

**Corrigé de l'épreuve de Mathématique : Mines-Ponts
Math II-MP-MPI 2025**

Makrem Salhi : makremessalhi@gmail.com

A. Propriétés du polynôme p_0 et stabilité des racines

1. L'identité $p_0(x) = x^n p\left(\frac{1}{x}\right)$ valable sur \mathbb{R}^* est immédiate.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$p(x) = a_n \prod_{j=1}^n (x - \alpha_j).$$

Par suite, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$p_0(x) = a_n x^n \prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{x} - \alpha_j\right) = a_n \prod_{j=1}^n (1 - \alpha_j x),$$

cette égalité est clairement vraie en $x = 0$.

Par conséquent,

$$p_0 = a_n \prod_{j=1}^n (1 - \alpha_j X).$$

2. Supposons que $p \wedge p_0 = 1$. Si p possède une racine stable α , alors $\alpha \neq 0$ et $\frac{1}{\alpha}$ est une racine de p . Comme $\frac{1}{\alpha}$ est une racine de p_0 d'après la question précédente, on déduit que $\frac{1}{\alpha}$ est une racine commune à p et p_0 et donc le polynôme $X - \frac{1}{\alpha}$ divise p et p_0 : ceci est absurde car les deux polynômes en question sont premiers entre eux, donc p n'admet pas de racine stable.

Réciproquement, supposons que p ne possède pas de racine stable. Comme p et p_0 sont scindés sur \mathbb{R} en vertu de la question précédente, il suffit alors de montrer qu'ils n'ont pas de racine commune. Supposons par l'absurde que $\alpha \in \mathbb{R}$ vérifie : $p(\alpha) = p_0(\alpha) = 0$, comme $p_0(0) \neq 0$, α est non nulle et donc, par la question précédente, $p\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$ ce qui prouve que α est une racine stable de p : absurde. D'où le résultat demandé.

3. Les racines $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ de p sont, par hypothèse, non nuls, deux à deux distinctes et stables. Ainsi, $\frac{1}{\alpha_1}, \dots, \frac{1}{\alpha_n}$ sont aussi les racines de p et donc, par la question 1, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont les racines de p_0 . Comme p et p_0 sont de degré n chacun, ils sont associés et donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $p = \lambda p_0$. Par comparaison des coefficients dominants de p et p_0 , on a : $a_n = \lambda a_0$ et par comparaison des coefficients constants, on a : $a_0 = \lambda a_n$. D'où, on a : $a_n = \lambda^2 a_n$ et comme $a_n \neq 0$, on trouve que : $\lambda^2 = 1$, ceci achève la démonstration.

4. Soit $x \in \mathbb{R}^*$, par la question précédente, on a

$$\begin{aligned} h(x) &= \lambda x p'_0(x) \\ &= \lambda n x^n p\left(\frac{1}{x}\right) - \lambda x^{n-1} p'\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= np(x) - \lambda (p')_0(x) \quad (\deg(p') = n - 1). \end{aligned}$$

Les deux polynômes h et $np - \lambda (p')_0$ coïncident sur \mathbb{R}^* donc ils sont égaux. Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\begin{aligned} h_0(x) &= x^n h\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= x^n \left(np\left(\frac{1}{x}\right) - \lambda \frac{1}{x^{n-1}} p'(x) \right) \\ &= np_0(x) - \lambda x p'(x) \\ &= \lambda (np - xp'). \end{aligned}$$

Les deux polynômes h_0 et $\lambda (np - Xp')$ coïncident sur \mathbb{R}^* donc ils sont égaux, d'où le résultat escompté.

5. Par hypothèse, le polynôme p admet n racines distinctes : $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$. Soit $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, p est continue sur $[\alpha_j, \alpha_{j+1}]$, dérivable sur $] \alpha_j, \alpha_{j+1} [$ avec $p(\alpha_j) = p(\alpha_{j+1}) = 0$ donc, par application du théorème de Rolle, il existe $\mu_j \in] \alpha_j, \alpha_{j+1} [$ tel que : $p'(\mu_j) = 0$. Ceci fournit n racines distinctes de p' : $\mu_1 < \dots < \mu_{n-1}$, comme p' est de degré $n - 1$, il est alors scindé sur \mathbb{R} .

Comme $h = Xp'$, h est scindé sur \mathbb{R} et, par la question 1, h_0 est scindé sur \mathbb{R} . Supposons que h et h_0 possèdent une racine commune α , donc, par la question précédente, $\lambda np(\alpha) = 0$ et par suite $p(\alpha) = 0$, ceci montre que α est non nulle car les racines de p sont stables. D'autre part, on a $h(\alpha) = \alpha p'(\alpha) = 0$ donc $p'(\alpha) = 0$. Par conséquent, α est une racine double de p ce qui est absurde. On conclut que : $h \wedge h_0 = 1$.

Soulignons que p' est scindé sur \mathbb{R} et soit Q un polynôme divisant p' et $(p')_0$. Ainsi, Q divise $Xp' = h$ et, par la question précédente, Q divise $(p')_0$. On en déduit que Q divise np donc divise p et par suite il divise h_0 . Par conséquent, Q est un diviseur commun à h et h_0 donc il est constant, d'où : $p \wedge (p')_0 = 1$. Le polynôme p' n'admet pas alors de racine stable en vertu de la question 2.

B. Liberté d'une famille de polynômes

6. Supposons qu'il existe deux entiers i et k tels que : $1 \leq i < k \leq n$ et $\alpha_i \alpha_k = 1$.

• Si $j = 1$, $f_1 = a_n \prod_{l=2}^n (1 - \alpha_l X)$ et par suite $f_1(\alpha_i) = 0$ ($k \geq 2$).

• Si $j = n$, $f_n = a_n \prod_{l=1}^{n-1} (X - \alpha_l)$ et par suite $f_n(\alpha_i) = 0$ ($1 \leq i \leq n - 1$).

- Si $2 \leq j \leq n-1$, on a : $f_j(\alpha_i) = 0$ lorsque $1 \leq i \leq j-1$ et si $i \geq j$, on a $k > i$ donc $k \geq j+1$ ce qui fournit : $f_j(\alpha_i) = 0$.

On conclut que α_i est racine de chaque polynôme f_j , $j = 1, \dots, n$.

Supposons que la famille (f_1, \dots, f_n) est libre, comme il s'agit d'une famille de polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ de cardinal $n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X]$, la famille (f_1, \dots, f_n) est alors une base $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

En particulier, il existe $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que : $1 = \sum_{l=1}^n a_l f_l(X)$, ceci fournit alors :

$$1 = \sum_{l=1}^n a_l f_l(\alpha_i) = 0 : \text{absurde. Il en découle que la famille } (f_1, \dots, f_n) \text{ est libre.}$$

7. Soit $f \in E$, il existe alors $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$f = \frac{P}{Q}, \quad \text{avec } Q = \prod_{i=1}^N (1 - \alpha_i X^{\beta_i}),$$

où $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{N}$.

Fixons $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a,

$$P_j(f) = \frac{Q(\alpha_j)(1 - \alpha_j X)P(X) - (1 - \alpha_j^2)P(\alpha_j)Q(X)}{Q(\alpha_j)(X - \alpha_j)Q(X)}.$$

Notons que $Q(\alpha_j) \neq 0$ car sinon, il existerait un entier $1 \leq k \leq n$ tel que $\alpha_j \alpha_k = 1$, dans ce cas, α_j et $\frac{1}{\alpha_j}$ seraient des racines de p ce qui absurde car p n'admet pas de racine stable. Maintenant, posons

$$S = Q(\alpha_j)(1 - \alpha_j X)P(X) - (1 - \alpha_j^2)P(\alpha_j)Q(X) \in \mathbb{R}[X].$$

Comme $S(\alpha_j) = 0$, il existe un polynôme $R_j \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $S = (X - \alpha_j)R_j$ et par suite

$$P_j(f) = \frac{R_j(X)}{Q(\alpha_j)Q(X)} \in E.$$

La linéarité de $P_j(f)$ est immédiate donc : $P_j \in \mathcal{L}(E)$.

D'autre part, si $P_j(f) = 0$ alors f est de la forme $\frac{\lambda}{X - \alpha_j}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et par suite,

$\ker(P_j) \subset \text{vect} \left(\frac{1}{X - \alpha_j} \right)$, comme $P_j \left(\frac{1}{X - \alpha_j} \right) = 0$, on a

$$\ker(P_j) = \text{vect} \left(\frac{1}{X - \alpha_j} \right).$$

8. Soient $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $g \in E$. On obtient immédiatement

$$P_j \left(\frac{(X - \alpha_j)g}{1 - \alpha_j X} \right) = g.$$

9. Montrons, par récurrence finie sur $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, que la famille (f_1, \dots, f_n) est libre.

Soulignons d'abord que si $1 \leq k \leq n$, alors, par la question précédente, on a

$$P_1 \left(\frac{(X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_k)}{(1 - \alpha_1 X) \dots (1 - \alpha_{k+1} X)} \right) = \frac{(X - \alpha_2) \dots (X - \alpha_k)}{(1 - \alpha_2 X) \dots (1 - \alpha_{k+1} X)}.$$

On en déduit que

$$P_2 \circ P_1 \left(\frac{(X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_k)}{(1 - \alpha_1 X) \dots (1 - \alpha_{k+1} X)} \right) = \frac{(X - \alpha_3) \dots (X - \alpha_k)}{(1 - \alpha_3 X) \dots (1 - \alpha_{k+1} X)}.$$

Par une récurrence immédiate, on obtient

$$(*) \quad P_k \circ \dots \circ P_1 \left(\frac{(X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_k)}{(1 - \alpha_1 X) \dots (1 - \alpha_{k+1} X)} \right) = \frac{1}{1 - \alpha_{k+1} X}.$$

Soit $j = 1$, le polynôme f_1 est non nul donc la famille (f_1) est libre. Soit $1 \leq j < n$ et supposons que la famille (f_1, \dots, f_j) est libre. Montrons que la famille (f_1, \dots, f_{j+1}) est libre.

Soient $b_1, \dots, b_{j+1} \in \mathbb{R}$ tels que

$$b_1 f_1 + \dots + b_j f_j + b_{j+1} f_{j+1} = 0,$$

en divisant cette égalité par $\prod_{i=1}^n (1 - \alpha_i X)$, on obtient

$$\sum_{i=1}^{j+1} b_i g_i = 0,$$

ou encore

$$\sum_{i=1}^{j+1} b_i \frac{(X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_{i-1})}{(1 - \alpha_1 X) \dots (1 - \alpha_i X)} = 0.$$

En appliquant l'endomorphisme $P_j \circ \dots \circ P_1$ aux deux membres de la dernière égalité ci-haut et en utilisant l'identité (*), on obtient

$$\frac{b_{j+1}}{1 - \alpha_{j+1} X} = 0.$$

Par suite, $b_{j+1} = 0$, donc : $b_1 f_1 + \dots + b_j f_j = 0$. Il découle de l'hypothèse de récurrence que :

$$b_1 = \dots = b_j = b_{j+1} = 0$$

ce qui implique que la famille (f_1, \dots, f_{j+1}) est libre. En conclusion, la famille (f_1, \dots, f_n) est libre.

C. Expression de la matrice $J(p)$

10. Un calcul routinier fournit

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad S^k = (\delta_{i+k,j})_{1 \leq i,j \leq n} \text{ et } (S^T)^k = (\delta_{i-k,j})_{1 \leq i,j \leq n}.$$

En outre,

$$\forall k \geq n, \quad S^k = (S^T)^k = 0.$$

Notons E_i le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont tous nuls sauf celui à la position i qui vaut 1. Il vient que :

$$(U, S^T U, \dots, (S^T)^{n-1} U) = (E_1, E_2, \dots, E_n)$$

d'où le résultat.

11. Notons d'abord que les B_j sont des polynômes en S donc ils commutent deux à deux, de même pour les B_j^T . Il en est de même pour les C_j ainsi que pour les C_j^T . Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} J(p) &= p_0(S)^T p_0(S) - p(S)^T p(S) \\ &= a_n^2 \prod_{j=1}^n C_j^T \prod_{j=1}^n C_j - a_n^2 \prod_{j=1}^n B_j^T \prod_{j=1}^n B_j. \end{aligned}$$

De surcroît, si $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, alors on a

$$\begin{aligned} f_j(S)^T C_j^T C_j f_j(S) - f_j(S)^T B_j^T B_j f_j(S) &= a_n^2 \left(\prod_{k=1}^{j-1} B_k^T \prod_{k=j+1}^n C_k^T \right) C_j^T C_j \prod_{k=j+1}^n C_k \prod_{k=1}^{j-1} B_k \\ &\quad - a_n^2 \left(\prod_{k=1}^{j-1} B_k^T \prod_{k=j+1}^n C_k^T \right) B_j^T B_j \prod_{k=j+1}^n C_k \prod_{k=1}^{j-1} B_k \\ &= a_n^2 \prod_{k=1}^{j-1} B_k^T \prod_{k=j}^n C_k^T \prod_{k=j}^n C_k \prod_{k=1}^{j-1} B_k \\ &\quad - a_n^2 \prod_{k=1}^j B_k^T \prod_{k=j+1}^n C_k^T \prod_{k=j+1}^n C_k \prod_{k=1}^j B_k. \end{aligned}$$

On obtient alors, par télescopage,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n f_j(S)^T (C_j^T C_j - B_j^T B_j) f_j(S) &= a_n^2 \prod_{k=1}^n C_k^T \prod_{k=1}^n C_k - a_n^2 \prod_{k=1}^n B_k^T \prod_{k=1}^n B_k \\ &= J(p). \end{aligned}$$

12. Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Un calcul routinier fournit : $S^T S = (a_{i,l})_{1 \leq i, l \leq n}$ avec

$$a_{i,l} = \begin{cases} \delta_{i,l}, & \text{si } 2 \leq i, l \leq n \\ 0, & \text{si } i = 1, l = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Comme UU^T est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui à la position $(1, 1)$, on déduit que

$$\begin{aligned} C_j^T C_j - B_j^T B_j &= (I_n - \alpha_j S^T)(I_n - \alpha_j S) - (S^T - \alpha_j I_n)(S - \alpha_j I_n) \\ &= (1 - \alpha_j^2)(I_n - S^T S) \\ &= (1 - \alpha_j^2)UU^T. \end{aligned}$$

13. En combinant les questions 11 et 12, on obtient

$$J(p) = \sum_{j=1}^n (1 - \alpha_j)^2 f_j(S)^T UU^T f_j(S).$$

Soit V la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est $V_j = f_j(S)^T U$ où $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, alors $V_j = VE_j$ où E_j est le $j^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

On a

$$\begin{aligned} J(p) &= \sum_{j=1}^n (1 - \alpha_j^2) V_j V_j^T \\ &= \sum_{j=1}^n (1 - \alpha_j^2) V E_j E_j^T V^T \\ &= V \sum_{j=1}^n (1 - \alpha_j^2) E_j E_j^T V \\ &= V D V. \end{aligned}$$

14. Supposons que p admet une racine stable α . Si cette racine vaut 1 ou -1 alors la matrice diagonale D définie dans la question précédente est non inversible ce qui implique que $Jp = V D V^T$ n'est pas aussi inversible. Sinon, par définition d'une racine stable, il existerait deux indices $1 \leq i < k \leq n$ tel que : $\alpha = \alpha_i$ et $\alpha_i \alpha_k = 1$. Il résulte de la question 6 que la famille (f_1, \dots, f_n) est liée, ceci se traduit par l'existence de n réels : a_1, \dots, a_n non tous nuls tels que

$$a_1 f_1 + \dots + a_n f_n = 0.$$

Par suite,

$$a_1 f_1(S)^T U + \dots + a_n f_n(S)^T U = 0.$$

On en déduit que les vecteurs colonnes de la matrice V sont liés et par conséquent V n'est pas inversible. On conclut que $J(p)$ n'est pas inversible.

D. Cas où $J(p)$ est inversible : critère de Schur-Cohn

15. Soient A, B deux matrices congruentes de $M_n(\mathbb{R})$, c'est à dire, $A = P^T B P$ où P est une matrice de $GL_n(\mathbb{R})$. Soit F un s.e.v de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant la condition \mathcal{C}_A , alors $X^T A X > 0$ pour tout $X \in F \setminus \{0\}$. Par suite, $(PX)^T B (PX) > 0$ pour tout $X \in F \setminus \{0\}$.

Posons,

$$G = P(F) := \{PX : X \in F\},$$

ainsi le s.e.v G est l'image de F par l'automorphisme $u : X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \mapsto PX$, donc : $\dim(G) = \dim(F)$ et on a :

$$\forall Y \in G \setminus \{0\}, \quad Y^T B Y > 0.$$

On en déduit que

$$\{\dim(F) | F \text{ s.e.v de } M_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ vérifiant } (\mathcal{C}_A)\} \subset \{\dim(F) | F \text{ s.e.v de } M_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ vérifiant } (\mathcal{C}_B)\}.$$

Il en découle que : $d(A) \leq d(B)$.

Comme $B = Q^T A Q$ où $Q = (P^{-1})^T \in GL_n(\mathbb{R})$, on obtient de même, $d(B) \leq d(A)$, d'où : $d(A) = d(B)$.

16. Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$. Si M n'admet aucune valeur propre strictement positive, alors $\pi(M) = 0$ et l'espace vectoriel $F_M = \{0\}$ répond à la question. Sinon, on note : $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ la suite décroissante des valeurs propres de M et on suppose que ses valeurs propres strictement positives sont : $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ avec $1 \leq k \leq n$. Fixons, de plus, une base orthonormale (v_1, \dots, v_n) de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de M tels que : $Mv_i = \lambda v_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Soit $F_M = \text{vect}(v_1, \dots, v_k)$, alors F_M est de dimension $k = \pi(M)$ et on a

$$\forall X \in F_M \setminus \{0\}, \quad X^T M X = \sum_{i=1}^k X_i^2 \lambda_i > 0.$$

Par conséquent, le s.e.v F_M satisfait la condition (\mathcal{C}_M) .

17. La formule de Grassmann fournit

$$\dim(F_M^\perp \cap G) = \dim(F_M^\perp) + \dim(G) - \dim(F_M^\perp + G).$$

Par suite,

$$\dim(F_M^\perp \cap G) > n - \pi(M) + \pi(M) - n > 0,$$

et donc : $\dim(F_M^\perp \cap G) \geq 1$. En particulier, on peut choisir un vecteur X non nul dans $F_M^\perp \cap G$, cela veut dire que, d'une part, $X^T M X > 0$ car $X \in G$ et d'autre part, en conservant les notations de la question précédente, on a

$$X^T M X = \sum_{i=k+1}^n \langle X, v_i \rangle \lambda_i \leq 0$$

car $X \in F_M^\perp$, ceci est manifestement contradictoire.

En conclusion,

$$\forall M \in S_n(\mathbb{R}), \quad \pi(M) = d(M).$$

18. On suppose que $J(p)$ est inversible. Par contraposée du résultat de la question 14, p ne possède aucune racine stable. Par ailleurs, d'après la question 13, on a : $J(p) = V D V^T$ où $D = \text{Diag}((1 - \alpha_j^2))_{1 \leq j \leq n}$ et D est, dès lors, inversible. De surcroît, $J(p)^T = V D V^T = J(p)$ et donc $J(p) \in S_n(\mathbb{R})$. On en tire que

$$\begin{aligned} \pi(J(p)) &= d(J(p)) \quad (\text{question 17}) \\ &= d(D) \quad (\text{question 15}) \\ &= \pi(D) \quad (D \in S_n(\mathbb{R})). \end{aligned}$$

Comme D est une matrice diagonale, $\pi(D)$ est l'ensemble des coefficients diagonaux de D qui sont strictement positifs, ceux-ci sont tout simplement les racines α_j de p telles que : $|\alpha_j| < 1$.

On déduit aussitôt que

$$\pi(J(p)) = \pi(D) = \sigma(p).$$

E. Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité

19. On suppose que p n'admet pas de racine stable, en particulier, 1 et -1 ne sont pas des racines de p (car elles sont stables) et donc la matrice diagonale D de la question 13 est inversible. En supposant, de plus, que $J(p)$ n'est pas inversible, on déduit que V est nécessairement non inversible car $\det(J(p)) = \det(D) \det(V)^2$. Par conséquent, les vecteurs colonnes de la matrice V sont liés, ceci se traduit par l'existence de n réels b_1, \dots, b_n non tous nuls tels que

$$b_1 f_1(S^T)U + \dots + b_n f_n(S^T)U = 0.$$

En posant

$$q(X) = \sum_{i=1}^n f_i(X) \in \mathbb{R}_{n-1}[X],$$

on voit que q est non nul et que : $q(S^T)U = 0$.

20. Par la question 18, on a, si $J(p)$ est inversible alors p ne possède aucune racine stable. Réciproquement, supposons que p ne possède aucune racine stable et montrons que $J(p)$ est inversible. En effet, si ce n'est pas le cas, il existe, par la question précédente, un polynôme : $q(X) = b_0 + b_1 X + \dots + b_{n-1} X^{n-1} \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ non nul tel que : $q(S^T)U = 0$. Par suite,

$$(b_0 I_n + b_1 S^T + \dots + b_{n-1} (S^T)^{n-1}) U = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = 0.$$

Il s'ensuit que q est nul ce qui est absurde. Ainsi $J(p)$ est inversible, d'où le résultat prononcé.

F. Un cas particulier

21. On a 0 est une racine de h qui est manifestement non stable, les autres racines de h sont celles de p' qui sont, en vertu de la question 5, non stables. Par suite, h ne possède aucune racine stable et donc, par la question 20, $J(h)$ est inversible.
22. On a, pour tout $r > 0$,

$$p(rX) = a_n \prod_{i=1}^n (rX - \alpha_i) = a_n r^n \prod_{i=1}^n \left(X - \frac{\alpha_i}{r} \right).$$

Par suite, si $0 < r < 1$ et α une racine de p telle que $|\alpha| \geq 1$ alors $\left| \frac{\alpha}{r} \right| \geq 1$.

Posons maintenant

$$\mu = \max \{ |\alpha| : \alpha \text{ racine de } p \text{ dans }]-1, 1[\}.$$

Si $r \in]\mu, 1[$ et si α est une racine de p dans $] - 1, 1[$, on a $\left| \frac{\alpha}{r} \right| < 1$. Par conséquent, avec le choix de $r \in]\mu, 1[$, le nombre des racines de $p(rX)$ à l'intérieur de l'intervalle $] - 1, 1[$ est égal au nombre des racines de p dans l'intervalle $] - 1, 1[$, à savoir $\sigma(p)$.

Supposons maintenant que le polynôme $p(rX)$ admet une racine stable α_r , alors $r\alpha_r$ et $\frac{r}{\alpha_r}$ sont deux racines de p , donc il existe deux racines de p : α et α' tels que

$$\alpha\alpha' = r^2,$$

c'est à dire

$$r \in \{ \sqrt{|\alpha\alpha'|} : \alpha, \alpha' \text{ racines de } p \}.$$

L'ensemble $J = \{ \sqrt{|\alpha\alpha'|} : \alpha, \alpha' \text{ racines de } p \}$ étant fini, on pose

$$\beta = \begin{cases} \max J \cap]\mu, 1[, & \text{si } J \cap]\mu, 1[\neq \emptyset \\ \mu, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par suite, si $r \in]\beta, 1[$, $p(rX)$ est scindé, possède $\sigma(p)$ racines dans $] - 1, 1[$ et n'admet pas de racines stables. Pour conclure, il suffit alors de poser

$$\eta = 1 - \beta.$$

23. Soit $r \in]1 - \eta, 1[$, le polynôme $p(rX)$ ne possède pas des racines stables, donc, par les question 20 et 18,

$$\pi \left(\frac{n}{2(r-1)} F(r) \right) = \pi \left(\frac{1}{r-1} F(r) \right).$$

Comme $F(r)$ est inversible, ses valeurs propres sont non nulles, or $r - 1 < 0$, donc

$$\pi \left(\frac{1}{r-1} F(r) \right) = n - \pi(F(r)) = n - \sigma(F(r)) = n - \sigma(p).$$

D'où le résultat escompté.

24. L'application F est une fonction vectorielle, c'est précisément une fonction matricielle, dont les fonctions composantes sont des polynômes en r donc elle est dérivable, et même de classe \mathbb{C}^∞ , sur \mathbb{R}_+^* . En posant : $Q(X) = p(rX)$, on voit que

$$Q_0(x) = x^n p \left(\frac{x}{r} \right) = r^n p_0 \left(\frac{x}{r} \right).$$

Comme $p = \lambda p_0$, on obtient

$$Q_0(x) = \lambda r^n p \left(\frac{x}{r} \right).$$

Par conséquent,

$$F(r) = r^{2n} p \left(\frac{S}{r} \right)^T p \left(\frac{S}{r} \right) - p(rS)^T p(rS).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} F'(r) &= 2nr^{2n-1} p \left(\frac{S}{r} \right)^T p \left(\frac{S}{r} \right) + r^{2n} \left\{ -\frac{1}{r^2} p' \left(\frac{S}{r} \right)^T S^T p \left(\frac{S}{r} \right) - \frac{1}{r^2} p \left(\frac{S}{r} \right)^T S p' \left(\frac{S}{r} \right) \right\} \\ &\quad - p'(rS)^T S^T p(rS) - p(rS)^T p'(rS) S. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} F'(1) &= 2np(S)^T p(S) - p'(S)^T S^T p(S) - p(S)^T S p'(S) - p'(S)^T S^T p(S) - p(S)^T p'(S) S \\ &= 2np(S)^T p(S) - 2S^T p'(S)^T p(S) - 2p(S)^T p'(S) S. \end{aligned}$$

Soulignons que S commute avec tout polynôme en S , de même pour S^T mais : S et S^T ne commutent pas !.

25. En utilisant la question 4, on obtient

$$\begin{aligned} J(h) &= h_0(S)^T h_0(S) - h(S)^T h(S) \\ &= [\lambda np(S)^T - \lambda S^T p'(S)^T] [\lambda np(S) - \lambda S p'(S)] - p'(S)^T S^T S p'(S) \\ &= n^2 p(S)^T p(S) - np(S)^T S p'(S) - n S^T p'(S)^T p(S) + S^T p'(S)^T S p'(S) \\ &\quad - p'(S)^T S^T S^T S p'(S) \\ &= n^2 p(S)^T p(S) - np(S)^T p'(S) - np(S)^T p'(S) S - n S^T p'(S)^T p(S) \\ &= \frac{n}{2} F'(1). \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme $p = \lambda p_0$, on a $J(p) = F(1) = 0$ et donc,

$$\frac{n}{2(r-1)} F(1) = \frac{n}{2} \frac{F(r) - F(1)}{r-1} \xrightarrow{r \rightarrow 1} \frac{n}{2} F'(1).$$

Il en résulte immédiatement que

$$\frac{n}{2(r-1)} F(1) \underset{r \rightarrow 1}{=} J(h) + o(1).$$

26. Les questions 20 et 22 nous disent que $F(r)$ est inversible pour r dans un voisinage de 1^- et la question 21 nous assure que $J(h)$ est inversible. Par conséquent, 0 n'est pas une valeur propre de $J(h)$ ni de $F(r)$ lorsque r est dans voisinage de 1^- .

Notons $\lambda_1(r) \geq \dots \geq \lambda_k(r) > 0 > \lambda_{k+1}(r) \geq \dots \geq \lambda_n(r)$ la suite des valeurs propres de $U(r) = \frac{n}{2(r-1)} F(r)$ et $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ la suite des valeurs propres de $J(h)$. En munissant \mathbb{R}^n de la norme $\| \cdot \|_1$ et en utilisant le résultat admis dans l'énoncé, on voit que

$$\lambda_j(r) \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} \lambda_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

D'autre part, si $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $\lambda_j(r) > 0$ donc $\lambda_j \geq 0$ or $\lambda_j \neq 0$ donc $\lambda_j > 0$.

Si $j \in \llbracket k+1, n \rrbracket$, $\lambda_j(r) < 0$ donc $\lambda_j \leq 0$ or $\lambda_j \neq 0$ donc $\lambda_j < 0$.

On en déduit que :

$$\pi(U(r)) = \pi(J(h)), \quad r \rightarrow 1^-.$$

Ceci, combiné avec les résultats des questions 23 et 25 donne

$$(1) \quad n - \sigma(p) = \pi(J(h)).$$

Par la question 18, comme $J(h)$ est inversible, on a $\pi(J(h)) = \sigma(h)$ et puisque $h = Xp'$, $\sigma(h)$ est égal à $\sigma(p') + 1$ car 0 est une racine de h dans $] -1, 1[$. Par suite,

$$(2) \quad \pi(J(h)) = 1 + \sigma(p').$$

En combinant les résultats des questions 5 et 18, on obtient

$$(3) \quad \sigma(p') = \pi(J(p')).$$

Finalement, (1), (2) et (3) donnent

$$\sigma(p) = n - 1 - \pi(J(p')).$$

G. Méthode générale

27. Le polynôme f étant le plus grand diviseur commun de p et p_0 , il détecte les racines stables lorsqu'elles existent. Ainsi, si α est une racine stable de p de multiplicité $k_\alpha \in \mathbb{N}^*$ et que $\frac{1}{\alpha}$ est une racine de multiplicité k'_α , alors : $(X - \alpha)^{m_\alpha} \left(X - \frac{1}{\alpha}\right)^{m_\alpha}$ est un facteur de f où : $m_\alpha = \min(k_\alpha, k'_\alpha)$.

Par conséquent, g ne contient aucune racine stable de p . Il vient, par la question 20, que $J(g)$ est inversible et, par la question 18, on obtient : $\sigma(g) = \pi(J(g))$.

28. Si p n'admet pas de racine stable alors $f = 1$, dans ce cas, $p = g$ et on a : $\sigma(p) = \pi(J(p))$. Sinon, comme les racines de f sont, par construction, celles de p qui sont stables, on décompose f en des polynômes dont les racines sont stables et de multiplicité 1, que l'on appelle : g_1, \dots, g_l où $l \in \mathbb{N}^*$. Par suite, $f = g_1 \dots g_l$ et donc

$$p = g_1 \dots g_l g.$$

Par ailleurs, on a

$$\sigma(p) = \sigma(g) + \sum_{i=1}^l \sigma(g_i).$$

D'autre part, si $k \in \llbracket 1, l \rrbracket$, chaque g_k satisfait aux conditions de la partie **F**, donc

$$\sigma(g_k) = \deg(g_k) - 1 - \pi(J(g'_k)).$$

Soulignons enfin que

$$\sum_{i=1}^l \deg(g_i) = n - \deg(g).$$

En conclusion, on a

$$\sigma(p) = \pi(J(g)) + n - \deg(g) - l - \sum_{i=1}^l \pi(J(g'_i)).$$