

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche — y compris calculatrice programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

L'épreuve porte sur la géométrie plane; les objectifs sont précisés en tête de chaque partie.

Deux cinquièmes du barème iront à la première partie.

Il est demandé de réaliser dans chaque séquence les figures appropriées, et des démonstrations concises en bonne relation avec la méthode suivie; on précisera éventuellement d'autres méthodes possibles.

Dans tout l'énoncé lorsqu'il est question de la symétrie par rapport à une droite, il s'agit de la symétrie orthogonale dont cette droite est l'axe.

PREMIÈRE PARTIE

Les séquences 1 et 2 éclairent, en les prenant au niveau de la pratique en classe, des outils et des situations de la géométrie du triangle et du cercle.

Cette mise en place se relie, dans la séquence 3, à la résolution de problèmes de construction.

1. Orthocentre et cercle circonscrit

Étant donné un triangle ABC et son cercle circonscrit Γ , on désigne par :

O le centre de Γ ,

H le point de concours des hauteurs du triangle (orthocentre),

G le point de concours des médianes (centre de gravité).

Soit à prouver, de différentes manières, l'égalité :

$$\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}.$$

1.1. On pose $\vec{h} = \vec{OH} - \vec{OA} - \vec{OB} - \vec{OC}$.

Considérant successivement chaque côté du triangle, établir que \vec{h} est la somme de deux vecteurs orthogonaux à ce côté. En déduire que $\vec{h} = \vec{0}$.

1.2. Exprimer \vec{h} à l'aide des seuls points O, H, G et montrer que $\vec{h} = \vec{0}$.

1.3. Le point A₁ étant défini par $\vec{OA}_1 = -\vec{OA}$ et le point H étant supposé distinct de B et de C, examiner la nature du quadrilatère BA₁CH et en déduire que $\vec{h} = \vec{0}$.

Prouver que le symétrique de H par rapport à la droite BC est sur Γ .

1.4. Prouver que l'égalité $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$ caractérise le triangle équilatéral.

2. Milieux d'arcs

Étant donné un triangle ABC, les demi-droites d'origine A qui portent les côtés AB et AC s'échangent entre elles dans une symétrie dont l'axe est par définition la bissectrice en A du triangle; on définit de même les deux autres bissectrices. On note encore Γ le cercle circonscrit au triangle, et O son centre. Les trois bissectrices recoupent Γ respectivement en A', B', C'.

2.1. On veut comparer les distances de A' à B et à C en ne se servant que des propriétés des symétries.

Soit E le symétrique de C par rapport à la médiatrice du segment AA' .

Montrer que E est un point de Γ , que les droites AB et $A'E$ sont parallèles, que les segments $A'B$, AE et $A'C$ ont même longueur.

Ainsi A' est sur la médiatrice de BC ; à quelle propriété du cercle ce résultat est-il lié ?

2.2. On désigne par I le point de concours des bissectrices du triangle ABC .

Quelles sont les images des droites AI et BI dans la symétrie d'axe $A'B'$? Quelle est l'image de I dans cette symétrie ?

Quel rôle joue le point I dans le triangle $A'B'C'$?

3. Étude de problèmes de construction

On se bornera à donner une marche à suivre et à préciser les conditions de possibilité et le nombre des solutions.

Le cercle Γ étant donné, déterminer dans chacun des cas qui suivent un triangle ABC admettant Γ pour cercle circonscrit.

3.1. Le sommet A et l'orthocentre H sont donnés.

3.2. Les intersections des bissectrices du triangle avec Γ sont trois points donnés A' , B' , C' .

3.3. Les médiatrices des côtés du triangle sont trois diamètres distincts donnés de Γ .

3.4. Les côtés du triangle sont parallèles à ceux d'un triangle donné $A_0B_0C_0$.

Les problèmes 3.3. et 3.4 sont équivalents; on se servira pour 3.4 du cercle Γ_0 circonscrit au triangle $A_0B_0C_0$ et d'une transformation changeant Γ_0 en Γ .

DEUXIÈME PARTIE

Le plan est orienté. Par des moyens nouveaux (similitude directe et outil complexe) on approfondit dans la séquence 4 l'étude de configuration commencée dans la séquence 2. Les séquences 5 et 6 constituent deux problèmes indépendants sur un même thème.

4. Configuration de deux triangles et similitudes

On reprend avec les mêmes notations la configuration de la séquence 2, formée par le cercle Γ et les huit points A , B , C , O , A' , B' , C' , I .

4.1. On note s_1 la similitude directe définie par les conditions :

$$s_1(B') = C, \quad s_1(C') = B.$$

Établir, par des considérations d'angles, que $s_1(A) = I$.

Prouver que A' est le centre du cercle circonscrit au triangle BCI ; en déduire que $s_1(O) = A'$.

En exprimant de deux manières le rapport de similitude, démontrer l'égalité $\frac{A'I}{R} = \frac{r}{\frac{1}{2} AI}$,

où R désigne le rayon de Γ et r la distance de I à la droite BC .

En déduire la relation $OI^2 = R^2 - 2Rr$.

4.2. On suppose qu'on est dans le plan complexe, que O est l'origine de ce plan et Γ le cercle unité; les affixes a , b , c , a' , b' , c' de A , B , C , A' , B' , C' sont donc six nombres de module 1.

Établir les relations : $a'^2 = bc$, $b'^2 = ca$, $c'^2 = ab$, $a'b'c' = -abc$.

Montrer que les six affixes sont exprimables à l'aide de trois nombres complexes α , β , γ convenables, définis globalement au signe près, par :

$$a = \alpha^2, \quad b = \beta^2, \quad c = \gamma^2, \quad a' = -\beta\gamma, \quad b' = -\gamma\alpha, \quad c' = -\alpha\beta.$$

4.3. Calculer en fonction de α, β, γ , à partir des expressions précédentes de a, b, c, a', b', c' , les coefficients λ et μ de l'application complexe $z \mapsto \lambda z + \mu$ associée à la similitude directe s_1 . Vérifier par le calcul que $s_1(A) = I$.

On note s_2, s_3 les similitudes directes dont les définitions se déduisent de celle de s_1 en permutant A, B, C , et par conséquent aussi A', B', C' . Montrer que si s_1 est une translation, alors s_2 et s_3 sont des translations, la somme $\alpha + \beta + \gamma$ est nulle et le triangle ABC est équilatéral.

4.4. On suppose que le triangle ABC n'est pas équilatéral.

Montrer que les trois similitudes s_1, s_2, s_3 admettent le même centre qu'on note J et dont on calculera l'affixe z_J .

Établir l'égalité : $z_I \overline{z_J} = 1$,

où z_I est l'affixe de I et $\overline{z_J}$ le conjugué de z_J ; interpréter géométriquement ce résultat.

Démontrer les égalités : $\frac{B'A}{B'J} = \frac{C'A}{C'J} = \frac{OA}{OJ}$.

4.5. Les données sont le cercle Γ de centre O , un point A de Γ , un point I intérieur à Γ et distinct de O .

Montrer qu'on peut déterminer sur Γ des points B et C de façon que le triangle ABC admette I pour point de concours de ses bissectrices. (Il est conseillé de placer le point J , puis de chercher B' et C' .)

5. Variation d'un triangle obtenu à partir de deux cercles

Les notations A, B, C, A', I sont celles des séquences 2 et 4.

Les données sont le cercle Γ , de centre O et de rayon R , et un cercle Ω , de centre ω et de rayon ρ , intérieur à Γ .

On impose aux points A, B, C d'appartenir à Γ et aux droites AB, AC d'être tangentes à Ω ; en particulier la droite AA' passe donc par ω . On s'intéresse au point mobile I .

5.1. À partir de l'une des relations contenant r obtenues dans 4.1, établir l'égalité

$$A'I \cdot A\omega = 2 \rho R. \quad \left(\text{On comparera } \frac{r}{AI} \text{ et } \frac{\rho}{A\omega} \right)$$

5.2. Démontrer qu'il existe un réel k ne dépendant que des données, tel que $\overrightarrow{A'I} = k \overrightarrow{A'\omega}$.

Que se passe-t-il si $k = 1$?

5.3. Lorsque $k \neq 1$, on pose $\overrightarrow{OO'} = k \overrightarrow{O\omega}$.

Montrer que I décrit un cercle de centre O' .

6. Images d'alignements par l'application complexe $z \mapsto z^2$

Le cercle Γ est à nouveau le cercle unité du plan complexe, O est l'origine et on désigne par S l'image de 1.

On considère sur l'axe des réels un point F d'affixe x_0 , où x_0 est un réel vérifiant $0 < x_0 < 1$.

Les points U et V d'affixes α et β , avec $\alpha + \beta \neq 0$, décrivent Γ en restant alignés avec F .

6.1. Former une condition entre x_0, α, β exprimant cet alignement.

On pourra établir d'abord que la relation $z + \alpha\beta \bar{z} = \alpha + \beta$ est une équation complexe de la droite UV .

6.2. On considère sur l'axe des réels le point K d'affixe x_0^2 , et sur Γ les points M d'affixe α^2 , N d'affixe β^2 . On désigne par σ la similitude directe dont l'application complexe associée est $z \mapsto (\alpha + \beta)z - \alpha\beta$.

Préciser $\sigma(U)$ et $\sigma(V)$. On pose $\sigma(F) = T$.

Exprimer au moyen seulement de x_0 et du produit $\alpha\beta$ l'affixe du vecteur \overrightarrow{KT} ; démontrer que ce vecteur est orthogonal à la droite MN et que $KT = KS$.

Qu'en résulte-t-il pour la droite MN quand la droite UV varie ?

6.3. On désigne par U' le point de Γ d'affixe $-\alpha$.

Soit V' , d'affixe β' , le point de Γ aligné avec F et U' ; former une relation entre β et β' .

Soit N' le point d'affixe β'^2 . Comment varie la droite NN' ?

