ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES
ECOLE CENTRALE DE LYON

ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

Concours d'Admission 1981

MATHEMATIQUES II M P' TA (4 h)
(2 pages dactylographiées)

N.B. 1. Les parties I, II et III sont indépendantes

N.B. 2. Le problème est commun aux trois options M, P', T.A, à l'exception de certaines questions signalées.

NOTATIONS. L'espace affine euclidien orienté $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et des axes associés (Ox), (Oy), (Oz).
On donne un point fixe C sur (Oz) par $\overrightarrow{OC} = \ell\vec{k}$, avec $\ell > 0$. On note S l'ensemble des points de la sphère de centre C et de rayon ℓ, dont les coordonnées vérifient $x \geqslant 0$ et $z \leqslant \ell$ (quart de sphère).
Une droite variable D est assujettie à rencontrer orthogonalement (Ox) en un point noté L, et à être tangente à S en un point noté M ; on désigne par t l'angle $(\vec{j}, \overrightarrow{LM})$, avec $0 \leqslant t \leqslant \pi$, et par B le centre du cercle Γ intersection du plan mené par D parallèlement à (yOz) et de la sphère (C,ℓ).
Soient V l'ensemble engendré par M lorsque t décrit $[0,\pi]$, et W la projection orthogonale de V sur le plan (xOy).

QUESTION PRELIMINAIRE

Calculer les coordonnées de M en fonction de ℓ et de t.

PARTIE I

I - 1/a) Quelle sont les natures géométriques des projections orthogonales de V sur les plans (yOz) et (zOx).

b) Construire la courbe W (on prendra $\ell = 5$, l'unité de longueur étant le centimètre).
Calculer, en fonction de ℓ, l'aire de l'"intérieur" de W (partie P' du plan (xOy) qui est bornée et limitée par W)

I - 2/a) Montrer que la longueur λ de V est donnée par :

$$\lambda = \ell\pi\sqrt{2}\left(1 - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 b_n\right), \text{ où } a_n = \frac{1.\ 3.\ 5 \dots (2n-1)}{2.\ 4.\ 6 \dots (2n)}$$

et où b_n a une forme simple, que l'on précisera (on pourra utiliser sans justification les égalités :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t\, dt = \frac{\pi}{2} a_n \quad , \quad n \in \mathbb{N}^*)$$

Pour $\ell = 5$, calculer une valeur approchée de λ à 10^{-2} près.**(Cette ligne: M et P' seulement)**

b) Déterminer le centre de courbure I de V au point A de paramètre $t = \frac{\pi}{2}$. Montrer que la droite AI est tangente en A à la projection orthogonale de V sur le plan (zOx).

c) Calculer la torsion de V au point A.**(Cette ligne: M seulement)**

.../...

PARTIE II (Cinématique)

II - 1/ On associe à $t \in [0,\pi]$ le repère orthonormé direct $(M\ ;\ \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ de $\mathcal{E}$ ainsi défini : $\vec{J}$ et $\vec{K}$ sont respectivement obtenus en normant $\overrightarrow{LM}$ et $\overrightarrow{MC}$, $\vec{I}$ est $\vec{J} \wedge \vec{K}$.
Exprimer la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et vice-versa.

II - 2/ On suppose dans cette question (II - 2/) que t est le temps $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$, et on désigne par T le solide lié au repère mobile (par rapport à $\mathcal{E}$) dont la position à l'instant t est $(M\ ;\ \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$. On note $\vec{\Omega}$ le vecteur instantané et Δ l'axe instantané à l'instant t, dans le mouvement de T par rapport à $\mathcal{E}$.

a) Montrer que le solide T a un point fixe.

b) Calculer les coordonnées de $\vec{\Omega}$ dans les bases $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

c) Déterminer, dans le repère fixe et dans le repère mobile, une équation de la surface engendrée par Δ quand t décrit $[0,\pi]$.
Interpréter les résultats obtenus quant au mouvement de T.

PARTIE III

III - 1/ Montrer que, lorsque t décrit $[0,\pi]$, le segment de droite LM engendre une partie Σ' de la surface Σ d'équation $x^2 (y^2 + z^2) - \ell^2 z^2 = 0$.
Quelle est la nature géométrique de l'intersection de Σ et d'un plan passant par (Oy) ?

III - 2/ Soit S' la partie de S dont la projection orthogonale sur xOy est P' (notation du I - 1/b). Calculer le volume de la partie de l'espace $\mathcal{E}$ qui est bornée et limitée par $S' \cup \Sigma'$.

*****
***
*