0$.

Ainsi $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

- Pour la déduction appliquons l'inégalité de Q4 à B :

$$(\det(B))^{1/n} \leq \frac{1}{n} \text{Tr}(B)$$

On a

$$\det(B) = \det(DAD) = \det(A)(\det(D))^2 = \det(A) \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{a_{i,i}}} \right)^2 = \det(A) \prod_{i=1}^n \frac{1}{a_{i,i}}$$

et

$$\text{Tr}(B) = \text{Tr}(DAD) = \text{Tr}(D^2A)$$

comme $D^2 = \text{Diag} \left(\frac{1}{a_{1,1}}, \frac{1}{a_{2,2}}, \dots, \frac{1}{a_{n,n}} \right)$ alors $D^2A = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{i,i} \end{pmatrix}$, par suite

$$\text{Tr}(B) = \sum_{i=1}^n \frac{a_{i,i}}{a_{i,i}} = n$$

Substituons ces valeurs dans l'inégalité $(\det(B))^{1/n} \leq \frac{1}{n} \text{Tr}(B)$:

$$\left(\det(A) \prod_{i=1}^n \frac{1}{a_{i,i}} \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \cdot n = 1$$

on obtient $\boxed{\det(A) \leq \prod_{i=1}^n a_{i,i}}$. Appelée 'inégalité de Hadamard'.

D'après Q4, l'égalité est réalisée si et seulement si $B \in \text{Vect}(\mathbf{I}_n)$. Donc $B = \lambda \mathbf{I}_n$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}^+$, on a calculé $\text{Tr}(B) = n$, donc $\lambda = 1$ et $B = \mathbf{I}_n$. Ce qui est équivalent à $B = DAD = \mathbf{I}_n$.

Donc l'égalité est réalisée si et seulement si

$$A = (D^{-1})^2 = \text{Diag}(a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}).$$

Ainsi, l'égalité a lieu si et seulement si A est diagonale, à diagonale strictement positive.

EXERCICE 2

Polynômes de Tchebychev :

On définit la suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ par $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et $P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$.

Q7. Degré P_n :

Montrons par récurrence que $\deg(P_n) = n$.

- *Initialisation* : On a $\deg(P_0) = 0$ et $\deg(P_1) = 1$.
- *Hérédité* : Supposons $\deg(P_k) = k$ pour tout $k \leq n$ avec $n \geq 1$.

On a $P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1}$ donc

$$\deg(P_{n+1}) = \deg(XP_n) = 1 + \deg(P_n) = n + 1$$

C'est vrai pour $n + 1$. Donc $\boxed{\deg(P_n) = n \text{ pour tout } n \geq 0}$.

Coefficient dominant de P_n :

Posons $P_n(X) = a_n X^n + \dots$. La relation vérifiée par la suite (P_n) donne

$$a_{n+2} X^{n+2} + \dots = 2X(a_{n+1} X^{n+1} + \dots) - a_n X^n - \dots$$

par unicité des coefficients on a $a_{n+2} = 2a_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$.

La suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est géométrique de raison 2 et $a_1 = 1$. Donc $\boxed{a_n = 2^{n-1} \text{ pour tout } n \geq 1 \text{ et } a_0 = 1}$.

Q8. Montrons cette propriété par récurrence sur n .

- *Initialisation* : Pour $n = 0$: $P_0(\cos(\theta)) = \cos(0) = 1$. Pour $n = 1$: $P_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta)$.
- *Hérédité* : Supposons que $P_k(\cos(\theta)) = \cos(k\theta)$ pour tout $k \leq n + 1$, pour un entier $n \geq 0$.

Donc par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} P_{n+2}(\cos(\theta)) &= 2 \cos(\theta) P_{n+1}(\cos(\theta)) - P_n(\cos(\theta)) \\ &= 2 \cos(\theta) \cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta). \end{aligned}$$

On utilise la formule trigonométrique $2 \cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$, avec $A = (n+1)\theta$ et $B = \theta$:

$$2 \cos((n+1)\theta) \cos(\theta) = \cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta).$$

Donc, $P_{n+2}(\cos(\theta)) = \cos((n+2)\theta)$.

La propriété est vraie pour $n + 2$.

Ainsi, $\boxed{P_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta), \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall \theta \in \mathbb{R}}$.

Q9. Soit P et Q sont deux polynômes. La fonction $t \mapsto P(t)Q(t)$ est continue sur $[-1, 1]$, donc elle est bornée sur $[-1, 1]$.

On a donc

$$\left| \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} \right| \leq \frac{M}{\sqrt{1-t^2}} \text{ avec } M \in \mathbb{R}^+$$

- Au voisinage de 1^- : on a

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2(1-t)}}.$$

par la règle de Riemann, la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $[0, 1[$, donc la fonction $t \mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $[0, 1[$.

- Au voisinage de -1^+ : on a

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \underset{t \rightarrow -1^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2(1+t)}}.$$

par la règle de Riemann, la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $] -1, 0]$, donc la fonction $t \mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $] -1, 0]$.

Ainsi l'intégrale $\int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ converge.

Q10. Produit scalaire sur $\mathbb{R}_k[X]$

- *Symétrie* :

Pour $P, Q \in \mathbb{R}_k[X]$,

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_{-1}^1 \frac{Q(t)P(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \langle Q, P \rangle.$$

- *Bilinéarité* :

Par symétrie, il suffit de vérifier la linéarité à gauche. Soient $P_1, P_2, Q \in \mathbb{R}_k[X]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \langle \alpha P_1 + \beta P_2, Q \rangle &= \int_{-1}^1 \frac{(\alpha P_1(t) + \beta P_2(t))Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= \int_{-1}^1 \frac{\alpha P_1(t)Q(t) + \beta P_2(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= \alpha \int_{-1}^1 \frac{P_1(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt + \beta \int_{-1}^1 \frac{P_2(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= \alpha \langle P_1, Q \rangle + \beta \langle P_2, Q \rangle. \end{aligned}$$

La bilinéarité est donc vérifiée.

- *Forme définie positive* :

Pour $P \in \mathbb{R}_k[X]$, $\langle P, P \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}} dt \geq 0$ (car $P(t)^2 \geq 0$ et $\sqrt{1-t^2} > 0$ sur $] -1, 1[$).

Supposons $\langle P, P \rangle = 0$, donc $\int_{-1}^1 \frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0$.

Comme la fonction $t \mapsto \frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue et positive sur $] -1, 1[$, son intégrale est nulle, alors $f(t) = 0$ pour tout $t \in] -1, 1[$. Ceci signifie $P(t)^2 = 0$ pour tout $t \in] -1, 1[$, donc P admet une infinité de racines, par suite $P = 0$.

Conclusion : $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_k[X]$.

Q11. On utilise la formule

$$\cos(n\theta) \cos(m\theta) = \frac{1}{2} (\cos((n+m)\theta) + \cos((n-m)\theta)).$$

- Si $n \neq m$, alors

$$\int_0^\pi \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta = \frac{1}{2} \left(\int_0^\pi \cos((n+m)\theta) + \cos((n-m)\theta) d\theta \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin((n+m)\theta)}{n+m} + \frac{\sin((n-m)\theta)}{n-m} \right]_0^\pi = 0$$

- Si $n = m \neq 0$, alors

$$\int_0^\pi \cos^2(n\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos(2n\theta) + 1) d\theta = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2n\theta)}{2n} + \theta \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

• Si $n = m = 0$, alors

$$\int_0^\pi \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta = \pi.$$

Enfinement :
$$\int_0^\pi \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \pi & \text{si } n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } n = m \neq 0 \end{cases}.$$

Q12. Base orthonormale de $\mathbb{R}_k[X]$.

Remarquons que, par le changement de variable $t = \cos \theta$, on a pour tout n et m

$$\langle P_n, P_m \rangle = \int_1^{-1} \frac{P_n(t)P_m(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^\pi P_n(\cos \theta)P_m(\cos \theta) d\theta.$$

d'après Q8 et Q11, $P_k(\cos \theta) = \cos(k\theta)$ donc

$$\langle P_n, P_m \rangle = \int_0^\pi \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \pi & \text{si } n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } n = m \neq 0 \end{cases}$$

Ce qui donne $\|P_0\| = \sqrt{\pi}$ et pour $n \neq 0$, $\|P_n\|^2 = \frac{\pi}{2}$, donc $\|P_n\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Posons

$$T_0 = \frac{P_0}{\|P_0\|} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{ et } T_n = \frac{P_n}{\|P_n\|} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} P_n \text{ pour } n \geq 1$$

La famille $(T_n)_{0 \leq n \leq k}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_k[X]$.

PROBLÈME.

Matrices de rang 1.

Partie 1 - Exemples

Soit $n \geq 2$ est un entier et X_1, \dots, X_n des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et toutes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. $U = (X_1, \dots, X_n)^\top$, $M = UU^\top$.

Q13. Loi de $Y = \text{rg}(M)$.

On a

$$M = UU^\top = [X_1U | X_2U | \dots | X_nU].$$

les colonnes de M sont colinéaires à U , donc $\text{rg}(M)$ est égal à 0 ou 1, par suite $Y(\Omega) = \{0, 1\}$.

Puisque

$$\text{rg}(M) = 0 \iff M = 0 \iff U = 0 \iff X_i = 0 \text{ pour tout } i \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

Alors

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0, \dots, X_n = 0)$$

Par l'indépendance des X_i on obtient

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = 0) = (1 - p)^n.$$

Et on a $\mathbb{P}(Y = 0) + \mathbb{P}(Y = 1) = 1$ donc

$$\mathbb{P}(Y = 1) = 1 - (1 - p)^n.$$

Ainsi $\boxed{Y \sim \mathcal{B}(1 - (1 - p)^n)}$.

Q14. Loi de $\text{Tr}(M)$.

On a $M_{ij} = X_i X_j$ donc

$$\text{Tr}(M) = \sum_{i=1}^n M_{ii} = \sum_{i=1}^n X_i^2.$$

Comme $X_i \sim \mathcal{B}(p)$, X_i prend les valeurs 0 ou 1, donc $X_i^2 = X_i$. Ainsi, $\text{Tr}(M) = \sum_{i=1}^n X_i$.

La somme de n variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre p suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

(En effet : considérons les fonctions génératrices, on a $G_{X_i}(t) = (1 - p + pt)$ et par indépendance

$$\mathcal{G}_{\text{Tr}(M)}(t) = \prod_{i=1}^n \mathcal{G}_{X_i}(t) = (1 - p + pt)^n$$

On reconnaît la fonction génératrice de la loi binomiale).

Donc $\boxed{\text{Tr}(M) \sim \mathcal{B}(n, p)}$.

Q15. Vérification $M^2 = \text{Tr}(M)M$.

On a

$$M^2 = (UU^\top)(UU^\top) = U(U^\top U)U^\top$$

comme

$$U^\top U = \sum_{i=1}^n X_i^2 = \text{Tr}(M)$$

alors $\boxed{M^2 = \text{Tr}(M)M}$.

Probabilité de l'événement V : « M est une matrice de projection ».

M est une matrice de projection si $M^2 = M$.

Ceci est équivalent à $\text{Tr}(M)M = M$, soit $(\text{Tr}(M) - 1)M = 0$ (l'application nulle est une projection!).

Donc

$$V = [M = 0] \cup [M \neq 0 \text{ et } \text{Tr}(M) = 1] = [M = 0] \cup [\text{Tr}(M) = 1].$$

et

$$\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(M = 0) + \mathbb{P}(\text{Tr}(M) = 1)$$

On a

$$\mathbb{P}(M = 0) = \mathbb{P}(\text{rg}(M) = 0) = (1 - p)^n \text{ (d'après Q13)}$$

et

$$\mathbb{P}(\text{Tr}(M) = 1) = \binom{n}{1} p^1 (1 - p)^{n-1} = np(1 - p)^{n-1}$$

Donc $\mathbb{P}(V) = (1 - p)^n + np(1 - p)^{n-1}$, ainsi $\boxed{\mathbb{P}(V) = (1 - p)^{n-1}(1 - p + np)}$.

Q16. Cas $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$.

On a $X_i(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\mathbb{P}(X_i = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$. V : « M est une matrice de projection ».

D'après la question précédente

$$\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(M = 0) + \mathbb{P}(\text{Tr}(M) = 1)$$

On a

$$\mathbb{P}(M = 0) = \mathbb{P}(U = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0, \dots, X_n = 0)$$

pour tout $i = 1, \dots, n$, $\mathbb{P}(X_i = 0) = e^{-\lambda}$ et les X_i sont indépendantes donc

$$\mathbb{P}(M = 0) = \prod_{j=1}^n \mathbb{P}(X_j = 0) = e^{-n\lambda}$$

Comme $\text{Tr}(M) = \sum_{i=1}^n X_i^2 = 1$ et $X_i^2 \in \{0, 1, 4, 9, \dots\}$ alors

$$\text{Tr}(M) = 1 \Leftrightarrow \exists j \in \llbracket 1, n \rrbracket \text{ tel que } X_j = 1 \text{ et } X_i = 0 \text{ si } i \neq j$$

Soit E_j l'événement « $X_j = 1$ et $X_i = 0$ pour tout $i \neq j$ », on a alors

$$[\text{Tr}(M) = 1] = \bigcup_{j=1}^n E_j$$

c'est une réunion disjointe. Donc

$$\mathbb{P}(\text{Tr}(M) = 1) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(E_j)$$

de plus

$$\mathbb{P}(E_j) = \mathbb{P}(X_j = 1) \prod_{k \neq j} \mathbb{P}(X_k = 0) = (\lambda e^{-\lambda})(e^{-\lambda})^{n-1} = \lambda e^{-n\lambda}$$

par suite

$$\mathbb{P}(\text{Tr}(M) = 1) = \sum_{j=1}^n \lambda e^{-n\lambda} = n \lambda e^{-n\lambda}$$

Ainsi $\boxed{\mathbb{P}(V) = e^{-n\lambda} + n \lambda e^{-n\lambda} = (1 + n\lambda)e^{-n\lambda}}$.

Q17. Matrice J :

On a

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

donc $\text{rg}(J) = 1$ et . La trace de J est $\text{Tr}(J) = n$.

Diagonalisation de J :

J est symétrique réelle donc elle est diagonalisable.

Puisque $\text{rg}(J) = 1$ (et $n \geq 2$), 0 est valeur propre de multiplicité $n - 1$, qui est la dimension du sous-espace propre associé, $E_0(J) = \text{Ker}(J)$.

Le polynôme caractéristique s'écrit $\chi_J(X) = X^{n-1}(X - \lambda)$ et on sait que la trace est la somme des valeurs propres, donc $\lambda = \text{Tr}(J) = n$. Par suite $\boxed{\chi_J(X) = X^{n-1}(X - n)}$.

On a

$$E_0(J) = \text{Ker}(J) = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 + \dots + x_n = 0\} = \text{Vect} \{e_1 - e_2, e_1 - e_3, \dots, e_1 - e_n\}$$

et

$$E_n(J) = \text{Vect} \{e_1 + e_2 + \dots + e_n\}$$

$$\text{Ainsi } J = P.D.P^{-1}, \text{ avec } D = \text{diag}(n, 0, \dots, 0) \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Q18. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $\text{Tr}(A) = 0$, $\text{rg}(A) = 1$ et $\text{Sp}(A) = \{0\}$. Si A est diagonalisable alors $A = 0_3$ ce qui est absurde, donc A n'est pas diagonalisable.

Partie 2 - Résultats généraux

Q19. Posons

$$A = [C_1 | C_2 | \dots | C_n].$$

Puisque $\text{rg}(A) = 1$, alors $\text{Im}(A) = \text{Vect}(C_1, \dots, C_n)$ est de dimension 1. Soit C la première colonne non nulle de A , on a $\text{Vect}(C) \subset \text{Im}(A)$ et ils sont tous les deux de dimension 1, donc $\text{Im}(A) = \text{Vect}(C)$.

Il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ dans \mathbb{R} , non tous nuls, tels $C_1 = \alpha_1 C, \dots, C_n = \alpha_n C$.

Donc

$$A = [\alpha_1 C | \alpha_2 C | \dots | \alpha_n C] = C (\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Posons $L = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R}) \setminus \{(0, \dots, 0)\}$, alors $A = CL$.

Q20. Posons $C = (c_1 \dots c_n)^\top$ et $L = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Les coefficients de A sont $A_{ij} = c_i \alpha_j$, donc

$$LC = \sum_{i=1}^n \alpha_i c_i = \sum_{i=1}^n A_{ii} = \text{Tr}(A).$$

Par suite

$$A^2 = (CL)(CL) = C (LC) L = C (\text{Tr}(A)) L = \text{Tr}(A) (CL) = \text{Tr}(A)A.$$

Ainsi $A^2 = \text{Tr}(A)A$.

Q21. Polynôme caractéristique et minimal de A .

On a $A^2 - \text{Tr}(A)A = 0$. Donc le polynôme $P(X) = X(X - \text{Tr}(A))$ est annulateur de A . Le polynôme minimal $\pi_A(X)$ divise $P(X)$.

- Si $\pi_A(X) = X$ alors $A = 0$, absurde car $\text{rg}(A) = 1$, donc $\pi_A(X) \neq X$.

- Si $\pi_A(X) = X - \text{Tr}(A)$, alors $A = \text{Tr}(A)I_n$, dans ce cas $\text{rg}(A)$ est égale à n ou à 0 , absurde ($\text{rg}(A) = 1$), donc $\pi_A(X) \neq X - \text{Tr}(A)$.

Ainsi $\pi_A(X) = X(X - \text{Tr}(A))$, (valable pour le cas $\text{Tr}(A) = 0$).

Q25. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices de rang 1.

\Rightarrow Si A et B sont semblables, alors $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$ (invariance de la trace par similarité).

\Leftarrow Supposons que $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B) = \tau$.

- Si $\tau \neq 0$. A et B sont diagonalisables, et sont semblables à la même matrice $D = \text{diag}(\tau, 0, \dots, 0)$.

Donc A et B sont semblables.

- Si $\tau = 0$. On se retrouve dans le cas de Q23, A et B ne sont pas diagonalisables et elles sont semblables à

la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & \\ 1 & 0 & (0) & & \\ & (0) & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$.

Donc A et B sont semblables.

D'où l'équivalence.