

CONCOURS D'ADMISSION 1986

MATHÉMATIQUES

2ème ÉPREUVE

OPTION M

(Durée 4 heures)

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUES II - M

NOTA : 1° - Il est conseillé aux candidats de traiter les différentes parties du problème dans l'ordre de l'énoncé. Le cas échéant, ils pourront utiliser sans démonstration, à condition de l'indiquer clairement, les résultats donnés dans le texte qu'ils n'auront pu démontrer.

2° - La lettre i désigne le symbole des nombres complexes.

3° - La lettre e désigne la base des logarithmes népériens.

PARTIE PRELIMINAIRE

1° - Soit $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ une fraction rationnelle à coefficients complexes, les polynômes P et Q étant premiers entre eux. On suppose que le nombre complexe z_0 est pôle simple de f , c'est-à-dire que :

$$Q(z_0) = 0, \quad Q'(z_0) \neq 0.$$

Soit $\frac{A_0}{z - z_0}$ la partie de la décomposition de $f(z)$ en éléments simples relative au pôle z_0 . Montrer que :

$$A_0 = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

2° - Soient a et h deux réels quelconques, n un entier strictement positif.

Posons :

$$C(a, h) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + kh), \quad S(a, h) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin(a + kh).$$

En étudiant $[C(a, h) + i S(a, h)]$, déterminer des expressions simples de $C(a, h)$ et de $S(a, h)$; vérifier notamment que, lorsque $\sin \frac{h}{2} \neq 0$:

$$C(a, h) = \frac{\sin \frac{nh}{2} \cdot \cos [a + (n-1) \frac{h}{2}]}{\sin \frac{h}{2}}$$

$$S(a, h) = \frac{\sin \frac{nh}{2} \cdot \sin [a + (n-1) \frac{h}{2}]}{\sin \frac{h}{2}}$$

3° - Démontrer ensuite la formule (valable lorsque $\sin \frac{h}{2} \neq 0$) :

$$C(a, h) = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin \left(\frac{2n-1}{2} h + a \right)}{\sin \frac{h}{2}} + \cos a - \sin a \cotg \frac{h}{2} \right].$$

4° - En déduire une expression simple de : $T(a, h) = \sum_{k=0}^{n-1} k \sin(a + kh)$.

PARTIE I

On appelle n et s deux entiers tels que $n \geq 1$ et $0 \leq s \leq 2n - 2$. L'objet de cette partie est de calculer l'intégrale :

$$I(n, s) = \int_0^{+\infty} \frac{x^s dx}{x^{2n+1} + 1}.$$

1° - Vérifier la convergence de $I(n, s)$.

2° - Soit $f(z) = \frac{z^s}{z^{2n+1} + 1}$. Montrer que les pôles de f sont définis par la formule :

$$z_k = e^{\frac{\pi i}{2n} + \frac{k\pi i}{n}} \quad \text{l'entier } k \text{ vérifiant } -n \leq k \leq n-1$$

3° - On appelle A_k le coefficient de $\frac{1}{z - z_k}$ dans la décomposition en éléments simples de $f(z)$. Calculer A_k .

4° - En déduire la décomposition en éléments simples sur \mathbb{R} de $f(z)$, qu'on devra écrire sans utiliser le symbole i des nombres complexes.

5° - En déduire le calcul de $I(n, s)$. On devra pour cela utiliser les questions 2°) à 4°) de la partie préliminaire. Vérifier finalement que :

$$I(n, s) = \frac{B(n)}{\sin[\phi(n, s)]}$$

où $B(n)$ et $\phi(n, s)$ sont deux nombres réels tels que $B(n) > 0$ et $0 < \phi(n, s) < \pi$, que l'on exprimera simplement en fonction de n et de s .

PARTIE II

On pose ici, n et s étant deux entiers tels que $n \geq 1$ et $0 \leq s \leq 2n - 1$,

$$I_1(n, s) = \int_0^{+\infty} \frac{x^s dx}{x^{2n+1} + 1}.$$

1° - Vérifier la convergence de $I_1(n, s)$.

TOURNEZ S'IL VOUS PLAÎT

2° - Calculer $I_1(n, s)$ en utilisant la formule du I - 5°, ainsi qu'un changement de variable très simple.

3° - Soient s et m deux entiers tels que $m \geq 2$ et $0 < s \leq m - 2$. On pose :

$$J(m, s) = \int_0^{+\infty} \frac{x^s dx}{x^m + 1}.$$

Vérifier la convergence de $J(m, s)$, puis donner pour l'expression de $J(m, s)$ une formule valable quelle que soit la parité de m .

°°

PARTIE III

λ désigne ici un réel tel que $\lambda > 1$. On pose :

$$K(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda + 1}.$$

1° - Vérifier la convergence de $K(\lambda)$.

2° - Supposons que λ soit rationnel, c'est-à-dire qu'il existe un couple d'entiers

p, q tels que $1 \leq q < p$ et que $\lambda = \frac{p}{q}$. Calculer $K(\lambda)$ en fonction de λ en utilisant les résultats de la partie II.

3° - Dans ce qui suit, λ et λ' sont des réels, non nécessairement rationnels, tels que $1 < \lambda \leq \lambda'$. Posons :

$$U(\lambda) = \int_0^1 \frac{dx}{x^\lambda + 1}, \quad V(\lambda) = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda + 1}.$$

On a l'égalité évidente $K(\lambda) = U(\lambda) + V(\lambda)$.

a) Montrer que :

$$0 \leq U(\lambda') - U(\lambda) \leq \lambda' - \lambda, \\ \frac{1}{\lambda' - 1} - \frac{1}{\lambda - 1} \leq V(\lambda') - V(\lambda) \leq 0$$

b) En déduire la continuité des applications U et V de $]1, +\infty[$ dans \mathbb{R} .

c) A l'aide des résultats précédents, donner de $K(\lambda)$ une expression valable quel que soit λ élément de $]1, +\infty[$, que λ soit, ou non, rationnel.

PARTIE IV

Posons, λ et μ désignant deux réels tels que $\lambda > 0$ et $-1 < \mu < \lambda - 1$,

$$M(\lambda, \mu) = \int_0^{+\infty} \frac{x^\mu dx}{x^\lambda + 1}$$

1° - Vérifier la convergence de $M(\lambda, \mu)$.

2° - Calculer $M(\lambda, \mu)$ à l'aide des résultats de la partie III.

°°

PARTIE V

Soit n un entier strictement positif, et soient λ et μ deux réels tels que $\lambda > 0$ et $-1 < \mu < \lambda - 1$. Posons :

$$M_n(\lambda, \mu) = \int_0^{+\infty} \frac{x^\mu dx}{(x^\lambda + 1)^n} \quad [\text{on a donc } M_1(\lambda, \mu) = M(\lambda, \mu)].$$

1° - Vérifier la convergence de $M_n(\lambda, \mu)$.

2° - Former une relation de récurrence liant $M_n(\lambda, \mu)$ et $M_{n-1}(\lambda, \mu)$, en supposant $n \geq 2$.

3° - En déduire $M_n(\lambda, \mu)$ sous forme d'un produit.

4° - Montrer que si on pose :

$$a_n(\lambda, \mu) = n^{\frac{\mu+1}{\lambda}} M_n(\lambda, \mu),$$

la suite de terme général $a_n(\lambda, \mu)$ admet, lorsque $n \rightarrow +\infty$, λ et μ étant fixes, une limite finie, strictement positive. On ne cherchera pas à calculer explicitement cette limite.

5° - Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n(\lambda, \mu)$.

6° - Quelle est la nature de la série de terme général $M_n(\lambda, \mu)$, λ et μ étant toujours fixes ?