(1) $\mathrm{Card}S_n = n!$, donc $\dfrac{d_n}{n!} \leq 1$, et $R = R_{CV}\left(\sum \dfrac{d_n x^n}{n!}\right) \geq R_{CV}\left(\sum x^n\right) = 1$.

(2) On forme une permutation avec exactement k points fixes en choisissant les k points fixes parmi les n éléments puis, ce choix étant fait, en choisissant un dérangement de l'ensemble des $n-k$ autres éléments. Par conditionnement ("lemme des bergers"), on dénombre donc $\binom{n}{k} d_{n-k}$ permutations de ce type (on admet que le nombre de dérangements d'un ensemble E ne dépend que du cardinal de cet ensemble).

On a donc $\dfrac{n!}{k!(n-k)!} d_{n-k}$ cas favorables à l'événement $(X_n = k)$ sur $n!$ possibles, d'où $P(X_n = k) = \dfrac{d_{n-k}}{k!(n-k)!}$.

(3) Les deux séries entières sont de rayon ≥ 1, donc par le théorème sur le produit de Cauchy de deux séries entières : $\forall x \in]-1,1[$, $s(x)e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} \dfrac{d_{n-k}}{(n-k)!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} P_n(X_n = k) x^n$ d'après Q.2.

Or $\sum_{k=0}^{n} P_n(X_n = k) = 1$ donc $s(x)e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$.

Comme $R_{CV}\left(\sum \dfrac{x^n}{n!}\right) = +\infty$, le rayon de convergence de $\sum x^n$ est donc $\geq R$. Or il vaut 1, donc $1 \geq R$, ce qui donne $R = 1$ avec Q.1.

(4) Ainsi, $\forall x \in]-1,1[$, $s(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!} x^n$ (produit de Cauchy des séries entières $\sum_{n\geq 0} \dfrac{(-1)^n}{n!} x^n$ et $\sum_{n \geq 0} x^n$, de rayons respectifs $+\infty$ et 1).

Par unicité du développement en série entière (rayon non nul), on en déduit $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$.

(5) On applique les formules de Q.2 et Q.4 : $P_n(X_n = k) = \dfrac{1}{k!(n-k)!}(n-k)! \sum_{i=0}^{n-k} \dfrac{(-1)^i}{i!} = \dfrac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \dfrac{(-1)^i}{i!}$.

(6) Les permutations fixant i sont en bijection avec les permutations de l'ensemble des $n-1$ autres éléments, d'où $(n-1)!$ cas favorables sur $n!$ possibles, d'où $P(U_i = 1) = 1/n$. On en déduit que $U_i \sim \mathcal{B}(1/n)$.

Si $i \neq j$, $U_i U_j(S_n) = \{0, 1\}$, donc $U_i U_j$ suit bien une loi de Bernoulli. On a $U_i(\sigma)U_j(\sigma) = 1$ ssi i et j sont points fixes de σ. On a donc $(n-2)!$ cas favorables, d'où $U_i U_j \sim \mathcal{B}(1/n(n-1))$.

(7) $X_n = \sum_{i=1}^{n} U_i$ donc (linéarité de l'espérance) $E(X_n) = \sum_{i=1}^{n} E(U_i) = n \times (1/n) = 1$.

$X_n^2 = \sum_{i=1}^{n} U_i^2 + \sum_{i \neq j} U_i U_j$ Or $U_i^2 = U_i$, d'où $E(X_n^2) = nE(U_1) + n(n-1)E(U_1 U_2) = n \times (1/n) + n(n-1) \times \dfrac{1}{n(n-1)} = 2$.

On en déduit $V(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2 = 1$ (merci à G. Barat qui m'avait signalé une erreur).

(8) Avec Q.5 : $P_n(X_n = k) = \dfrac{1}{k!}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-k}\dfrac{(-1)^i}{i!} \to \dfrac{1}{k!}e^{-1}$ quand $n \to +\infty$.

On en déduit $y_k = \dfrac{1}{k!}e^{-1}$ et on reconnaît $Y \sim \mathcal{P}(1)$.

(9) On a pour tout $s \in \mathbb{R}$:

$$G_{X_n}(s) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i s^k}{i!k!} = \sum_{i+k\leq n}\frac{(-1)^i s^k}{i!k!} = \sum_{m=0}^{n}\sum_{i+k=m}\frac{(-1)^i s^k}{i!k!}.$$

Or $\displaystyle\sum_{i+k=m}\frac{(-1)^i s^k}{i!k!}$ est le terme général du produit de Cauchy des séries absolument convergentes : $\displaystyle\sum_{i\geq 0}\frac{(-1)^i}{i!}$ et $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\frac{s^k}{k!}$.

La série produit est donc elle aussi absolument convergente et

$$\lim_{n\to+\infty} G_{X_n}(s) = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{i+k=m}\frac{(-1)^i s^k}{i!k!} = \left(\sum_{i\geq 0}\frac{(-1)^i}{i!}\right)\left(\sum_{k\geq 0}\frac{s^k}{k!}\right) = e^{-1}e^s.$$

Or $Y \sim \mathcal{P}(1)$ donc $G_Y(s) = e^{-1}e^s$, d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} G_{X_n}(s) = G_Y(s)$.

(10) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on majore $|x(k)-y(k)| \leq x(k)+y(k)$. donc $d_{VT}(x,y) \leq \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x(k)+y(k) = 1$ car $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x(k) = \sum_{k=0}^{+\infty} y(k) = 1$.

On a une somme de termes positifs, donc elle est d'une part positive, et si elle est nulle, on a $\forall k \in \mathbb{N}$: $|x(k) - y(k)| = 0$, donc $x(k) = y(k)$, d'où $x = y$. La réciproque est triviale, de même que la symétrie.

Pour trois distributions x, y, z, on a pour tout k $|x(k) - z(k)| \leq |x(k) - y(k) + y(k) - z(k)| \leq |x(k) - y(k)| + |y(k) - z(k)|$, d'où le résultat en sommant membre à membre.

(11) $d_{VT}(p_X, p_Y) = \dfrac{1}{2}\left(|(1-\lambda) - (1-\mu)| + |\lambda - \mu|\right) = |\lambda - \mu|$.

(12) $2d_{VT}(p_X, \pi_\lambda) = |(1-\lambda) - e^{-\lambda}| + |\lambda - \lambda e^{-\lambda}| + \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ On note que $t \mapsto e^{-t}$ est convexe (dérivée seconde positive), donc $e^{-t} \geq 1 - t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On peut donc expliciter les valeurs absolues : $2d_{VT}(p_X, \pi_\lambda) = e^{-\lambda} - 1 + \lambda + \lambda(1 - e^{-\lambda}) + e^{-\lambda}(e^{\lambda} - 1 - \lambda) = 2\lambda(1 - e^{-\lambda})$ (après simplifications), d'où $d_{VT}(p_X, \pi_\lambda) = \lambda(1 - e^{-\lambda})$. La même inégalité de convexité donne $0 \leq 1 - e^{-\lambda} \leq \lambda$, d'où $d_{VT}(p_X, \pi_\lambda) \leq \lambda^2$.

(13) $2d_{VT}(p_{X_n}, \pi_1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!} - \frac{e^{-1}}{k!}\right| + \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{e^{-1}}{k!}$.

Or $\dfrac{1}{k!}\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!} - e^{-1}\right) = \dfrac{1}{k!}\displaystyle\sum_{i=n-k+1}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{i!}$, et on a bien :

$$2d_{VT}(p_{X_n}, \pi_1) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left|\sum_{i=n-k+1}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{i!}\right| + e^{-1}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!}.$$

(14) $r_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1+k)!}$. Or $(n+1+k)! = (n+1)!(n+2)\ldots(n+k+1) \geq (n+1)!(n+2)^k$.
(k facteurs après $(n+1)!$, tous $\geq (n+2)$.)

D'où $r_n \leq \dfrac{1}{(n+1)!}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)^k}$.

En particulier, $r_n \geq \dfrac{1}{(n+1)!}$, donc

$1 \leq (n+1)!r_n \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)^k} = \frac{1}{(1-1/n+2)} \to 1$. D'où $r_n \sim \dfrac{1}{(n+1)!}$.

(NB : il n'est pas utile d'invoquer Stirling dans ce contexte.)

(15) La suite $\dfrac{(-1)^i}{i!}$ est de signe alterné, sa valeur absolue $\dfrac{1}{i!}$ décroit et tend vers 0, donc on peut appliquer le théorème des séries alternées, et en particulier $\left|\displaystyle\sum_{i=n-k+1}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{i!}\right| \leq \frac{1}{(n-k+1)!}$.

On en déduit :
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left|\sum_{i=n-k+1}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{i!}\right| \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k+1)!} \leq \sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!(n+1-k)!} = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$.

D'après Q.14, $e^{-1}\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!} \sim \frac{e^{-1}}{(n+1)!}$.

Les deux termes du membre de droite de Q.13 sont donc dominés et $d_{VT}(p_{X^n},\pi_1) = O(\dfrac{2^n}{(n+1)!}$.

(16) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x * y(k) \in \mathbb{N}$.
De plus, $x*y(k)$ est le terme général du produit de Cauchy des séries $\sum x(i)$ et $\sum y(j)$, qui sont absolument convergentes et de somme 1. On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x*y(k) = \sum_{i=0}^{+\infty} x(i)\sum_{j=0}^{+\infty} y(j) = 1$.

(17) On considère le système complet d'événements $(X = i)_{i\in\mathbb{N}}$ et on applique la formule des probabilités totales :

$p_{X+Y}(k) = P(X+Y=k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} P(X+Y=k, X=i) = \sum_{i=0}^{k} P(X=i, Y=k-i) = \sum_{i=0}^{k} p_X(i)p_Y(k-i)$ car X et Y sont indépendantes.

On a donc $p_{X+Y}(k) = p_X * p_Y(k)$.

(18) On a $x*y(k) - u*v(k) = \displaystyle\sum_{i+j=k} x(i)y(j) - u(i)v(j) = \sum_{i+j=k}(x(i)-u(i))y(j) + u(i)(y(j)-v(j))$
et par inégalité triangulaire : $|x*y(k) - u*v(k)| \leq \displaystyle\sum_{i+j=k} y(j)|x(i)-u(i)| + u(i)|y(j)-v(j)|$.

(19) Encore des produits de Cauchy ! Les séries $\sum_{j\geq 0} y(j)$ et $\sum_{i\geq 0} |x(i) - u(i)|$ sont absolument convergentes (positives), de sommes respectives 1 et $2d_{VT}(x,u)$, donc $\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i+j=k} y(j)|x(i) - u(i)| = 2d_{VT}(x,u)$.

De même, $\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i+j=k} u(i)|y(j) - v(j)| = 2d_{VT}(y,v)$.

En sommant les deux membres de Q.18, il vient après simplification par 2 : $d_{VT}(x*y, u*v) \leq d_{VT}(x,u) + d_{VT}(y,v)$.

(20) On se donne n variables indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ de loi $\mathcal{B}(\lambda)$.

Alors $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi $\mathcal{B}(n,\lambda)$. (Justification : fonction génératrice $G_{X_1}(t)^n = (1-p+pt)^n$.)

De même, on se donne n variables indépendantes $Y_1, \ldots, Y_n$ de loi $\mathcal{P}(\lambda)$. Alors $Z_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ suit la loi $\mathcal{P}(n\lambda)$. (Justification : fonction génératrice $G_{Y_1}(t)^n = e^{n\lambda(s-1)}$.)

En utilisant Q.19, on peut démontrer par récurrence sur n que $d_{VT}(p_{X_1+\cdots+X_n}, p_{Y_1+\cdots+Y_n}) \leq \sum_{k=1}^{n} d_{VT}(p_{X_k}, p_{Y_k})$.

Or $p_{S_n} = p_U$ et $p_{Z_n} = \pi_{n\lambda}$ donc d'après Q.12 : $d_{VT}(p_U, \pi_{n\lambda}) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda^2 = n\lambda^2$.

(21) Comme $\alpha > 0$ et $n > \lfloor \alpha \rfloor$, on a $0 < \dfrac{\alpha}{n} < 1$, donc B_n est bien définie. En appliquant Q.20 avec $\lambda = \dfrac{\alpha}{n}$, il vient :

$d_{VT}(p_{B_n}, \pi_\alpha) \leq \dfrac{\alpha^2}{n} \to 0$ (quand $n \to +\infty$).

Or par définition, pour tout k, $|P(B_n = k) - e^{-\alpha}\dfrac{\alpha^k}{k!}| \leq 2d_{VT}(p_{B_n}$, donc $\lim_{n\to+\infty} P(B_n = k) = e^{-\alpha}\dfrac{\alpha^k}{k!}$.

(22) On se donne comme à Q.21 une variable binomiale C_n de paramètres n et $\dfrac{\beta}{n}$, dès que $n > \lfloor \beta \rfloor$.
On supposera que n est assez grand pour que B_n et C_n soient bien définies.

On procède comme en Q.20 en considérant n variables indépendantes X_i de loi $\mathcal{B}(\alpha/n)$ et n variables indépendantes Y_i de loi $\mathcal{B}(\beta/n)$, de sorte que $p_{B_n} = p_{X_1+\ldots X_n}$ et $p_{C_n} = p_{Y_1+\cdots+Y_n}$.

D'après Q.20 et Q.11, on a

$d_{VT}(p_{B_n}, p_{C_n}) \leq n d_{VT}(p_{X_1}, p_{Y_1}) = n\left|\dfrac{\alpha}{n} - \dfrac{\beta}{n}\right| = |\alpha - \beta|$.

Or par inégalité triangulaire (Q.10) :

$d_{VT}(\pi_\alpha, \pi_\beta) \leq d_{VT}(\pi_\alpha, p_{B_n}) + d_{VT}(p_{B_n}, p_{C_n}) + d_{VT}(p_{C_n}, \pi_\beta)$ donc

$d_{VT}(\pi_\alpha, \pi_\beta) \leq |\alpha - \beta| + d_{VT}(\pi_\alpha, p_{B_n}) + d_{VT}(p_{C_n}, \pi_\beta)$.

On fait tendre n vers $+\infty$: $d_{VT}(\pi_\alpha, p_{B_n})$ et $d_{VT}(p_{C_n}, \pi_\beta)$ tendent vers 0 d'après Q.21, donc $d_{VT}(\pi_\alpha, \pi_\beta) \leq |\alpha - \beta|$.