

SADIK Omar CPGE FES Corrigé du concours Mines ponts 2016

A. Une intégrale à paramètre

1) ψ est continue sur I , $\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{u}}$ et $\forall u \geq 1$, $0 \leq \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \leq e^{-u}$, donc ψ est intégrable sur I .

2) Si $x > 0$, alors l'application $u \mapsto \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}$ est continue sur I et $\forall u \in I, 0 \leq \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)} \leq \frac{1}{x} \psi(u)$ puisque ψ est intégrable sur I alors $u \mapsto \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}$ l'est aussi sur I , donc $F(x)$ existe, et $x \in D_F$.

Pour $x = 0$ alors $\frac{e^{-u}}{u\sqrt{u}} \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{u\sqrt{u}} = \frac{1}{u^{3/2}}$ donc $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u\sqrt{u}} du$ diverge c'est à dire $0 \notin D_F$.

Si $x < 0$, alors $u \mapsto \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}$ est continue sur $]0, -x[\cup]-x, +\infty[$, mais

$\lim_{u \rightarrow -x} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)} = \infty$, donc l'application $u \mapsto \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}$ n'est pas continue par morceaux sur I donc $-x \notin D_F$. Conséquence : les valeurs de x pour lesquelles $F(x)$ existe sont $]0, +\infty[$.

3) $\forall x \in I, u \mapsto \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}$ est continue et intégrable sur I .

$\forall u \in I, x \mapsto \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I , et $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)} \right) = \frac{-e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)^2}$.

$\forall x \in I, u \mapsto \frac{-e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)^2}$ est continue sur I .

$\forall a > 0, \forall u \in I, \forall x \in [a, +\infty[$, $\left| \frac{-e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)^2} \right| \leq \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+a)^2}$, comme $\forall u \in$

$I, 0 \leq \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+a)^2} \leq \frac{1}{a^2} \psi(u)$ et que ψ est intégrable sur I , alors F est de classe \mathcal{C}^1 sur I .

De plus $\forall x \in I, F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)^2} du$.

4) Avec une intégration par parties $\frac{1}{2\sqrt{u}} = (\sqrt{u})'$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}F(x) &= \left[\sqrt{u} \frac{e^{-u}}{(u+x)} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \sqrt{u} \frac{\partial}{\partial u} \frac{e^{-u}}{(u+x)} du \\
&= - \int_0^{+\infty} \sqrt{u} \frac{\partial}{\partial u} \frac{e^{-u}}{(u+x)} du \\
&= \int_0^{+\infty} \sqrt{u} \frac{e^{-u}}{u+x} du + \int_0^{+\infty} \sqrt{u} \frac{e^{-u}}{(u+x)^2} du \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{ue^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)} du + \int_0^{+\infty} \frac{ue^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)^2} du
\end{aligned}$$

Évidemment le crochet est nul et les deux intégrales convergent.
En remarquant que $u = u + x - x$, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}F(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du - x \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)} du + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)} du - x \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)^2} du \\
&= K - xF(x) + F(x) + xF'(x)
\end{aligned}$$

$$\text{Donc } xF'(x) - (x - \frac{1}{2})F(x) = -K.$$

5) G est \mathcal{C}^1 sur I et $\forall x \in I$, $G'(x) = \sqrt{x}e^{-x}F'(x) + (\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x})e^{-x}F(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}(xF'(x) - (x - \frac{1}{2})F(x)) = -K \frac{e^{-x}}{x}$

Alors $\exists C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in I$, $G(x) = C - K \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$.

6) De la question 5), $\lim_{x \rightarrow 0} G(x) = C$, de l'expression de F on a $\forall x \in I$, $0 \leq F(x) \leq \frac{1}{x}K$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0$, et de la question précédente $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = C - K^2$, alors $C = K^2$.

D'autre part :

$$\begin{aligned}
F(x) &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2 + x} dt \quad (\sqrt{u} = t) \\
&= \frac{2\sqrt{x}}{x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xv^2}}{v^2 + 1} dv \quad (t = \sqrt{x}v)
\end{aligned}$$

Si $(x_n)_n$ est une suite d'élément de \mathbb{R}^+ qui tend vers 0, par le théorème de la convergence dominée $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x_n v^2}}{v^2 + 1} dv = \int_0^{+\infty} \frac{dv}{v^2 + 1} dv = \frac{\pi}{2}$,

alors $\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xv^2}}{v^2 + 1} dv = \frac{\pi}{2}$:

En effet si on pose $f_n(v) = \frac{e^{-xnv^2}}{v^2+1}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue sur I .

(f_n) converge simplement vers l'application $v \mapsto \frac{1}{v^2+1}$ qui est aussi continue sur I .

$\forall n \in \mathbb{N}, |f_n(v)| \leq \frac{1}{v^2+1}$ et l'application $v \mapsto \frac{1}{v^2+1}$ est continue et intégrable sur I .

par la caractérisation séquentielle de la limite, $F(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\pi}{\sqrt{x}}$, donc $G(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \pi$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} G(x) = \pi$.

Alors $K = \sqrt{\pi}$, car $K > 0$.

B. Étude de deux séries de fonctions

7) f est la composée des applications $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ et de $x \mapsto e^{-x}$, et g est la composée des applications $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}x^n$ et de $x \mapsto e^{-x}$.

Les séries entières $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ et $\sum_{n \geq 0} \sqrt{n}x^n$ ont un rayon de convergence 1, donc continues sur $] -1, 1[$, et $\forall x \in I, e^{-x} \in] -1, 1[$, alors f et g sont continues sur I .

8) L'application $u \mapsto \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}$ est décroissante et intégrable sur I , donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_n^{n+1} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}} du \leq \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}} \leq \int_{n-1}^n \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}} du.$$

Alors $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}} du \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{n-1}^n \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}} du$, alors l'inégalité demandée.

$$\text{Or } \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}. \text{ Question 6)}$$

$$\text{et } \int_1^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\sqrt{\pi} - \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}.$$

$$\text{Donc } f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}.$$

9) L'application $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est décroissante sur I donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{\sqrt{u}} du \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{\sqrt{u}} du - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

La série de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ est convergente, donc la série de

terme général $\int_n^{n+1} \frac{1}{\sqrt{u}} du - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ est convergente, donc sa suite des

sommes partielles est convergente, alors $\left(\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{u}} du - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right)_{n \geq 2}$

est convergente d'où la convergence de $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \right)_{n \geq 1}$

- 10) Soit $x > 0$. Les séries $\sum_{n \geq 0} e^{-nx}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$ convergent absolument, donc la série produit de Cauchy de ses deux séries converge absolument, et on a $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n$, où $\forall n \in \mathbb{N}^*, c_n = \sum_{k=1}^n \frac{e^{-kx}}{\sqrt{k}} e^{-(n-k)x} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} e^{-nx}$.

Alors la série demandée est convergente et on a $h(x) = \frac{f(x)}{1 - e^{-x}}$.

- 11) D'après la question 9), $h(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{x\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{\pi}}{x^{3/2}}$.

Or $2g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2\sqrt{n}e^{-nx} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \right) e^{-nx} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \right) e^{-nx}$.

Or la suite $\left(2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \right)_{n \geq 1}$ est convergente, donc bornée par une constante

M , alors $\forall x \in I, \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \left(2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \right) e^{-nx} \right| \leq \frac{Me^{-x}}{1 - e^{-x}}$, or $x^{3/2} \frac{Me^{-x}}{1 - e^{-x}} \rightarrow 0$

quand $x \rightarrow 0$, alors $g(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}}$.

C. Séries de fonctions associées à des ensembles d'entiers

- 12) Si A est fini, alors $I_A = \mathbb{R}^+$.

Si A est une partie infini de \mathbb{N} , il existe une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow A$ pour sa construction on peut poser $\varphi(0) = \min A$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \varphi(n) = \min A \setminus \{\varphi(0), \dots, \varphi(n-1)\}$, posons alors $\forall n \in \mathbb{N}; b_n = a_{\varphi(n)} = 1$, car $\varphi(n) \in A$.

Si $x > 0$, la série $\sum_{n \geq 0} e^{-nx}$ converge donc $\sum_{n \geq 0} a_n e^{-nx}$ car la suite $(a_n)_n$ est bornée.

Si $x = 0$, la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ est divergente, car $(a_n)_n$ possède une sous suite qui ne tend pas vers 0.

Donc $I_A =]0, +\infty[$.

- 13) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $A(n) = \{k \in A \mid k \leq n\}$ donc $\text{Card}(A(n)) = \sum_{k=0}^n a_k$, les deux séries $\sum_{n \geq 0} a_n e^{-nx}$ et $\sum_{n \geq 0} e^{-nx}$ convergent car $A \in S$ et $x > 0$ et ce mode de convergence est absolue, donc la série produit de Cauchy de ces deux séries converge absolument donc convergente c'est à dire la série $\sum_{n \geq 0} \text{Card}(A(n)) e^{-nx}$ converge et on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \text{Card}(A(n)) e^{-nx} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} = \frac{f_A(x)}{1 - e^{-x}}$.

- 14) On a $A_1(n) = \{k \in \mathbb{N}^* \mid k^2 \leq n\} = \{k \in \mathbb{N}^* \mid 1 \leq k \leq \sqrt{n}\} = \{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq [\sqrt{n}]\}$, donc :

$$\text{Card}(A_1(n)) = [\sqrt{n}] \text{ alors de la question 13) : } \frac{f_{A_1}(x)}{1 - e^{-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \text{Card}(A_1(n)) e^{-nx} = \sum_{n=0}^{+\infty} [\sqrt{n}] e^{-nx}.$$

$$\text{Or } \forall n \in \mathbb{N}, [\sqrt{n}] \leq \sqrt{n} < [\sqrt{n}] + 1, \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n} e^{-nx} - \frac{f_{A_1}(x)}{1 - e^{-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (\sqrt{n} - [\sqrt{n}]) e^{-nx}$$

$$\text{Donc } 0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n} e^{-nx} - \frac{f_{A_1}(x)}{1 - e^{-x}} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1 - e^{-x}}.$$

$$\text{Alors } 0 \leq g(x) - \frac{f_{A_1}(x)}{1 - e^{-x}} \leq \frac{1}{1 - e^{-x}}.$$

$$\text{Alors } g(x) - \frac{1}{1 - e^{-x}} \leq \frac{f_{A_1}(x)}{1 - e^{-x}} \leq g(x) \text{ qui s'écrit aussi } (1 - e^{-x})g(x) - 1 \leq f_{A_1}(x) \leq (1 - e^{-x})g(x), \text{ de la question 14), } f_{A_1}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}.$$

$$\text{Alors } x f_{A_1}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\sqrt{\pi x}}{2}, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow 0} x f_{A_1}(x) = 0 \text{ càd } A_1 \in S \text{ et } \phi(A_1) = 0.$$

- 15) $v(n) = \text{Card}\{(p, q) \in \mathbb{N}^2 \mid p^2 + q^2 = n\} = \text{Card}\{(p, q) \in A_1^2 \mid p + q = n\} = \sum_{p+q=n} a_p a_q$, car $a_p a_q = 1 \iff (p, q) \in A_1^2$.

$$\text{Donc } v(n) = \sum_{i=0}^n a_i a_{n-i} \text{ et } (f_{A_1}(x))^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k e^{-kx} a_{n-k} e^{-(n-k)x} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} v(n) e^{-nx},$$

alors la convergence de la série donnée et l'égalité.

On a $A_2 = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists (p, q) \in \mathbb{N}^2, p^2 + q^2 = n\}$ et $v(n) = \text{Card} A_2$

Toujours d'après la question 13)

$$\begin{aligned}
 f_{A_2}(x) &= (1 - e^{-x}) \sum_{n=0}^{+\infty} \text{Card}(A_2(n)) e^{-nx} \\
 &= (1 - e^{-x}) \sum_{n=0}^{+\infty} v(n) e^{-nx} \\
 &= (1 - e^{-x}) (f_{A_1}(x))^2 \leq (f_{A_1}(x))^2
 \end{aligned}$$

Alors $0 \leq x f_{A_2}(x) \leq x (f_{A_1}(x))^2$, or $\lim_{x \rightarrow 0} x (f_{A_1}(x))^2 = \frac{\pi}{4}$, donc :

$$\phi(A_2) = \lim_{x \rightarrow 0} x f_{A_2}(x) \leq \frac{\pi}{4}$$

D. Un théorème taubérien

- 16) Si ψ est un élément de E alors elle est bornée sur $[0, 1]$, $\exists M > 0, \forall x \in [0, 1], |\psi(x)| \leq M$, donc $\forall x \in]0, +\infty[, |\alpha_n e^{-nx} \psi(e^{-nx})| \leq M \alpha_n e^{-nx}$, et la série $\sum_{n \geq 0} \alpha_n e^{-nx}$ est convergente, par comparaison la série $\sum_{n \geq 0} \alpha_n e^{-nx} \psi(e^{-nx})$ est convergente, alors $L(\psi)$ est bien définie.

Si $\psi_1, \psi_2 \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\forall x \in]0, +\infty[, (L(\psi_1 + \lambda \psi_2))(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx} (\psi_1 +$

$$\lambda \psi_2)(e^{-nx}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx} \psi_1(e^{-nx}) + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx} \psi_2(e^{-nx}) = (L(\psi_1))(x) + \lambda (L(\psi_2))(x)$$

car les deux séries convergent.

Donc $(L(\psi_1 + \lambda \psi_2)) = (L(\psi_1)) + \lambda (L(\psi_2))$.

Si on suppose que $\psi_1 \leq \psi_2$, alors $\forall x \in]0, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \alpha_n e^{-nx} \psi_1(e^{-nx}) \leq \alpha_n e^{-nx} \psi_2(e^{-nx})$, donc $L(\psi_1) \leq L(\psi_2)$.

- 17) On a $E_1 \subset E$, la fonction nulle est un élément de E_1 qui est donc non vide.

Si $\psi_1, \psi_2 \in E_1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, comme $\forall x \in]0, +\infty[, x(L(\psi_1 + \lambda \psi_2))(x) = x(L(\psi_1))(x) + \lambda x(L(\psi_2))(x)$, en passant à la limite en 0, l'application $x \mapsto x(L(\psi_1 + \lambda \psi_2))(x)$ possède une limite en 0 et $\Delta(\psi_1 + \lambda \psi_2) = \Delta(\psi_1) + \lambda \Delta(\psi_2)$.

Soit $\psi \in E_1$, alors $\forall x \in I, |x(L(\psi))(x)| \leq x \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx} \|\psi\|_\infty$, par passage à la limite on obtient : $|\Delta(\psi)| \leq \ell \|\psi\|_\infty$, donc Δ est continue sur $(E_1, \|\cdot\|_\infty)$

- 18) Tout d'abord $e_p \in E, x \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx} e^{-pxn} = \frac{1}{p+1} \left(x(p+1) \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx(p+1)} \right) \rightarrow \frac{\ell}{p+1}$ quand $x \rightarrow 0$ car $(p+1)x > 0$, donc $e_p \in E_1$ et $\Delta(e_p) = \frac{\ell}{p+1} = \ell \int_0^1 e_p(t) dt$.

Δ est linéaire sur E_1 , donc $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\Delta(P) = \ell \int_0^1 P(t) dt$.

Soit $\psi \in E_0$, d'après le théorème de Weierstrass il existe une fonction polynômiale $(P_N)_N$ qui converge uniformément vers ψ sur $[0, 1]$.

Alors $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 P_N(t) dt = \int_0^1 \psi(t) dt$. On va essayer de montrer que $\Delta(\psi)$

existe et que $\Delta(\psi) = \ell \int_0^1 \psi(t) dt$.

Remarquons que : $\ell \int_0^1 \psi(t) dt = \lim_{N \rightarrow +\infty} \ell \int_0^1 P_N(t) dt = \lim_{N \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow 0} x \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx} P_N(e^{-nx})$

Pour cela posons $f_N(x) = x \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx} P_N(e^{-nx})$ et $f(x) = x \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx} \psi(e^{-nx})$.

Soit $x \in [0, 1]$; $N \in \mathbb{N}$, $|f_N(x) - f(x)| \leq x \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx} |P_N(e^{-nx}) - \psi(e^{-nx})| \leq$

$$\|P_N - \psi\|_{\infty} x \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx}$$

Soit $[a, b] \subset [0, 1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [a, b]$, $0 \leq \alpha_n e^{-nx} \leq \alpha_n e^{-na}$ et la série

$\sum_{n \geq 0} \alpha_n e^{-na}$ est convergente par hypothèse, donc l'application $x \mapsto x \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx}$

est continue sur $]0, 1]$ et possède une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en 0 donc bornée alors $\exists M > 0$ telle que $\forall x \in [0, 1]$; $|f_N(x) - f(x)| \leq M \|P_N - \psi\|_{\infty}$, alors $(f_N)_N$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers l'application f .

D'autre part $\lim_{x \rightarrow 0} f_N(x) = \Delta(P_N)$.

Par application du théorème de la double limite, la suite $(\Delta(P_N))_N$ est convergente et on a : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} f_N(x)$, alors $\Delta(\psi)$ existe et $\Delta(\psi) =$

$$\ell \int_0^1 \psi(t) dt \text{ et on } E_0 \subset E_1.$$

19) g_- est continue sur $[0, a - \varepsilon[$ et sur $]a - \varepsilon, a[$ et sur $]a, 1]$.

$$\lim_{x \rightarrow (a-\varepsilon)^+} g_-(x) = \lim_{x \rightarrow (a-\varepsilon)^-} g_-(x) = 1 = g_-(a - \varepsilon). \text{ de même } \lim_{x \rightarrow (a)^+} g_-(x) = \lim_{x \rightarrow (a)^-} g_-(x) = 0 = g_-(a).$$

De même pour g_+ .

Par application de la question précédente et calcul simple, $\Delta(g_-) = \ell \int_0^1 g_-(t) dt =$

$$\ell(a - \frac{\varepsilon}{2}) \text{ et } \Delta(g_+) = \ell(a + \frac{\varepsilon}{2}).$$

On remarque que $g_- \leq 1_{[0, a]} \leq g_+$. par application de la question 16), $x(L(g_-))(x) \leq x(L(1_{[0, a]}))(x) \leq x(L(g_+))(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x(L(g_-))(x) = \ell(a - \frac{\varepsilon}{2}) \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} x(L(g_+))(x) = \ell(a + \frac{\varepsilon}{2}), \text{ donc } \exists \alpha > 0, x \in$$

$]0, \alpha] \implies \ell(a - \frac{3\varepsilon}{2}) \leq x(L(g_-))(x)$ et $x(L(g_+))(x) \leq \ell(a + \frac{3\varepsilon}{2})$. Alors $x \in]0, \alpha] \implies \ell(a - \frac{3\varepsilon}{2}) \leq x(L(1_{[0,a]}))(x) \leq \ell(a + \frac{3\varepsilon}{2})$ et c'est exactement la définition de $\lim_{x \rightarrow 0} x(L(1_{[0,a]}))(x) = \ell a$.

Alors $1_{[0,a]} \in E_1$ et $\Delta(1_{[0,a]}) = \ell$. par la même méthode $1_{[0,a[} \in E_1$. Puisque $1_{[a,b]} = 1_{[0,b]} - 1_{[0,a[}$, alors $1_{[a,b]} \in E_1$, de plus $\Delta(1_{[a,b]}) = \ell(b - a)$ et $1_{\{a\}} = 1_{[a,a]} \in E_1$. de même $1_{]a,b]} = 1_{[0,b]} - 1_{[0,a]} \in E_1$, de plus $\Delta(1_{]a,b]}) = \ell(b - a)$. De même $1_{]a,b[} = 1_{[0,b[} - 1_{[0,a]} \in E_1$ et $\Delta(1_{]a,b[}) = \ell(b - a)$.

On a $E_1 \subset E$, soit $u \in E$, alors $\exists \psi \in E_0$ et ϕ en escalier tels que $u = \psi + \phi$,

\exists une subdivision $(a_j)_{0 \leq j \leq N} \exists (\lambda_j)_{0 \leq j \leq N-1}$ tel que $\phi = \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_j 1_{]a_j, a_{j+1}[}$,

par application de la question 18), $\psi \in E_1$, et $\Delta(\psi) = \ell \int_0^1 \psi(t) dt$, et on E_1 est un sous espace vectoriel de E , donc $\phi \in E_1$, donc $u \in E_1$, de plus

$$\Delta(u) = \Delta(\psi) + \Delta(\phi) = \ell \int_0^1 \psi(t) dt + \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_j \Delta(1_{]a_j, a_{j+1}[}) = \ell \int_0^1 \psi(t) dt +$$

$$\ell \left(\sum_{j=0}^{N-1} \lambda_j (a_{j+1} - a_j) \right) = \ell \int_0^1 \psi(t) dt + \ell \int_0^1 \phi(t) dt = \ell \int_0^1 (\psi + \phi)(t) dt = \ell \int_0^1 u(t) dt.$$

Donc $E_1 = E$ et $\forall u \in E$, $\Delta(u) = \ell \int_0^1 u(t) dt$.

20) Soit $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{e} \leq e^{-n/N} \leq 1 \iff 0 \leq n \leq N$.

ψ est continue sur $]0, \frac{1}{e}[$ et sur $]\frac{1}{e}, 1]$ qui admet des limites finies en $\frac{1}{e}$

à gauche et à droite, donc $\psi \in E$. Alors $(L(\psi))\left(\frac{1}{N}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-\frac{n}{N}} \psi\left(\frac{1}{N}\right) =$

$$\sum_{n=0}^N \alpha_n e^{-\frac{n}{N}} e^{\frac{n}{N}} = \sum_{n=0}^N \alpha_n. \text{ Donc } \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N \alpha_n = \frac{1}{N} (L(\psi))\left(\frac{1}{N}\right).$$

D'après la question précédente $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N \alpha_n = \ell \int_0^1 \psi(t) dt = \ell$.

21) Si $A \in S$, alors $\text{Card}A(n) = \sum_{k=0}^n a_k$ c'est la question 13), donc $\frac{1}{n} \text{Card}A(n) =$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n a_k. \text{ Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Card}A(n) = \lim_{x \rightarrow 0} x f_A(x) = \phi(A).$$

Par application de la question 15) et 14) :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{+\infty} v(n) e^{-nx} = \lim_{x \rightarrow 0} x f_{A_1}(x)^2 = \frac{\pi}{4}.$$

Pour vos remarques ...

sadikoulmeki@yahoo.fr