

ÉNONCÉ : MATH 2 ; MP ; Mines-ponts_2015

Norme d'une matrice aléatoire

L'objectif de ce problème est d'étudier une inégalité de concentration pour la norme opérationnelle d'une matrice aléatoire dont les coefficients sont mutuellement indépendants et «uniformément sous-gaussiennes»

Soit n un entier strictement positif. On identifie \mathbb{R}^n à l'espace $M_{n,1}(\mathbb{R})$ des vecteurs colonnes à n coordonnées réelles. Pour tout $x = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ dans \mathbb{R}^n , on note : $\|x\| = \sqrt{\sum_{1 \leq i \leq n} x_i^2}$.

La sphère unité de \mathbb{R}^n est notée $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n ; \|x\| = 1\}$.

On identifie une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ à l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associé et on note $\sigma(M)$ l'ensemble de ses valeurs propres réelles.

Les parties **A**, **B** et **C** sont mutuellement indépendantes.

A. Norme d'opérateur d'une matrice

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que S^{n-1} est un compact de \mathbb{R}^n et en déduire l'existence de $\|M\|_{op} = \max\{\|Mx\| ; x \in S^{n-1}\}$.

2) Montrer que l'application qui à $M \in M_n(\mathbb{R})$ associe $\|M\|_{op}$ est une norme sur $M_n(\mathbb{R})$.

Montrer que pour tous x et y dans \mathbb{R}^n , on a l'inégalité : $\|Mx - My\| \leq \|M\|_{op} \|x - y\|$.

3) Si M est symétrique, établir l'égalité $\|M\|_{op} = \max\{|\lambda| ; \lambda \in \sigma(M)\}$.

On pourra commencer par le cas où M est diagonale.

On note J_n la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

4) Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de J_n en précisant la dimension des sous espaces propres. En déduire la valeur de $\|J_n\|_{op}$.

Soit $M = (M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$.

5) Démontrer l'inégalité $\|M\|_{op} \geq \max\{|M_{i,j}| ; 1 \leq i,j \leq n\}$.

6) Etablir que : $\|M\|_{op} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{i,j}^2}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le rang de

M pour que cette inégalité soit une égalité.

On note Σ_n l'ensemble des matrices $M = (M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $|M_{i,j}| \leq 1$ pour tous $i,j \in [[1,n]]$.

7) Montrer que pour tout $M \in \Sigma_n$, $\|M\|_{op} \leq n$.

Caractériser et dénombrer les matrices M de Σ_n pour lesquelles $\|M\|_{op} = n$.

B. Variables aléatoires sous-gaussiennes

Dans toute la suite du problème, toutes les variables aléatoires considérées sont réelles et discrètes, définies sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

Soit $\alpha > 0$, on dit qu'une variable aléatoire X est α -sous-gaussienne si :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad ; \quad E(\exp(tX)) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right).$$

On rappelle la notation $ch(t) = \frac{\exp(t) + \exp(-t)}{2}$.

8) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $ch(t) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$.

On pourra au préalable établir le développement de la fonction ch en série entière sur \mathbb{R} .

9) Soit $t \in \mathbb{R}$. Démontrer que si $x \in [-1, 1]$, on a l'inégalité de convexité : $\exp(tx) \leq \frac{1+x}{2} \exp(t) + \frac{1-x}{2} \exp(-t)$.

10) Soit X une variable aléatoire réelle bornée par 1 et centrée. Montrer que X est 1-sous gaussienne. En déduire que si X est bornée par $\alpha > 0$ et centrée, alors elle est α -sous gaussienne.

11) Soit X_1, \dots, X_n des variables aléatoires mutuellement indépendantes et α -sous gaussiennes, et $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ des nombres réels tels que $\sum_{1 \leq i \leq n} \mu_i^2 = 1$.

Montrer que les variable aléatoire $\sum_{1 \leq i \leq n} \mu_i X_i$ est aussi α -sous gaussienne.

12) Soit X une variable aléatoire α -sous gaussienne et $\lambda > 0$.

Montrer que pour tout $t > 0$: $P(X \geq \lambda) \leq \exp(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda)$.

En déduire que : $P(|X| \geq \lambda) \leq \exp(-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2})$.

Dans la suite du problème, on admet qu'une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{N} est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum P(X \geq k)$ converge et que dans ce cas : $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)$.

13) Si X est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^+ , montrer que X est d'espérance finie si et seulement si la série de terme général $P(X \geq k)$ converge et que dans ce cas :

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k) \leq E(X) \leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)$$

On pourra pour cela considérer la partie entière $[X]$.

Pour tout $s \in]1, +\infty[$, on note $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}$.

14) Soit X une variable aléatoire α -sous gaussienne et $\beta > 0$.

Montrer que pour tout entier $k > 0$: $P(\exp(\frac{\beta^2 X^2}{2}) \geq k) \leq 2k^{-\eta}$ où l'on a posé $\eta = \alpha^{-2} \beta^{-2}$.

En déduire que si $\alpha\beta < 1$, la variable aléatoire $\exp(\frac{\beta^2 X^2}{2})$ est d'espérance finie majorée par $1 + 2\zeta(\eta)$.

En particulier, en prenant $\alpha\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et en utilisant l'inégalité $1 + 2\zeta(2) \leq 5$ (que l'on ne demande pas de justifier), on obtient immédiatement, et on l'admet, que si X est une variable aléatoire α -sous gaussienne, on a l'inégalité d'Orlicz : $E(\exp(\frac{X^2}{4\alpha^2})) \leq 5$.

C. Recouvrements de la sphère

Si $a \in \mathbb{R}^n$, on note $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n ; \|x - a\| \leq r\}$ la boule fermée de centre a et de rayon r .

Soit K une partie compacte non vide de \mathbb{R}^n , et soit $\varepsilon > 0$.

15) Montrer que l'on peut trouver un sous ensemble fini A de K tel que : $K \subset \bigcup_{a \in A} B(a, \frac{\varepsilon}{2})$.

On pourra raisonner par l'absurde en utilisant le théorème de Bolzano-Weirstrass.

16) Soit Λ un sous ensemble de K tel que pour tous x, y distincts dans Λ , $\|x - y\| > \varepsilon$.

Montrer que Λ est fini et que son cardinal est majoré par celui d'un ensemble A du type considéré à la question précédente. Si de plus Λ est de cardinal maximal, montrer que : $K \subset \bigcup_{a \in \Lambda} B(a, \varepsilon)$.

On admet l'existence d'une fonction μ , appelée volume, définie sur l'ensemble des parties compactes de \mathbb{R}^n et vérifiant les propriétés suivantes :

(i) Pour tout vecteur a de \mathbb{R}^n et tout nombre réel $r > 0$, $\mu(B(a, r)) = r^n$.

(ii) Pour toute famille K_1, \dots, K_m de compacts de \mathbb{R}^n deux à deux disjoints on a :

$$\mu\left(\bigcup_{1 \leq i \leq m} K_i\right) = \sum_{1 \leq i \leq m} \mu(K_i).$$

(iii) Pour tous compacts K, K' de \mathbb{R}^n , $K \subset K'$ implique $\mu(K) \leq \mu(K')$.

Soit Λ une partie finie de S^{n-1} telle que pour tous x, y distincts dans Λ , $\|x - y\| > \varepsilon$.

17) Vérifier que les boules $B(a, \frac{\varepsilon}{2})$ pour $a \in \Lambda$ sont toutes contenues dans $B(0, 1 + \frac{\varepsilon}{2})$.

Montrer alors que le cardinal de Λ est majoré par $(\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon})^n$.

18) Justifier l'existence d'une partie finie Λ_n de S^{n-1} , de cardinal majoré par 5^n , et telle que :

$$S^{n-1} \subset \bigcup_{a \in \Lambda_n} B(a, \frac{1}{2}).$$

D. Norme d'une matrice aléatoire

On fixe un nombre réel $\alpha > 0$ et on pose $\gamma = \frac{1}{4\alpha^2}$.

Soit n un entier strictement positif. On définit une famille de variables aléatoires réelles $M_{ij}^{(n)}$ indexées par $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, mutuellement indépendantes et α -sous gaussiennes.

On note $M^{(n)}$ la matrice aléatoire $(M_{ij}^{(n)})_{1 \leq i, j \leq n}$.

Si $x \in S^{n-1}$, on note $y = M^{(n)}x$ qui est aussi un vecteur aléatoire dont les composantes y_1, \dots, y_n sont des variables aléatoires réelles.

19) Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, la variable aléatoire y_i est α -sous gaussienne.

En déduire que $E(\exp(\gamma \|y\|^2)) \leq 5^n$ et que pour tout réel $r > 0$: $P(\|y\| \geq r\sqrt{n}) \leq (5e^{-\gamma r^2})^n$.

20) Soit Λ_n une partie de S^{n-1} vérifiant les conditions de la question **18**).

Pour tout réel $r > 0$, montrer que $\|M^{(n)}\|_{op} \geq 2r\sqrt{n}$ implique l'existence d'un $a \in \Lambda_n$ tel que :

$$\|M^{(n)}a\| \geq r\sqrt{n}.$$

En déduire que $P(\|M^{(n)}\|_{op} \geq 2r\sqrt{n}) \leq (25e^{-\gamma r^2})^n$.

FIN DU PROBLÈME

A. Norme d'opérateur d'une matrice

1) \mathbb{R}^n est un espace vectoriel normé de dimension finie et S^{n-1} est un fermé borné de \mathbb{R}^n , c'est donc un compact de \mathbb{R}^n . L'application $[x \mapsto Mx]$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel normé de dimension finie \mathbb{R}^n , donc continu, et l'application norme est continue, alors l'application $[x \mapsto \|Mx\|]$ est continue sur \mathbb{R}^n , alors bornée et atteint ses bornes sur le compact S^{n-1} .

D'où l'existence de $\|M\|_{op} = \max\{\|Mx\| ; x \in S^{n-1}\}$.

2) Soient $M, N \in M_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a bien $\|M\|_{op} \in \mathbb{R}^+$ pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$.

si $\|M\|_{op} = 0$ alors $\|Mx\| = 0$ pour tout $x \in S^{n-1}$ et puisque pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $x = \|x\|y$ avec $y \in S^{n-1}$ alors $\|Mx\| = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. et donc M est la matrice nulle.

$$\|\lambda M\|_{op} = \max\{\|\lambda Mx\| ; x \in S^{n-1}\} = \max\{|\lambda| \|Mx\| ; x \in S^{n-1}\} = |\lambda| \max\{\|Mx\| ; x \in S^{n-1}\} = |\lambda| \|M\|_{op}.$$

$$\text{Finalement : } \forall x \in S^{n-1} ; \|(M+N)x\| = \|Mx + Nx\| \leq \|Mx\| + \|Nx\| \leq \|M\|_{op} + \|N\|_{op}.$$

$$\text{D'où } \|M+N\|_{op} = \max\{\|(M+N)x\| ; x \in S^{n-1}\} \leq \|M\|_{op} + \|N\|_{op}.$$

On a démontré alors que $[M \mapsto \|M\|_{op}]$ est une norme sur $M_n(\mathbb{R})$.

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} ; x = \|x\|y \text{ avec } y \in S^{n-1} \text{ et } \|Mx\| = \|x\| \|My\| \leq \|x\| \|M\|_{op}.$$

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}^n ; \|Mx\| \leq \|M\|_{op} \|x\|$ en particulier en remplaçant x par $(x-y)$ on obtient :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n ; \|Mx - My\| \leq \|M\|_{op} \|x - y\|.$$

3) M est symétrique réelle, alors M est diagonalisable et admet une base (i_1, \dots, i_n) orthonormale de vecteurs propres, notons alors $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres respectivement associées à (i_1, \dots, i_n) .

Soit $x = \sum_{1 \leq k \leq n} x_k i_k$ un vecteur unitaire de \mathbb{R}^n .

$$\|Mx\|^2 = \left\| \sum_{1 \leq k \leq n} \lambda_k x_k i_k \right\|^2 = \sum_{1 \leq k \leq n} \lambda_k^2 x_k^2 \leq \left(\max_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k|^2 \right) \|x\|^2 = \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k|^2.$$

Donc $\|Mx\| \leq \max\{|\lambda| ; \lambda \in \sigma(M)\}$, d'où $\|M\|_{op} \leq \max\{|\lambda| ; \lambda \in \sigma(M)\}$.

D'autre part pour $|\lambda_{k_0}| = \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k|$ on a : i_{k_0} est un vecteur unitaire et $\|M i_{k_0}\| = |\lambda_{k_0}|$ alors $\|M\|_{op} \geq |\lambda_{k_0}|$.

Finalement : $\|M\|_{op} = |\lambda_{k_0}| = \max\{|\lambda| ; \lambda \in \sigma(M)\}$.

4) J_n est symétrique réelle donc diagonalisable, de plus son rang est 1, alors une première valeur propre est 0 et son sous espace propre est l'hyperplan d'équation : $\sum_{1 \leq k \leq n} x_k = 0$.

De plus le vecteur $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de J_n associé à la valeur propre n .

Le sous espace propre associé à la valeur propre n est donc une droite vectorielle engendrée par U . On en déduit que $\sigma(J_n) = \{0, n\}$, alors d'après la question précédente : $\|J_n\|_{op} = n$.

5) Soit (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n . Notons que les vecteurs de cette base sont unitaires.

$$M e_j = \sum_{1 \leq k \leq n} M_{k,j} e_k \text{ et } \|M\|_{op}^2 \geq \|M e_j\|^2 = \sum_{1 \leq k \leq n} M_{k,j}^2 \geq M_{i,j}^2 \text{ et ce pour tous } i, j \in [[1, n]].$$

D'où $\|M\|_{op} \geq \max\{|M_{i,j}| ; i, j \in [[1, n]]\}$.

6) Soit x un vecteur unitaire de \mathbb{R}^n .

$$\|Mx\|^2 = \langle Mx, Mx \rangle = \langle {}^tMMx, x \rangle \leq \|{}^tMMx\| \cdot \|x\| \leq \|{}^tMMx\| \leq \|{}^tMM\|_{op}.$$

La matrice tMM est symétrique réelle, alors d'après la question 3) $\|{}^tMM\|_{op} = \max\{|\lambda|; \lambda \in \sigma({}^tMM)\}$

$\langle Mx, Mx \rangle = \langle {}^tMMx, x \rangle \geq 0$, alors toute valeur propre de tMM est positive.

$$\|{}^tMM\|_{op} = \max\{\lambda; \lambda \in \sigma({}^tMM)\} \leq \sum_{\lambda \in \sigma({}^tMM)} \lambda m_\lambda = \text{trace}({}^tMM) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij}^2. \quad (m_\lambda \text{ est la multiplicité de } \lambda)$$

Pour tout vecteur unitaire x de \mathbb{R}^n , $\|Mx\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij}^2}$ d'où $\|M\|_{op} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij}^2}$.

Si on a égalité, alors $\|{}^tMM\|_{op} = \max\{\lambda; \lambda \in \sigma({}^tMM)\} = \sum_{\lambda \in \sigma({}^tMM)} \lambda m_\lambda$.

Alors au plus une valeur propre non nulle λ avec $m_\lambda = 1$.

Or d'après l'égalité $\langle Mx, Mx \rangle = \langle {}^tMMx, x \rangle$ on déduit que M et tMM ont le même noyau donc le

même rang. On en déduit alors que : $\|M\|_{op} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij}^2}$ si et seulement si $\text{rg}(M) \leq 1$.

7) Soit $M \in \Sigma_n$, alors d'après la question précédente : $\|M\|_{op} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij}^2} \leq \sqrt{n^2} = n$.

$\|M\|_{op} = n$ si et seulement si $\forall i, j \in [[1, n]] ; M_{ij} = \pm 1$ et $\|M\|_{op} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij}^2}$.

$\|M\|_{op} = n$ si et seulement si $\forall i, j \in [[1, n]] ; M_{ij} = \pm 1$ et M de rang 1.

Notons M_1, M_2, \dots, M_n les n colonnes de M .

M_1 étant choisie ayant tous ses coefficients dans $\{-1, 1\}$ et pour tout $k \in [[2, n]] ; M_k = \pm M_1$

Le nombre de choix possible pour (M_2, \dots, M_n) est 2^{n-1} .

Le nombre de choix M_1 est le nombre de parties de $\{1, 2, \dots, n\}$, c'est à dire 2^n .

Le nombre des matrices M de Σ_n pour lesquelles $\|M\|_{op} = n$ est alors égal à 2^{2n-1} .

B. Variables aléatoires sous-gaussiennes

8) Pour tout réel t on a : $ch(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$ et $\exp(\frac{t^2}{2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2^n \cdot n!}$.

Il suffit alors de montrer que pour tout entier naturel n , on a : $(2n)! \geq 2^n \cdot n!$.

Le cas $n = 0$ est évident, et pour $n \geq 1$, $\frac{(2n)!}{2^n \cdot n!} = \frac{n+1}{2} \frac{n+2}{2} \dots \frac{n+n}{2} \geq 1$, ce qui permet alors de conclure.

9) Soient $t \in \mathbb{R}$, et $x \in [-1, 1]$. La fonction exponentielle est convexe sur \mathbb{R} , $\frac{1+x}{2}$ et $\frac{1-x}{2}$ sont deux réels

positifs de somme 1, et donc : $\exp(tx) = \exp(\frac{1+x}{2}t + \frac{1-x}{2}(-t)) \leq \frac{1+x}{2} \exp(t) + \frac{1-x}{2} \exp(-t)$.

10) $E(X) = 0$ et X à valeurs dans $[-1, 1]$, alors d'après la question précédente :

$$\exp(tX) \leq \frac{1+X}{2} \exp(t) + \frac{1-X}{2} \exp(-t), \text{ donc } E(\exp(tX)) \leq E(\frac{1+X}{2}) \exp(t) + E(\frac{1-X}{2}) \exp(-t)$$

$$E(\exp(tX)) \leq \frac{1}{2}(1 + E(X)) \exp(t) + \frac{1}{2}(1 - E(X)) \exp(-t) = ch(t) \leq \exp(\frac{t^2}{2})$$

On suppose maintenant que $E(X) = 0$ et X à valeurs dans $[-\alpha, \alpha]$, alors d'après la question précédente :

$$\exp(t\frac{X}{\alpha}) \leq \frac{\alpha+X}{2\alpha} \exp(t) + \frac{\alpha-X}{2\alpha} \exp(-t). \quad E(\exp(tX)) = E(\exp(\alpha t \frac{X}{\alpha})) \leq E(\frac{\alpha+X}{2\alpha}) \exp(\alpha t) + E(\frac{\alpha-X}{2\alpha}) \exp(-\alpha t)$$

$$E(\exp(tX)) \leq \frac{1}{2\alpha}(\alpha + E(X)) \exp(\alpha t) + \frac{1}{2\alpha}(\alpha - E(X)) \exp(-\alpha t) = ch(\alpha t) \leq \exp(\frac{\alpha^2 t^2}{2}).$$

11) Les X_i sont indépendantes, alors les $\exp(\mu_i X_i)$ le sont aussi.

$$D'où E(\exp(t \sum_{i=1}^n \mu_i X_i)) = E(\prod_{i=1}^n \exp(t \mu_i X_i)) = \prod_{i=1}^n E(\exp(t \mu_i X_i)) \leq \prod_{i=1}^n \exp(\frac{\alpha^2 t^2 \mu_i^2}{2}) = \exp(\frac{\alpha^2 t^2}{2})$$

$\sum_{i=1}^n \mu_i X_i$ est alors α -sous gaussienne.

12) X une variable aléatoire α -sous gaussienne et $\lambda > 0$. la variable aléatoire $\exp(tX)$ est à valeurs positives, alors : $E(\exp(tX)) \geq \exp(t\lambda)P(X \geq \lambda)$

$$Donc : P(X \geq \lambda) \leq E(\exp(tX)) \cdot \exp(-t\lambda) \leq \exp(\frac{\alpha^2 t^2}{2}) \cdot \exp(-t\lambda) = \exp(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda)$$

$E(\exp(-tX)) \leq \exp(\frac{\alpha^2 (-t)^2}{2}) = \exp(\frac{\alpha^2 t^2}{2})$, alors $-X$ est aussi α -sous gaussienne.

alors d'après l'étape ci-dessus : $P(-X \geq \lambda) \leq \exp(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda)$.

$$P(|X| \geq \lambda) = P(X \geq \lambda) + P(-X \geq \lambda) \leq 2 \exp(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda).$$

Posons pour tout réel t , $\varphi(t) = 2 \exp(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda)$; φ est de classe C^1 sur \mathbb{R} et $\varphi'(x) = 2(\alpha^2 t - \lambda)\varphi(t)$.

φ atteint alors son minimum en $t = \frac{\lambda}{\alpha^2}$. $P(|X| \geq \lambda) \leq \varphi(\frac{\lambda}{\alpha^2}) = 2 \exp(-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2})$.

13) Soit X une variable aléatoire à valeurs positives, et soit $Y = [X]$ (la partie entière de X).

Y est à valeurs dans \mathbb{N} .

$Y \leq X \leq Y + 1$ alors $E(X)$ existe si et seulement si $E(Y)$ existe.

Et d'après le résultat admis dans l'énoncé, $E(X)$ existe si et seulement si la série $(\sum P(Y \geq k))$ converge. Mais pour tout entier naturel k , $P(Y \geq k) = P(X \geq k)$ puisque $(Y \geq k) = (X \geq k)$.

Finalement $E(X)$ existe si et seulement si la série $(\sum P(X \geq k))$ converge, et dans ce cas :

$$E(Y) \leq E(X) \leq E(Y) + 1 \text{ c'est à dire } \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(Y \geq k) \leq E(X) \leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k).$$

14) Soit X une variable aléatoire α -sous gaussienne et $\beta > 0$. supposons $k \geq 2$.

$$P(\exp(\frac{\beta^2 X^2}{2}) \geq k) = P(\beta^2 X^2 \geq 2 \ln(k)) = P(|X| \geq \frac{\sqrt{2 \ln(k)}}{\beta})$$

$$\frac{\sqrt{2 \ln(k)}}{\beta} > 0, \text{ alors d'après la question 12) ; } P(\exp(\frac{\beta^2 X^2}{2}) \geq k) \leq 2 \exp(-\frac{2 \ln(k)}{2\alpha^2}) = 2 \exp(-\alpha^{-2} \beta^{-2} \ln(k)).$$

$$P(\exp(\frac{\beta^2 X^2}{2}) \geq k) \leq 2k^{-\eta}, \text{ avec } \eta = \alpha^{-2} \beta^{-2}. \text{ Notons encore que l'inégalité est évidente pour } k = 1.$$

Si $\alpha\beta < 1$ alors $\eta > 1$ et la série de terme général $2k^{-\eta}$ converge, donc aussi la série de terme général $P(\exp(\frac{\beta^2 X^2}{2}) \geq k)$.

La variable aléatoire $\exp(\frac{\beta^2 X^2}{2})$ est à valeurs positives, alors d'après la question 13, elle admet une

$$\text{espérance majorée par } 1 + \sum_{k=1}^{\infty} P(\exp(\frac{\beta^2 X^2}{2}) \geq k) \leq 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\eta} = 1 + 2\zeta(\eta).$$

C. Recouvrements de la sphère

Soit K une partie compacte non vide de \mathbb{R}^n , et soit $\varepsilon > 0$.

15) Soit $a_1 \in K$, si $K \subset B(a_1, \frac{\varepsilon}{2})$, on prend $A = \{a_1\}$, si non il existe $a_2 \in K \setminus B(a_1, \frac{\varepsilon}{2})$.

Si $K \subset B(a_1, \frac{\varepsilon}{2}) \cup B(a_2, \frac{\varepsilon}{2})$, on prend $A = \{a_1, a_2\}$, si non il existe $a_3 \in K \setminus (B(a_1, \frac{\varepsilon}{2}) \cup B(a_2, \frac{\varepsilon}{2}))$.

Supposons que ce procédé ne s'arrête pas, on construit alors une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de K , telle que :

$\forall n \in \mathbb{N} ; a_{n+1} \notin \bigcup_{k=1}^n B(a_k, \frac{\varepsilon}{2})$. cette suite admet une sous suite $(a_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ convergente vers un certain

$a \in K$, donc à partir d'un certain rang N , $\|a_{\psi(n)} - a_{\psi(N)}\| < \frac{\varepsilon}{2}$ ce qui est absurde.

D'où l'existence d'une partie finie A de K telle que : $K \subset \bigcup_{a \in A} B(a, \frac{\varepsilon}{2})$.

16) Soit Λ un sous ensemble de K tel que pour tous x, y distincts dans Λ , $\|x - y\| > \varepsilon$.

Montrons que Λ est fini avec $\text{card}(\Lambda) \leq \text{card}(A)$.

$\forall x \in \Lambda ; \exists a_x \in A ; x \in B(a_x, \frac{\varepsilon}{2})$. (Pour tout $x \in \Lambda$ on se fixe un tel $a_x \in A$)

Montrons que pour tous $x, y \in \Lambda$; on a : $a_x \neq a_y$ dès que $x \neq y$.

Par contraposée, si $a_x = a_y$ alors $\|x - y\| \leq \|x - a_x\| + \|y - a_y\| \leq \varepsilon$; alors $x = y$.

L'application $[x \mapsto a_x]$ est alors injective de Λ vers A , alors Λ est fini et $\text{card}(\Lambda) \leq \text{card}(A)$.

Supposons alors que $\text{card}(\Lambda)$ est maximal. Montrons que $K \subset \bigcup_{a \in \Lambda} B(a, \varepsilon)$.

Par absurde supposons qu'on a pas cette inclusion, il existe $b \in K \setminus \left(\bigcup_{a \in \Lambda} B(a, \varepsilon) \right)$, $\Lambda' = \Lambda \cup \{b\}$

vérifie aussi la même hypothèse que Λ avec $\text{card}(\Lambda') = \text{card}(\Lambda) + 1$, ceci est absurde puisque $\text{card}(\Lambda)$ est supposé maximal. D'où $K \subset \bigcup_{a \in \Lambda} B(a, \varepsilon)$.

17) Soit Λ une partie finie de S^{n-1} telle que pour tous x, y distincts dans Λ , $\|x - y\| > \varepsilon$.

Soient $a \in \Lambda$ et $x \in B(a, \frac{\varepsilon}{2})$, alors $\|x\| = \|x - a + a\| \leq \|x - a\| + \|a\| = 1 + \|x - a\| \leq 1 + \frac{\varepsilon}{2}$.

$\bigcup_{a \in \Lambda} B(a, \frac{\varepsilon}{2}) \subset B(0, 1 + \frac{\varepsilon}{2})$. les compacts $B(a, \frac{\varepsilon}{2})$ sont deux à deux disjoints pour $a \in \Lambda$.

$\mu\left(\bigcup_{a \in \Lambda} B(a, \frac{\varepsilon}{2})\right) \leq \mu(B(0, 1 + \frac{\varepsilon}{2}))$ c'est à dire $\text{card}(\Lambda)\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^n$, d'où $\text{card}(\Lambda) \leq \left(\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^n$.

18) Soit Λ_n une partie du compact S^{n-1} telle que pour tous x, y distincts de Λ_n ; $\|x - y\| > \frac{1}{2}$.

On suppose que Λ_n est de cardinal maximal, alors d'après la question **16)**, $S^{n-1} \subset \bigcup_{a \in \Lambda_n} B(a, \frac{1}{2})$.

D'autre part, d'après la question **17)**, $\text{card}(\Lambda_n) \leq \left(\frac{2+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)^n = 5^n$.

D. Norme d'une matrice aléatoire

19) Pour tout $i \in [[1, n]]$, $y_i = \sum_{1 \leq j \leq n} M_{ij}^{(n)} x_j$ avec $\sum_{1 \leq j \leq n} x_j^2 = 1$ et les variables aléatoires $M_{ij}^{(n)}$, sont

indépendantes et α -sous gaussiennes.

Alors d'après la question **11)** la variable aléatoire y_i est aussi α -sous gaussienne.

Mais puisque les variables aléatoires $M_{ij}^{(n)}$ sont indépendantes, alors les y_i sont aussi indépendantes et par suite les $\exp(\gamma y_i^2)$ sont aussi indépendantes.

$$E(\exp(\gamma \|y\|^2)) = E(\exp(\gamma \sum_{1 \leq i \leq n} y_i^2)) = E\left(\prod_{1 \leq i \leq n} \exp(\gamma y_i^2)\right) = \prod_{1 \leq i \leq n} E(\exp(\gamma y_i^2)).$$

Mais d'après l'inégalité d'Orlicz admise à la fin de la partie **B.** on a :

$$\forall i \in [[1, n]] ; E(\exp(\gamma y_i^2)) = E(\exp(\frac{\gamma y_i^2}{4a^2})) \leq 5.$$

$$\text{Finalement : } E(\exp(\gamma \|y\|^2)) = \prod_{1 \leq i \leq n} E(\exp(\gamma y_i^2)) \leq 5^n.$$

$$\text{D'autre part : } E(\exp(\gamma \|y\|^2)) \geq \exp(\gamma r^2 n) P(\|y\|^2 \geq r\sqrt{n})$$

$$\text{Donc } P(\|y\|^2 \geq r\sqrt{n}) \leq E(\exp(\gamma \|y\|^2)) \exp(-\gamma r^2 n) \leq (5e^{-\gamma r^2})^n.$$

20) Soit Λ_n une partie de S^{n-1} vérifiant les conditions de la question 18).

Soit $r > 0$, et supposons que $\|M^{(n)}\|_{op} \geq 2r\sqrt{n}$.

Il existe $x \in S^{n-1}$ tel que : $\|M^{(n)}x\| = \|M^{(n)}\|_{op}$. Il existe $a \in \Lambda_n$ tel que : $\|x - a\| \leq \frac{1}{2}$.

$$\|M^{(n)}a\| = \|M^{(n)}a - M^{(n)}x + M^{(n)}x\| \geq \|M^{(n)}x\| - \|M^{(n)}a - M^{(n)}x\| = \|M^{(n)}\|_{op} - \|M^{(n)}a - M^{(n)}x\|$$

puisque $\|M^{(n)}a - M^{(n)}x\| \leq \|M^{(n)}\|_{op} \|a - x\| \leq \frac{1}{2} \|M^{(n)}\|_{op}$ alors $\|M^{(n)}a\| \geq \frac{1}{2} \|M^{(n)}\|_{op} \geq r\sqrt{n}$.

Soit alors $y_a = M^{(n)}a$. ($\|M^{(n)}\|_{op} \geq 2r\sqrt{n}$) $\subset \bigcup_{a \in \Lambda_n} (\|y_a\| \geq r\sqrt{n})$.

D'une part : $P(\|M^{(n)}\|_{op} \geq 2r\sqrt{n}) \leq \sum_{a \in \Lambda_n} P(\|y_a\| \geq r\sqrt{n})$

D'autre part : $\sum_{a \in \Lambda_n} P(\|y_a\| \geq r\sqrt{n}) \leq \sum_{a \in \Lambda_n} (5e^{-\gamma r^2})^n = \text{card}(\Lambda_n) (5e^{-\gamma r^2})^n \leq 5^n (5e^{-\gamma r^2})^n = (25e^{-\gamma r^2})^n$.

Finalement : $P(\|M^{(n)}\|_{op} \geq 2r\sqrt{n}) \leq (25e^{-\gamma r^2})^n$.