

**a** Équation algébrique réciproque

**Question :1**

Soit  $n$  un entier naturel .On a Soit  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$ , on a

$$u_n(P) = \sum_{k=0}^n a_k X^{n-k} = \sum_{k=0}^n a_{n-k} X^k : (*)$$

Ce qui montre que  $u_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$  et par suite  $u_n$  est bien définie .La linéarité de  $u_n$  est évidente .D'autre part on a

$$(u_n \circ u_n)(P) = u_n \left( X^n P \left( \frac{1}{X} \right) \right) = X^n \left( \frac{1}{X^n} P(X) \right) = P$$

ce qui montre que  $u_n$  est une symétrie vectorielle de  $\mathbb{R}_n[X]$

**Question :2**

Soit  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ , non nul .D'après (\*) on a

$$P \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n a_k X^k = \sum_{k=0}^n a_{n-k} X^k \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_{n-k} = a_k$$

Et  $P \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k = -a_{n-k}$

**Question :3**

Soit  $R$  un polynôme réciproque de degré  $r$ . On a  $X^r R \left( \frac{1}{X} \right) = \varepsilon R$  avec  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ . Si  $x$  est une racine non nulle de  $R$ , alors on a  $x^r R \left( \frac{1}{x} \right) = R(x) = 0$  ce qui montre alors que  $\frac{1}{x}$  est une racine de  $R$

Soit  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  un polynôme de degré  $n$ .

●.Supposons que  $P$  est un élément de  $\mathcal{D}$ . On a

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, x^n P \left( \frac{1}{x} \right) = -P(x)$$

En particulier  $P(1) = -P(1)$  et par suite  $P(1) = 0$ .

●.Supposons maintenant que  $P$  est un élément de  $\mathcal{P}$  de degré impair ( $n = 2p + 1$ ).On a

$$P(-1) = \sum_{k=0}^{2p+1} a_k (-1)^k = \sum_{k=0}^p a_{2k} - \sum_{k=0}^p a_{2k+1}$$

Et comme  $\forall i \in \llbracket 0, 2p+1 \rrbracket, a_i = a_{2p+1-i}$  en particulier

$$\forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, a_{2k+1} = a_{2p+1-(2k+1)} = a_{2(p-k)}$$

Et par suite

$$\sum_{k=0}^p a_{2k+1} = \sum_{k=0}^p a_{2(p-k)} = \sum_{k=0}^p a_{2k}$$

et par suite  $P(-1) = 0$

**Question :4**

Soient  $P, Q$  et  $R$  trois polynômes de degrés respectives  $p, q$  et  $r$  et tels que  $P = QR$ .

●.Si  $R$  et  $Q$  sont réciproques, alors on a

$$X^r R \left( \frac{1}{X} \right) = \varepsilon_1 R(X) \text{ et } X^q Q \left( \frac{1}{X} \right) = \varepsilon_2 Q \text{ avec } \varepsilon_i \in \{-1, 1\}$$

Et par suite  $X^p P \left( \frac{1}{X} \right) = x^q Q \left( \frac{1}{X} \right) \cdot X^r R \left( \frac{1}{X} \right) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 Q \cdot R$  ce qui montre que  $P$  est réciproque . $P$  est de premier espèce si  $Q$  et  $R$  sont de même espèce et de deuxième espèce si non

●.Si  $P$  et  $Q$  sont réciproques, avec

$$X^p P \left( \frac{1}{X} \right) = \varepsilon_1 P(X) \text{ et } X^q Q \left( \frac{1}{X} \right) = \varepsilon_2 Q \text{ avec } \varepsilon_i \in \{-1, 1\}$$

Alors on a

$$X^p P \left( \frac{1}{X} \right) = \varepsilon_1 P \Leftrightarrow X^r R \left( \frac{1}{X} \right) X^q Q \left( \frac{1}{X} \right) = X^r R \left( \frac{1}{X} \right) \varepsilon_2 Q = \varepsilon_1 Q R$$

Ce qui montre alors que  $X^r R \left( \frac{1}{X} \right) = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} R = \varepsilon_1 \varepsilon_2 R$  ce qui prouve alors que  $R$  est réciproque, et on a

●. Si deux de ces polynômes sont de même espèce alors le troisième est de premier espèce

●.Si deux de ces deux polynômes ne sont pas de même espèce alors le troisième est de deuxième espèce

**Question :5**

●.Soit  $P$  un polynôme de  $\mathcal{P}$ . On a

$$X \left( \frac{1}{X} - 1 \right) = 1 - X = -(X - 1) \text{ donc } X - 1$$

Est un polynôme réciproque de deuxième espèce et comme  $P$  est de première espèce, alors d'après la question précédente  $(X - 1)P$  est de deuxième espèce. ●.Soit  $D$  un polynôme de deuxième espèce, alors d'après la question (3) le polynôme  $D$  admet 1 comme racine et par suite il existe un polynôme  $P$  tel que  $D = (X - 1)P$  et comme  $(X - 1)$  est un polynôme réciproque de deuxième espèce et  $D$  est un polynôme réciproque de deuxième espèce alors  $P$  est un polynôme réciproque de première espèce et l'unicité de  $P$  provient de celle du quotient de  $D$  par  $X - 1$

**Question :6**

●.Soit  $D$  est un polynôme réciproque de deuxième espèce de, alors  $(X + 1)D$  est un polynôme réciproque de deuxième espèce car  $(X + 1)$  est de première espèce.

●.Soit  $P$  un polynôme réciproque de première espèce de degré impair, alors d'après la question (3) le polynôme  $P$  admet  $-1$  comme racine et par suite il existe un unique polynôme  $D$  tel que  $P = (X + 1)D$  et d'après la question (4) le polynôme  $D$  est de deuxième espèce

**Question :7**

●.Soit  $p$ , montrons d'abord l'unicité du polynôme  $P$ .Supposons alors l'existence d'un autre polynôme  $Q$  tel que

$$Q \left( \frac{1}{X} + X \right) = X^p + \frac{1}{X^p}$$

Ce qui entraîne alors que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, Q \left( x + \frac{1}{x} \right) - P \left( x + \frac{1}{x} \right)$$

L'application  $f : \begin{cases} ]1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x + \frac{1}{x} \end{cases}$  réalise une bijection de  $]1, +\infty[$

dans  $]2, +\infty[$ . Soit  $\alpha \in ]2, +\infty[$ , alors il existe  $x \in ]1, +\infty[$  tel que  $\alpha = x + \frac{1}{x}$  et par suite  $(Q - P)(\alpha) = (Q - P) \left( x + \frac{1}{x} \right) = 0$  ce qui entraîne alors que  $Q - P$  admet une infinité de racines donc il est nul et par suite  $P = Q$ , d'où l'unicité

●.Montrons maintenant l'existence par récurrence sur  $p$ , c'est à dire on va montrer que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \exists P_p \in \mathbb{R}[X], (*) : P_p \left( X + \frac{1}{X} \right) = X^p + \frac{1}{X^p}$$

Pour  $p = 0$ , le polynôme  $Q = 2$  vérifie  $Q \left( X + \frac{1}{X} \right) = X^0 + \frac{1}{X^0} = 2$ , alors par unicité on a  $P_0 = 2$ .

Pour  $p = 1$ , posons  $Q = X$ , alors on a  $Q \left( X + \frac{1}{X} \right) = X + \frac{1}{X}$  donc par unicité on a  $P_1 = X$ .

Soit  $p \in \mathbb{N}$  supposons l'existence des polynômes  $P_p$  et  $P_{p+1}$  et montrons l'existence de  $P_{p+2}$ . Posons  $Q = X \cdot P_{p+1} - P_p$ , on a

$$\begin{aligned} Q \left( X + \frac{1}{X} \right) &= \left( X + \frac{1}{X} \right) P_{p+1} \left( X + \frac{1}{X} \right) - P_p \left( X + \frac{1}{X} \right) \\ &= \left( X + \frac{1}{X} \right) \left( X^{p+1} \frac{1}{X^{p+1}} \right) - \left( X^p + \frac{1}{X^p} \right) \\ &= X^{p+2} + \frac{1}{X^p} + X^p + \frac{1}{X^{p+2}} - X^p - \frac{1}{X^p} = X^{p+2} + \frac{1}{X^{p+2}} \end{aligned}$$

Le polynôme  $Q$  vérifie la propriété (\*) à l'ordre  $p + 2$  donc par unicité le polynôme  $P_{p+2}$  existe et on a  $P_{p+2} = X P_{p+1} - P_p$

●.Montrons par récurrence que  $\forall p \in \mathbb{N}, \deg P_p = p$ . Le résultat est vérifié pour  $p \in \{0, 1\}$ .

Soit  $p \in \mathbb{N}$  supposons que  $\deg P_p = p$  et  $\deg P_{p+1} = p + 1$ , comme  $P_{p+2} = X P_{p+1} - P_p$ , alors

$$\deg P_{p+2} = \deg(X P_{p+1}) = p + 2$$

D'où le résultat à l'ordre  $p + 2$

**Question :8**

Soit  $R$  un polynôme réciproque n'admettant ni 1 ni  $-1$  comme racine. D'après la question 3 si  $R$  est de deuxième espèce alors il aura 1 comme racine ce qui n'est pas le cas donc  $R$  est de première espèce et comme il n'admet pas  $-1$  comme racine alors son degré est paire.



Posons  $R = \sum_{k=0}^{2p} a_k X^k$  avec  $\deg R = 2p$ . Comme  $R$  est réciproque de première espèce alors  $\forall k \in \llbracket 0, 2p \rrbracket, a_{2p-k} = a_k$  et par suite

$$R(X) = \sum_{k=0}^p a_k X^k + \sum_{k=p+1}^{2p} a_k X^k = \sum_{k=0}^p a_k X^k + \sum_{k=0}^{p-1} a_{2p-k} X^{2p-k} = \sum_{k=0}^{p-1} a_k (X^k + X^{2p-k}) + a_p X^p \text{ car } a_{2p-k} = a_k$$

$$= X^p \left( a_p + \sum_{k=0}^{p-1} a_k \left( X^{p-k} + \frac{1}{X^{p-k}} \right) \right) = X^p \underbrace{\left( \sum_{k=0}^p a_k P_{p-k} \left( X + \frac{1}{X} \right) \right)}_{\text{noté } P}$$

Il est alors clair que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, R(x) = 0 \Leftrightarrow P \left( x + \frac{1}{x} \right) = 0$$

On a pas d'unicité, le polynôme  $P^2$  est aussi solution et par suite pas d'unicité de degré aussi

**b Un problème de dénombrement**



**Question :9**

Soient  $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$  et  $(u_k)_{1 \leq k \leq i}$  une famille à termes dans  $\mathbb{N}$  telle que  $u_0 + u_1 + \dots + u_i = j$ .

On a  $\forall k \in \llbracket 0, i \rrbracket, u_k \in \llbracket 0, j \rrbracket$  Et par suite

$$(u_0, \dots, u_i) \in (\llbracket 0, j \rrbracket)^{i+1}$$

Ce qui entraîne alors que  $S_{i,j} \subset (\llbracket 0, j \rrbracket)^{i+1}$  et comme ce dernier ensemble est fini alors  $S_{i,j}$  est aussi fini. De même aussi on a  $S'_{i,j} \subset (\llbracket 0, j \rrbracket)^{i+1}$  donc  $S'_{i,j}$  est fini

Soit  $(u_0, u_1, \dots, u_{i+1}) \in S_{i+1,j}$ , alors  $u_0 + u_1 + \dots + u_{i+1} = j$  comme le terme  $u_{i+1}$  sont des entiers, alors

$$u_0 + \dots + u_i \leq u_0 + u_1 + \dots + u_{i+1} = j$$

Et par suite  $(u_0, \dots, u_i) \in S'_{i,j}$  donc l'application

$$\varphi : \begin{cases} S_{i+1,j} \rightarrow S'_{i,j} \\ (u) \mapsto u_{\llbracket 0,i \rrbracket} \end{cases} \text{ est bien définie}$$

Soit  $u' = (u_0, \dots, u_i) \in S'_{i,j}$  et  $u_{i+1} = j - (u_0 + \dots + u_i)$ , alors il est clair que  $u = (u_0, \dots, u_{i+1})$  est un élément de  $S_{i+1,j}$  et que  $\varphi(u) = u'$ , l'unicité de  $u$  est clair. Donc  $\varphi$  est bijective en déduit en particulier que  $(*) : s_{i+1,j} = s'_{i,j}$



**Question :10**

Il s'agit de montrer que  $S'_{i,j+1} = S_{i,j+1} \cup S'_{i,j}$ . Soit alors

$(u_0, \dots, u_i) \in S'_{i,j+1}$ , donc  $u_0 + \dots + u_i \leq j + 1$ , ce qui entraîne que  $u_0 + \dots + u_i = j + 1$  ou  $u_0 + \dots + u_i \leq j$  c'est à dire que  $(u_0, \dots, u_i) \in S_{i,j+1} \cup S'_{i,j}$  et par suite  $S'_{i,j+1} \subset S_{i,j+1} \cup S'_{i,j}$ , et l'autre inclusion est clair ainsi que  $S_{i,j+1} \cap S'_{i,j} = \emptyset$  d'où  $s'_{i,j+1} = s_{i,j+1} + s'_{i,j}$

D'après (\*) on a :

$$s'_{i+1,j+1} = s_{i+1,j+1} + s'_{i+1,j} = s'_{i,j+1} + s'_{i+1,j}$$



**Question :11**

Montrons par récurrence l'entier  $p = i + j$  que  $s'_{i,j} = \binom{p-1}{i}$ .

Pour  $p = 1$  c'est à dire que  $i = j = 1$ , alors

$$S'_{1,1} = \{(u_0, u_1) \in \mathbb{N}^2, u_0 + u_1 \leq 1\} = \{(1,0)\} \text{ et par suite } s'_{1,1} = 1, \text{ d'où le résultat}$$

Soit  $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$ . Supposons que le résultat est vrai pour  $p = i + j$  montrons le pour  $p + 1$ . Soit alors  $(l, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$  tel que  $l + k = p + 1$ , montrons que  $s'_{l,k} = \binom{l+k-1}{l}$ . On a

$$s'_{l,k} = s'_{l-1,k} + s'_{l,k-1} = \binom{l+k-2}{l-1} + \binom{l+k-2}{l} = \binom{l+k-1}{l}$$

d'où le résultat. D'autre part on a

$$s_{i,j} = s'_{i,j} - s'_{i,j-1} = \binom{i+j-1}{i} - \binom{i+j-2}{i} = \binom{i+j-2}{i-1}$$



**Polynôme caractéristique d'un produit de matrices**



**Question :12**

Si  $A$  est inversible, alors  $AB = A(BA - I_n)A^{-1}$  ce qui montre que  $AB$  et  $BA$  sont semblables donc elles ont même polynôme caractéristique



**Question :13**

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{R}$ . On sait que le spectre de  $A$  est fini donc il existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall k \geq k_0, \frac{1}{k} \notin Sp(A)$  c'est à dire  $\forall k \geq k_0, A - \frac{1}{k}I_n \in \mathcal{G}L_n(\mathbb{R})$  et par suite en appliquant le résultat de la question (12) on a

$$\forall k \geq k_0, \phi_{(A - \frac{1}{k}I_n)B} = \phi_{B(A - \frac{1}{k}I_n)}$$

L'application

$$\phi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}[X] \\ M \mapsto \phi_M \end{cases}$$

est continue sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  comme composée de deux applications continues à savoir  $\det$  qu'est un résultat du cours et

$$f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}(X)) \\ M \mapsto M - XI_n \end{cases}$$

qu'est une application lipchitzienne

L'application  $(M, N) \mapsto MN$  est continue (application bilinéaire en dimension finie), alors par passage à la limite quand  $k \rightarrow +\infty$  on a  $\phi_{AB} = \phi_{BA}$  d'où le résultat

**Un peu de cultures :Autres méthodes**

La lettre  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  A). Première méthode

Soient  $r \in \mathbb{N}^*$  et  $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}$ . Montrons que  $\phi_{J_r B} = \phi_{B J_r}$ . On écrit  $B$  par blocs de la façon suivante

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$$

Avec

$$B_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K}), B_2 \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{K}), B_3 \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{K})$$

et

$$B_4 \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})$$

On a

$$J_r B = \begin{pmatrix} B_1 & * \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} \text{ et } B J_r = \begin{pmatrix} B_1 & 0_{r,n-r} \\ * & 0_{n-r} \end{pmatrix}$$

ces deux matrices sont des matrices triangulaires par blocs donc on a  $\phi_{J_r B} = \phi_{B J_r} = (-x)^{n-r} \phi_{B_1}$

Posons  $r = rg(A)$ , alors il existe deux matrices inversible  $P$  et  $Q$  telle que  $A = P J_r Q$ , donc :

$$\phi_{AB} = \phi_{P(J_r Q)B} \stackrel{\text{Question 1}}{=} \phi_{J_r(QBP)} \stackrel{\text{Question 2}}{=} \phi_{Q(BP)P} \stackrel{\text{Question 12}}{=} \phi_{B(PJ_r Q)} = \phi_{BA}$$

**B) Deuxième méthode**

Soit  $(x, t) \in \mathbb{K}^2$ .

Si on pose  $A = (a_{ij})_{i,j}$  et  $B = (b_{ij})_{i,j}$ , alors le coefficient générique de  $(A - t.I_n)B$  est

$$C_{i,j}(t) = \sum_{k=1}^n (a_{i,k} - t\delta_{i,k}) b_{k,j}$$

Et par suite celui de  $(A - t.I_n)B - xI_n$  est

$$d_{i,j}(t) = C_{i,j}(t) - x\delta_{i,j}, \text{ par suite on a}$$

$$\det((A - t.I_n)B - xI_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n d_{k,\sigma(k)}(t)$$

Et comme  $C_{i,j}$  sont des fonctions polynomiales en  $t$  de degré inférieure ou égale à 1, alors  $d_{i,j}$  aussi et par suite  $\det((A - t.I_n)B - xI_n)$  est une fonction polynomiale en  $t$  de degré inférieure ou égale à  $n$ . De même pour  $\det(B(A - t.I_n) - xI_n)$  est une fonction polynomiale en  $t$  de degré inférieure ou égale à  $n$  ce qui entraîne que  $P$  est une fonction polynomiale en  $t$  de degré inférieure ou égale à  $n$

On a  $\forall t \in \mathbb{K}, t \notin Sp(A), A - t.I_n \in \mathcal{G}L_n(\mathbb{K})$  et d'après la question (12) on a  $P(t) = 0$  et comme  $Sp(A)$  est fini et  $\mathbb{K}$  est infini, alors  $P$  admet une infinité de point d'annulation et par suite  $P = 0$  ce qui entraîne que  $P(0) = 0$ , c'est à dire que  $\phi_{AB}(x) - \phi_{BA}(x) = 0$  et ceci pour tout  $x$  dans  $\mathbb{K}$ , donc le polynôme  $\phi_{AB} - \phi_{BA}$  admet une infinité de racines donc il est nul d'où l'égalité :  $\phi_{AB} = \phi_{BA}$

C) **Troisième méthode** On a :

$$\begin{pmatrix} \lambda I_n - BA & B \\ 0 & \lambda I_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda I_n - BA) + BA & B \\ \lambda A & \lambda I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_n & B \\ \lambda A & \lambda I_n \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda I_n & B \\ 0 & \lambda I_n - AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_n & B \\ \lambda A & \lambda I_n \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\det \begin{pmatrix} \lambda I_n - BA & B \\ 0 & \lambda I_n \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} = \lambda^n \det(\lambda I_n - BA)$$

et

$$\det \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} \lambda I_n & B \\ 0 & \lambda I_n - AB \end{pmatrix} = \lambda^n \det(\lambda I_n - AB)$$

On a donc :  $\forall \lambda \in \mathbb{K}^*$ ,  $\det(AB - \lambda I_n) = \det(BA - \lambda I_n)$  ce qui entraîne que le polynôme

$$\det(AB - X I_n) - \det(BA - X I_n)$$

Admet une infinité de racine donc il est nul c'est à dire  $\phi_{AB} = \phi_{BA}$

D) **Quatrième méthode**

L'espace vectoriel  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est de dimension finie donc toutes ses normes sont équivalentes, on est alors libre de choisir chaque fois la norme qui nous convient. L'application  $\det$  est continue sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et comme  $\mathbb{K}^*$  est un ouvert de  $\mathbb{K}$ , alors son image réciproque par  $\det$  est un ouvert de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  à savoir  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$

Montrons maintenant la densité de  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$  comme le spectre de  $A$  est fini, alors  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ,  $\forall p \geq n_0$ ,  $\frac{1}{p} \notin Sp(A)$  si on pose alors pour  $p \geq n_0$ ,  $A_p = A - \frac{1}{p} I_n$ , alors la suite  $(A_p)_{p \geq n_0}$  est une suite de matrices inversibles de limite la matrice  $A$  ce qui prouve la densité de  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  dans l'espace  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ . Par densité de  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , alors il existe une suite  $(A_p)$  de matrices inversibles telle que  $A_p \rightarrow A$ . D'après la question (12) on a

$$\forall p \in \mathbb{N}, \phi_{A_p B} = \phi_{BA_p}$$

Le produit matriciel est une application bilinéaire continue, alors les suites  $(A_p B)_p$  et  $(BA_p)_p$  convergent respectivement vers  $AB$  et  $BA$

L'application  $M \mapsto \phi_M$  est continue sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , donc en passant à la limite quand  $p$  tend vers  $+\infty$ , on a  $\phi_{AB} = \phi_{BA}$

d Étude spectrale de certaines matrices

Question :14

$S = (s_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n+1}$ , avec  $s_{i,j} = \binom{i+j-2}{i-1}$ , il est alors clair que  $S$  est une matrice symétrique réelle donc diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

**Un peu de culture** : Les matrices symétriques à coefficients complexes ne sont pas nécessairement diagonalisable voir :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

Pour  $n = 1$  on a  $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ , on a

$$\phi_S = \begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ 1 & 2-X \end{vmatrix} = X^2 - 3X + 1$$

Le discriminant de  $\phi$  est  $\Delta = 9 - 4 = 5$  et par suite les valeurs propres de  $S$  sont :  $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$  et  $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ . Si  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , alors

$$SX = \frac{3+\sqrt{5}}{2} X \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \frac{3+\sqrt{5}}{2} x \\ x+2y = \frac{3+\sqrt{5}}{2} y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{5}+1)x - 2y = 0 \\ 2x + (1-\sqrt{5})y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} y \Leftrightarrow X = y \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{5}-1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Et par suite  $E_{\lambda_1}(S) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} \sqrt{5}-1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

$$SX = \frac{3-\sqrt{5}}{2} X \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \frac{3-\sqrt{5}}{2} x \\ x+2y = \frac{3-\sqrt{5}}{2} y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\sqrt{5})x - 2y = 0 \\ 2x + (1+\sqrt{5})y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} y \Leftrightarrow X = y \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{5}+1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Et par suite

$$E_{\lambda_2}(S) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} \sqrt{5}+1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \text{ et si } P = \begin{pmatrix} \sqrt{5}-1 & \sqrt{5}+1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Alors il est évidement

$$P^{-1}SP = \begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

Pour  $n = 2$ , on a  $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$  et

$$\phi_S = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 1 \\ 1 & 2-X & 3 \\ 1 & 3 & 6-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 1 \\ 1 & 2-X & 3 \\ 0 & 1+X & 3-X \end{vmatrix}$$

Par développement suivant la première colonne on a

$$\phi_S = (1-X)(X^2 - 8X + 1)$$

Donc  $\phi_S = (1-X)(X - (4 - \sqrt{15}))(X - (4 + \sqrt{15}))$

Les valeurs propres de  $S$  sont

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4 - \sqrt{15} \text{ et } \lambda_3 = 4 + \sqrt{15}$$

Soit  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .

On a :

$$SX = X \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = x \\ x+2y+3z = y \\ x+3y+6z = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+z = 0 \\ x+y+3z = 0 \\ x+3y+5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -y \\ x = 2y \end{cases}$$

Et par suite

$$E_{\lambda_1}(S) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

On a :

$$SX = (4 - \sqrt{15})X \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = (4 - \sqrt{15})x \\ x+2y+3z = (4 - \sqrt{15})y \\ x+3y+6z = (4 - \sqrt{15})z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{15}-3)x + y + z = 0 \\ x + (\sqrt{15}-2)y + 3z = 0 \\ x + 3y + (\sqrt{15}+2)z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1-\sqrt{15}}{2}x \\ z = \frac{5-\sqrt{15}}{2}x \end{cases} \text{ Et par suite}$$

$$E_{\lambda_2} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 1 - \sqrt{15} \\ 5 - \sqrt{15} \end{pmatrix} \right)$$

On a :

$$SX = (4 + \sqrt{15})X \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = (4 + \sqrt{15})x \\ x+2y+3z = (4 + \sqrt{15})y \\ x+3y+6z = (4 + \sqrt{15})z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -y + (3 + \sqrt{15})x \\ y = \frac{1+\sqrt{15}}{2}x \\ y = \frac{1+\sqrt{15}}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{5+\sqrt{15}}{2}x \end{cases}$$

Et par suite

$$E_{\lambda_3} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 1 + \sqrt{15} \\ 5 + \sqrt{15} \end{pmatrix} \right)$$

Si on pose  $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 - \sqrt{15} & 1 + \sqrt{15} \\ -1 & 5 - \sqrt{15} & 5 + \sqrt{15} \end{pmatrix}$ , alors on a bien

$$P^{-1}SP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 - \sqrt{15} & 0 \\ 0 & 0 & 4 + \sqrt{15} \end{pmatrix}$$

**Question :15**

Soit  $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$  tel que  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  et  $Q = \sum_{k=0}^m b_k X^k$

- Si  $P = 0$  ou  $Q = 0$ , alors  $\psi(P, Q) = 0$
- Si  $P \neq 0$  et  $Q \neq 0$ , alors au voisinage de  $+\infty$  on a  $P(t)Q(t)e^{-t} \sim a_n b_m t^{n+m} e^{-t}$  et ce dernier est négligeable devant  $\frac{1}{t^2}$  en  $+\infty$  et comme au voisinage de  $+\infty$  l'application  $t \mapsto \frac{1}{t^2}$  est intégrable, alors  $\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$  est convergente et par suite  $\psi$  est bien une application de  $(\mathbb{R}_n[X])^2$  dans  $\mathbb{R}$
- La Bilinearité, la symétrie et la positivité sont clairs.
- Soit  $P$  un polynôme à coefficients dans  $\mathbb{R}$  tel que  $\int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t} dt = 0$ . Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$  on a

$$0 \leq \int_0^a P^2(t)e^{-t} dt \leq \int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t} dt = 0$$

Ce qui entraîne alors que  $\int_0^a P^2(t)e^{-t} dt = 0$  et comme l'application  $t \mapsto P^2(t)e^{-t}$  est continue positive sur  $[0, a]$ , alors elle est nulle et par suite  $\forall t \in [0, a], P(t) = 0$ , le polynôme  $P$  admet alors une infinité de racines donc il est nul ce qui prouve que  $\psi$  est définie et par suite  $\psi$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_n[X]$

**Question :16**

La famille  $\mathcal{B}$  est constituée des polynômes de degrés échelonnés, donc elle est libre de cardinal  $n + 1$  donc c'est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

Soit  $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$ . On a

$$\begin{aligned} \psi(B_i, B_j) &= \int_0^{+\infty} B_i(t)B_j(t)e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{i!j!} t^{i+j} e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{i!j!} \Gamma(i+j+1) = \frac{(i+j)!}{i!j!} = \binom{i+j}{i} = s_{i+1, j+1} \end{aligned}$$

La matrice  $S$  est alors la matrice du produit scalaire  $\psi$  relativement à la base  $\mathcal{B}$  donc  $S$  est une matrice définie positive donc son rang est égale à la dimension de  $\mathbb{R}_n[X]$  à savoir  $n + 1$  de même le rang de  $S'$  est  $n + 1$

**Question :17**

Soit  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$  un entier fixé et soit  $(j, k) \in \mathbb{N}^2$ . On a

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}^+, f_i^{(j)}(t) &= \sum_{l=0}^j (-1)^{j-l} \binom{j}{l} A_i^l t^{i-l} e^{-t} \\ &= \left( \sum_{l=0}^j (-1)^{j-l} A_i^l t^{i-l} \right) e^{-t} \end{aligned}$$

Et par suite

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, t^k f_i^{(j)}(t) = \left( \sum_{l=0}^j (-1)^{j-l} \binom{j}{l} A_i^l t^{i+k-l} \right) e^{-t} \rightarrow 0$$

quand  $t \rightarrow +\infty$  D'ou le résultat

Soit  $t$  un réel et  $L_i(t) = (-1)^i \frac{f_i^{(i)}(t)}{i!} e^t$ . On a

$$f_i^{(i)}(t) = \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} (t^k)^{(i)} (e^{-t})^{(i-k)} = \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} \binom{i}{k} A_i^k t^{i-k} e^{-t}$$

Et par suite

$$L_i(t) = \frac{(-1)^i}{i!} \left( \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} \binom{i}{k} A_i^k t^{i-k} e^{-t} \right) e^t$$

Et par suite

$$L_i(t) = \sum_{k=0}^i (-1)^k \frac{\binom{i}{k}}{(i-k)!} t^{i-k} = \sum_{k=0}^i (-1)^{i-l} \frac{\binom{i}{i-l}}{l!} t^l$$

Ce qui prouve alors que  $L_i$  est un polynôme à coefficients réel de degré  $i$  de coefficients dominant  $\frac{1}{i!}$

**Question :18**

Soit  $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$  tel que  $j \leq i$ . On montre par récurrence la formule d'intégration par partie successive suivante :

$$\begin{aligned} \forall (u, v) \in \mathcal{C}^n([a, b], \mathbb{R}), \int_a^b u(t)v^{(n)}(t) dt \\ = \left[ \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k u^{(k)} v^{(n-1-k)} \right]_a^b + (-1)^n \int_a^b u^{(n)}(t)v(t) dt \end{aligned}$$

**Question :19**

Soit  $a$  un réel strictement positif. On a

$$\begin{aligned} (*) : \frac{1}{j!} \int_0^a L_i(t) t^j e^{-t} dt &= \frac{(-1)^i}{i!j!} \int_0^a f_i^{(i)}(t) (t^j)^{(i)} dt \\ &= \frac{(-1)^i}{i!j!} \left( \left[ \sum_{k=0}^{i-1} f_i^{(k)}(t) (t^j)^{(i-1-k)} \right]_0^a + (-1)^i \int_0^a f_i(t) (t^j)^{(i)} dt \right) \end{aligned}$$

Si  $j < i$ , alors  $(t^j)^{(i)} = 0$  et par suite  $\int_0^a f_i(t) (t^j)^{(i)} dt = 0$  et si  $i = j$ , alors  $(t^i)^{(i)} = i!$  et par suite  $\int_0^a f_i(t) (t^i)^{(i)} dt = i! \int_0^a t^i e^{-t} dt$  qui tend vers  $(i!)^2$  quand  $a \rightarrow +\infty$ .

Soit  $k \in \llbracket 0, i-1 \rrbracket$ , on a

$$f_i^{(k)}(t) (t^j)^{(i-1-k)} = \begin{cases} 0 & \text{si } i-1-k > j \\ f_i^{(k)}(t) A_j^{i-1-k} t^{j-i+k+1} & \text{si non} \end{cases}$$

Et en appliquant la question (17), on a  $f_i^{(k)}(t) (t^j)^{(i-1-k)}$  tend vers 0 quand  $a$  tend vers  $+\infty$ .

Par passage à la limite dans (\*) quand  $a$  tend vers  $+\infty$  on a alors

$$\psi(L_i, B_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } j < i \end{cases}$$

Et par symétrie on a  $\psi(L_i, B_j) = 0$  si  $i < j$ .

Par symétrie on peut toujours supposer que  $j \leq i$ .

$$\begin{aligned} \psi(L_i, L_j) &= \psi \left( L_i, \sum_{k=0}^j (-1)^{j-k} \binom{j}{j-k} B_k \right) \\ &= \sum_{k=0}^j (-1)^{j-k} \binom{j}{j-k} \psi(L_i, B_k) = \sum_{k=0}^j (-1)^{j-k} \binom{j}{j-k} \delta_{i,k} \\ \text{Dons } \psi(L_i, L_j) &= \begin{cases} \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} \binom{j}{i-k} = 1, & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } j \neq i \text{ (car } \forall k \in \llbracket 0, j \rrbracket, k \neq i) \end{cases} \end{aligned}$$

la famille  $(L_0, \dots, L_n)$  est une famille orthonormale de  $\mathbb{R}_n[X]$

**Question :19**

Soit  $\tau : P \mapsto P(X-1)$ . On a pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  on a

$$\begin{aligned} \tau(X^k) &= (X-1)^k = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} X^i \\ \text{Et } \tau(1) &= 1 = \sum_{i=0}^0 \binom{0}{i} (-1)^{0-i} X^i \end{aligned}$$

Et par suite la matrice  $T$  de  $\tau$  relativement à la base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$  est

$$T = \left( \sum_{i=0}^j (-1)^{j-i} \binom{j}{i} \right)_{0 \leq i, j \leq n}$$

L'automorphisme inverse de  $\tau$  est définie par

$$\tau^{-1} : P \mapsto P(X+1)$$

Et par suite

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \tau^{-1}(X^j) = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} X^i$$

Donc la matrice  $U$  de  $\tau^{-1}$  relativement à la base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$  est

$$T = \left( \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \right)_{0 \leq i, j \leq n}$$

Soit  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on a  $\forall l \in \llbracket 0, i \rrbracket, \binom{i}{i-l} = \binom{i}{l}$ , ce qui entraîne que

$$L_i(t) = \sum_{k=0}^i (-1)^{i-l} \binom{i}{l} \frac{t^l}{l!}$$

et par suite  $T$  n'est que la matrice de passage de la base canonique à la base  $\mathcal{L}$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  et la matrice  $U$  est la matrice de passage de  $\mathcal{L}$  à la base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$

La matrice du produit scalaire  $\psi$  relativement à la base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$  est  $S$  et sa matrice relativement à la base  $\mathcal{L}$  est  $I_{n+1}$  puisque  $\mathcal{L}$  est orthonormale donc les matrice  $S$  et  $I_{n+1}$  sont congruentes, d'ou  $T^t S T = I_{n+1}$  soit  $S = (T^{-1})^t T^{-1} = U^t U$  et par suite  $\det(S) = (\det(U))^2 = 1$  puisque la matrice  $U$  est triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont égaux à 1 et par suite  $\det(S') = 1$

**Question :20**

⊗.L'endomorphisme canoniquement associé à la matrice  $D$  est  $\rho : P \mapsto P(-X)$  et par suite celui associé canoniquement à  $DU$  est  $\rho\sigma\tau : P \mapsto P(1-X)$  et par suite  $(\rho\sigma\tau)^2 = id_{\mathbb{R}_n[X]}$  et par suite  $(DU)^2 = I_{n+1}$ . La matrice  $D$  est inversible d'inverse  $D^{-1} = D$ .

⊗.L'égalité  $(DU)^2 = I_{n+1}$  entraîne que

$$(DU)^{-1} = U^{-1}D^{-1} = U^{-1}D = DU$$

Et par suite  $U^{-1} = DUD$  et  $(U^t)^{-1} = DU^tD$ . On en déduit alors que

$$S^{-1} = (U^tU)^{-1} = u^{-1}(u^t)^{-1} = DUDDU^tD = D(UU^t)D$$

Ce qui entraîne alors que  $S^{-1}$  est semblable à  $UU^t$

**Question :21**

Rappelons le relation

$$\phi_{S^{-1}} = \frac{(-X)^{n+1}}{\det(S)} \phi_S \left( \frac{1}{X} \right) = (-X)^{n+1} \phi \left( \frac{1}{X} \right)$$

Comme  $S^{-1}$  est semblable à  $UU^t$ , alors  $\phi_{S^{-1}} = \phi_{UU^t}$  et d'après la partie (C) on a  $\phi_{U^tU} = \phi_{UU^t}$ , c'est à dire que  $\phi_S = \phi_{S^{-1}}$  ce qui entraîne alors que

$$\phi_S = (-X)^{n+1} \phi_S \left( \frac{1}{X} \right)$$

On conclut alors que  $\phi_S$  est un polynôme réciproque de première espèce si  $n$  est impaire et de deuxième espèce si  $n$  est paire