Michel Carré, lycée Joffre, Montpellier

Centrale 2010, filière PSI, seconde épreuve

• Partie I

A.1) Les similitudes non nulles sont sont les λf, avec $(\lambda, f) \in \mathbb{R}^* \times \mathrm{O}(E)$; ce sont donc des automorphismes de E.
$\mathrm{Sim}(E)\setminus\{0\}$ n'est pas vide car il possède par exemple Id_E.
Soient $u = \lambda f$ et $v = \mu g$ dans $\mathrm{Sim}(E)\setminus\{0\}$, avec $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{R}^*)^2$ et $(f, g) \in \mathrm{O}(E)^2$. $uv^{-1} = \dfrac{\lambda}{\mu} fg^{-1}$, avec $\dfrac{\lambda}{\mu} \in \mathbb{R}^*$ et $fg^{-1} \in \mathrm{O}(E)$, puisque $\mathrm{O}(E)$ est un sous-groupe de $\big(\mathrm{GL}(E), \circ\big)$, donc $uv^{-1} \in \mathrm{Sim}(E)\setminus\{0\}$.

A.2) i) $\Longrightarrow$ ii) : Avec la notation du A.1), $h^*h = \lambda^2 f^*f = \lambda^2 \,\mathrm{Id}_E$.
ii) $\Longrightarrow$ iii) : Le cas $h = 0$ est trivial. Pour $h \neq 0$, la matrice M de h dans une base orthonormale est inversible et vérifie ${}^tMM = \alpha I_n$ avec $\alpha > 0$ car on sait que ${}^tMM$ est définie positive. La matrice $\dfrac{M}{\sqrt{\alpha}}$ est donc orthogonale.
iii) $\Longrightarrow$ i) : D'après sa matrice, h est colinéaire à un endomorphisme orthogonal, *i.e.* h est une similitude.

B.1) $\langle x, f(x)\rangle = \langle f^*(x), x\rangle = -\langle f(x), x\rangle$, d'où le résultat.

B.2) On sait que $S^\perp$ est stable par f^*. Comme $f^* = -f$, $S^\perp$ est stable par f.
L'antisymétrie de f se traduit par : $\forall (x, y) \in E^2,\ \langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle$. Cette égalité est en particulier vérifiée pour $(x, y) \in S^2$ et pour $(x, y) \in (S^\perp)^2$, donc les endomorphismes de S et $S^\perp$ induits par f sont antisymétriques.

B.3) $\langle f(x), g(x)\rangle = -\langle gf(x), x\rangle = \langle fg(x), x\rangle = -\langle g(x), f(x)\rangle$, d'où le résultat.

B.4) $f^2 = (-f^*)f = -(f^*f) = -\mathrm{Id}_E$.

C.1) $\mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E)$ est une droite vectorielle de $\mathscr{L}(E)$ incluse dans $\mathrm{Sim}(E)$, donc $d_n \geqslant 1$.

C.2) Si $f \in \mathrm{Ker}\,\Phi$, $\mathrm{Ker}\, f \neq \{0\}$, donc $f = 0$ car f est une similitude et toute similitude non nulle est bijective.
Ainsi, Φ est injective, ce qui implique que $\dim V \leqslant \dim E = n$.

C.3) L'ensemble W des matrices $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est un sous-e.v. de dimension 2 de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et c'est aussi l'ensemble des matrices colinéaires à une matrice de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, donc W est formé de matrices de similitudes.
Fixons maintenant une base orthonormale $\mathscr{B}$ de E. L'ensemble V des endomorphismes de E dont la matrice dans $\mathscr{B}$ appartient à W est un sous-e.v. de dimension 2 de $\mathscr{L}(E)$ inclus dans $\mathrm{Sim}(E)$. Cela montre que $d_2 \geqslant 2$ puis, compte tenu de C.2), que $d_2 = 2$.

C.4) $f + \lambda g = (fg^{-1} + \lambda\,\mathrm{Id}_E)g$. Comme n est impair, fg^{-1} possède au moins une valeur propre (car son polynôme caractéristique a au moins une racine réelle) ; si λ est l'opposé d'une telle valeur propre, $fg^{-1} + \lambda\,\mathrm{Id}_E$ est non bijectif, ainsi que $f + \lambda g$.
Par l'absurde, supposons qu'il existe un sous-e.v. V de $\mathscr{L}(E)$ inclus dans $\mathrm{Sim}(E)$ tel que $\dim V \geqslant 2$.
Soient f et g deux éléments de V linéairement indépendants. f et g sont des similitudes non nulles, et sont donc bijectives ; d'après ce qui précède, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f + \lambda g$ est non bijectif, ce qui est absurde car cet endomorphisme appartient par construction à $V\setminus\{0\}$, donc est une similitude non nulle.
On en déduit que $d_n \leqslant 1$ puis que $d_n = 1$ compte tenu de C.1).

C.5) Fixons $f_0 \in V\setminus\{0\}$. f_0 est bijectif et d'après A.1), pour toute $f \in V$, $f_0^{-1}f \in \mathrm{Sim}(E)$ (le cas $f = 0$ est trivial).
L'application $\Psi : f \longmapsto f_0^{-1}f$ est un automorphisme d'e.v. de $\mathscr{L}(E)$, elle transforme donc V en un sous-e.v. W de même dimension que V. D'après ce qui précède, W est inclus dans $\mathrm{Sim}(E)$; enfin, $\mathrm{Id}_E = \Psi(f_0) \in W$.

D.1) $\mathrm{Id}_E + f_i \in V \subset \mathrm{Sim}(E)$ donc d'après A.2), $(\mathrm{Id}_E + f_i)^*(\mathrm{Id}_E + f_i)$ est colinéaire à Id_E, de même que $f_i^* f_i$.
En développant, on obtient que $f_i + f_i^*$ est colinéaire à Id_E.

D.2) Soient $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et $g_i = f_i + \lambda_i \operatorname{Id}_E$.

$g_i + g_i^* = f_i + f_i^* + 2\lambda_i \operatorname{Id}_E$; on peut donc, d'après D.1), choisir λ_i de sorte que $g_i + g_i^* = 0$.

Pour ce choix des λ_i, les g_i sont antisymétriques et par construction $(\operatorname{Id}_E, g_1, \ldots, g_{d-1})$ est encore une base de V.

D.3) a) Si g est une similitude antisymétrique, $g^2 = -g^* g$ est colinéaire à Id_E. Cela s'applique à g_i, g_j et $g_i + g_j$ (car $g_i + g_j \in V \subset \operatorname{Sim}(E)$). Mais $(g_i + g_j)^2 = g_i^2 + g_j^2 + g_i g_j + g_j g_i$, donc $g_i g_j + g_j g_i$ est colinéaire à Id_E.

b) Soient A et B les matrices de f et g dans une base orthonormale fixée de E. $\operatorname{tr}(f^* g) = \operatorname{tr}({}^t\!AB) = (A \mid B)$, où $(\cdot \mid \cdot)$ est le produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On en déduit aussitôt que $(f, g) \longmapsto \operatorname{tr}(f^* g)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{L}(E)$.

c) Les h_i sont antisymétriques comme combinaisons linéaires d'endomorphismes antisymétriques.

Le a) s'applique aussi bien aux h_i qu'aux g_i donc $h_i h_j + h_j h_i$ est colinéaire à Id_E.

Pour $i \neq j$, $\operatorname{tr}(h_i h_j + h_j h_j) = 2 \operatorname{tr}(h_i h_j) = -2 \operatorname{tr}(h_i^* h_j) = -2(h_i \mid h_j) = 0$, et par conséquent $h_i h_j + h_j h_i = 0$.

Les h_i sont des similitudes non nulles, donc en multipliant chacun d'eux par un réel non nul convenable, on obtient une nouvelle base de $\operatorname{Vect}(g_1, \ldots, g_{d-1})$, formée d'automorphismes orthogonaux antisymétriques qui anti-commutent deux à deux.

D.4) Posons $V = \operatorname{Vect}(\operatorname{Id}_E, h_1, \ldots, h_{d-1})$. V est un sous-e.v. de $\mathscr{L}(E)$.

Montrons d'abord que $\dim V = d$, et pour cela que $(\operatorname{Id}_E, h_1, \ldots, h_{d-1})$ est libre.

Soient $\alpha_0, \ldots, \alpha_{d-1}$ des réels tels que $\alpha_0 \operatorname{Id}_E + \sum_{k=1}^{d-1} \alpha_k h_k = 0$. On fixe $i \in [\![1,\, d-1]\!]$, on compose à droite et à gauche par h_i et on ajoute membre à membre les deux égalités obtenues ; il reste $2\alpha_0 h_i + 2\alpha_i h_i^2 = 0$, d'où $\alpha_0 h_i - \alpha_i \operatorname{Id}_E = 0$ par application de **I.**B.4).

h_i et Id_E étant par construction non colinéaires, on en déduit $\alpha_0 = \alpha_i = 0$, et cela pour tout i.

Remarque : une méthode plus rapide consiste à montrer que la famille $(\operatorname{Id}_E, h_1, \ldots, h_{d-1})$ (dont les éléments sont évidemment tous non nuls) est orthogonale pour le produit scalaire défini au D.3)b). En effet :

- pour tout $i \in [\![1,\, d-1]\!]$, $(\operatorname{Id}_E \mid h_i) = \operatorname{tr}(h_i) = \operatorname{tr}(h_i^*) = \operatorname{tr}(-h_i) = -(\operatorname{Id}_E \mid h_i)$, donc $(\operatorname{Id}_E \mid h_i) = 0$.
- pour i et j distincts dans $[\![1,\, d-1]\!]$, $2(h_i \mid h_j) = \operatorname{tr}(h_i^* h_j) + \operatorname{tr}(h_j^* h_i) = -\operatorname{tr}(h_i h_j + h_j h_i) = 0$.

Montrons maintenant que V est inclus dans $\operatorname{Sim}(E)$. Soit $f = \alpha_0 \operatorname{Id}_E + \sum_{i=1}^{d-1} \alpha_i h_i$ un élément de V.

$f^* f = \Big(\alpha_0 \operatorname{Id}_E - \sum_{i=1}^{d-1} \alpha_i h_i\Big)\Big(\alpha_0 \operatorname{Id}_E + \sum_{i=1}^{d-1} \alpha_i h_i\Big) = \alpha_0^2 \operatorname{Id}_E - \Big(\sum_{i=1}^{d-1} \alpha_i h_i\Big)^2$. Comme $h_i h_j + h_j h_i = 0$ pour $i \neq j$, les doubles produits s'éliminent dans le développement du carré et il vient, en utilisant de nouveau **I.**B.4) :

$f^* f = \alpha_0^2 \operatorname{Id}_E - \sum_{i=1}^{d-1} \alpha_i^2 h_i^2 = \Big(\sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i^2\Big) \operatorname{Id}_E$. D'après **I.**A.2), cela montre que f est une similitude.

• Partie II

A.1) *Remarque* : l'hypothèse d'imparité de p n'intervient pas dans cette question.

a) Les vecteurs $x, f_1(x), f_2(x), f_1 f_2(x)$ sont unitaires puisque x l'est et que f_1 et f_2 conservent la norme.

I.B.1) donne $\langle x, f_1(x)\rangle = \langle x, f_2(x) = \langle f_2(x), f_1 f_2(x)\rangle = 0$ et $\langle f_1(x), f_1 f_2(x)\rangle = -\langle f_1(x), f_2 f_1(x)\rangle = 0$.

I.B.3) donne $\langle f_1(x), f_2(x)\rangle = 0$, d'où on déduit, par antisymétrie de f_1, $\langle x, f_1 f_2(x)\rangle = -\langle f_1(x), f_2(x)\rangle = 0$.

$\big(x, f_1(x), f_2(x), f_1 f_2(x)\big)$ est donc bien une famille orthonormale.

Ensuite, $f_1\langle S\rangle = \operatorname{Vect}\big(f_1(x), f_1^2(x), f_1 f_2(x), f_1^2 f_2(x)\big) = \operatorname{Vect}\big(f_1(x), -x, f_1 f_2(x), -f_2(x)\big) = S$ (*cf* **I.**B.4)).

Comme $f_2 f_1 = -f_1 f_2$, on voit de même que S est stable (et même invariant) par f_2.

b) *Remarque* : l'énoncé suppose ici implicitement que $n \geqslant 6$.

D'après **I.**B.2), $S^\perp$ est aussi stable par f_1 et f_2 et les endomorphismes de S induits par f_1 et f_2 sont antisymétriques ; de façon évidente, ils sont aussi orthogonaux et ils anti-commutent. Comme $\dim(S^\perp) = n - 4$, l'équivalence qui conclut le **I.**, appliquée dans $S^\perp$ avec $d = 3$, donne $d_{n-4} \geqslant 3$.

A.2) Commençons par remarquer que pour n pair, $d_n \geqslant 2$. En effet, en posant $n = 2p$, on constate que la matrice $J_n = \begin{pmatrix} O_p & -I_p \\ I_p & O_p \end{pmatrix}$ est orthogonale et antisymétrique de taille n, donc tout endomorphisme de E représenté par J_n en base orthonormale est orthogonal et antisymétrique, d'où le résultat d'après la conclusion du **I.** avec $d = 2$.

Il s'agit maintenant de montrer que pour tout $q \in \mathbb{N}$, $d_{4q+2} = 2$ (poser $p = 2q + 1$).

Pour $q = 0$ c'est le résultat du **I.**C.3)

Soient $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $d_{4q-2} = 2$ et E un e.v. eulidien de dimension $4q + 2$.
Si on avait $d_{4q+2} \geqslant 3$, d'après la conclusion du **I.**, il existerait deux endomorphismes f_1 et f_2 de E qui vérifient les hypothèses de A.1), d'où $d_{4q-2} = d_{(4q+2)-4} \geqslant 3$, ce qui contredit l'hypothèse de récurrence.
On en déduit que $d_{4q+2} \leqslant 2$ puis que $d_{4q+2} = 2$ d'après la remarque préliminaire.

B.1) a) On montre comme au A.1)a) que B est une famille orthonormale ; comme $\dim E = 4$, il s'agit ici d'une base orthonormale. L'existence (et l'unicité) de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ en résulte aussitôt.

D'après **I.**B.1) et **I.**B.3), $\langle x, f_3(x)\rangle = \langle f_1(x), f_3(x)\rangle = \langle f_2(x), f_3(x)\rangle = 0$, c'est-à-dire $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
La conservation de la norme par f_1, f_2 et f_3 donne ensuire $\delta = \pm 1$.

b) En appliquant f_1, f_2 et $f_1 f_2$ à l'égalité $f_3(x) = \delta f_1 f_2(x)$, on obtient :

$f_3 f_1(x) = -f_1 f_3(x) = -\delta f_1 f_1 f_2(x) = \delta f_1 f_2 f_1(x)$.
$f_3 f_2(x) = -f_2 f_3(x) = -\delta f_2 f_1 f_2(x) = \delta f_1 f_2 f_2(x)$.
$f_3 f_1 f_2(x) = -f_1 f_3 f_2(x) = f_1 f_2 f_3(x) = \delta f_1 f_2 f_1 f_2(x)$.

Ainsi, les endomorphismes f_3 et $\delta f_1 f_2$ coïncident sur la base B ; ils sont donc égaux.

c) En utilisant que f_1, f_2 et f_3 anti-commutent et que, selon **I.**B.4), leurs carrés sont égaux à $-\operatorname{Id}_E$, on obtient :

$$M(x_0, x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_0 & -x_1 & -x_2 & -x_3 \\ x_1 & x_0 & -x_3 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_0 & -x_1 \\ x_3 & -x_2 & x_1 & x_0 \end{pmatrix}.$$

B.2) On vérifie facilement que les colonnes de $M(x_0, x_1, x_2, x_3)$ sont deux à deux orthogonales et sont toutes de norme $\sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. $M(x_0, x_1, x_2, x_3)$ est donc colinéaire à une matrice orthogonale ; c'est une matrice de similitude.

L'ensemble W des matrices $M(x_0, x_1, x_2, x_3)$, où (x_0, x_1, x_2, x_3) décrit $\mathbb{R}^4$, est ainsi un sous-e.v. de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ formé de matrices de similitudes. Si E est un e.v. euclidien de dimension 4, on montre en raisonnant exactement comme en **I.**C.3) que $\mathscr{L}(E)$ contient un sous-e.v. V de dimension 4 formé de similitudes ; cela montre que $d_4 \geqslant 4$, puis que $d_4 = 4$ compte tenu de **I.**C.2).

C.1) Si $f_3 = \delta f_1 f_2$ avec $\delta = \pm 1$, il vient $f_3 f_4 = \delta f_1 f_2 f_4 = -\delta f_1 f_4 f_2 = \delta f_4 f_1 f_2 = f_4 f_3$.
C'est absurde puisque $f_3 f_4 = -f_4 f_3$ par hypothèse et que $f_3 f_4$ est non nul (c'est un automorphisme orthogonal).

C.2) $f_1 f_2 f_3$ est un automorphisme orthogonal comme composé d'automorphismes orthogonaux. Il est symétrique car :

$$(f_1 f_2 f_3)^* = f_3^* f_2^* f_1^* = (-f_3)(-f_2)(-f_1) = -f_3 f_2 f_1 = f_3 f_1 f_2 = -f_1 f_3 f_2 = f_1 f_2 f_3.$$

Comme $f_1 f_2 f_3$ est un endomorphisme orthogonal, si il était colinéaire à Id_E, il serait égal à $\pm \operatorname{Id}_E$, mais alors :

$$f_3 = -f_3^* = -f_3^{-1} = -(\pm f_1 f_2) = \mp f_1 f_2, \text{ ce qui contredit C.1).}$$

C.3) En tant qu'endomorphisme symétrique, $f_1 f_2 f_3$ est diagonalisable, en tant qu'automorphisme orthogonal, son spectre est inclus dans $\{1, -1\}$; de plus, ce spectre n'est pas réduit à $\{1\}$ ou à $\{-1\}$ puisque $f_1 f_2 f_3$ n'est égal ni à Id_E ni à $-\operatorname{Id}_E$. Finalement, $\operatorname{Sp}(f_1 f_2 f_3) = \{1, -1\}$.

Soient alors a et b des vecteurs propres unitaires de $f_1 f_2 f_3$ respectivement associés à 1 et à -1.
$\langle f_1 f_2 f_3(a + b), a + b\rangle = \langle a - b, a + b\rangle = \|a\|^2 - \|b\|^2 = 0$. Le vecteur $x = \dfrac{a + b}{\|a + b\|}$ répond donc à la question.

C.4) Les vecteurs de F sont tous unitaires car x l'est et f_1, f_2, f_3 conservent la norme. Comme x est orthogonal à $f_1 f_2 f_3(x)$, la conservation du produit scalaire par f_1 et l'égalité $f_1^2 = -\operatorname{Id}_E$ montrent que $f_1(x)$ est orthogonal à $f_2 f_3(x)$. Les autres orthogonalités s'obtiennent de façon analogue (noter que si $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, $f_i f_j f_k(x)$ est égal à $\pm f_1 f_2 f_3(x)$, donc est orthogonal à x) ou par des calculs identiques à ceux du A.1)a).

C.5) a) En utilisant que f_1, f_2, f_3 anti-commutent et que leur carré est $-\mathrm{Id}_E$, on montre comme dans la seconde partie de A.1)a) que V est stable par f_1, f_2 et f_3. D'après **I.**B.2), il en est de même pour $V^\perp$.

b) Les f_i' sont des automorphismes orthogonaux antisymétriques de $V^\perp$ qui anti-commutent. Comme $\dim V^\perp = 4$, ils vérifient les hypothèses de B.1), et on peut donc leur appliquer B.1)b) ; c'est le résultat demandé.

c) Il suffit de montrer que l'image par f_4 de chacun des vecteurs $e, f_1(e), f_2(e), f_1 f_2(e) (= f_3(e))$ appartient à V. Selon **I.**B.1) et 3), $\langle e, f_4(e)\rangle = \langle f_1(e), f_4(e)\rangle = \langle f_2(e), f_4(e)\rangle = \langle f_3(e), f_4(e)\rangle = 0$, donc $f_4(e) \in (V^\perp)^\perp = V$. Ensuite, pour $i \in [\![1,3]\!]$, $f_4 f_i(e) = -f_i f_4(e)$, donc $f_4 f_i(e) \in V$, puisque $f_4(e) \in V$, qui est stable par f_i.

d) La somme de W et $V^\perp$ est directe puisque, selon c), $W \cap V^\perp \subset V \cap V^\perp = \{0\}$.

Notons $U = W \oplus V^\perp$. On sait déjà que pour $i \in [\![1,3]\!]$, $f_i\langle V^\perp\rangle \subset V^\perp \subset U$ et que $f_4\langle V^\perp\rangle = W \subset U$.
Ensuite, $f_4\langle W\rangle = f_4^2\langle V^\perp\rangle = (-\mathrm{Id}_E)\langle V^\perp\rangle = V^\perp \subset U$.
Enfin, pour $i \in [\![1,3]\!]$, $f_i\langle W\rangle = f_i f_4\langle V^\perp\rangle = (-f_4 f_i)\langle V^\perp\rangle \subset f_4\langle V^\perp\rangle = W \subset U$.

Ainsi, pour tout $i \in [\![1,4]\!]$, $f_i\langle V^\perp\rangle$ et $f_i\langle W\rangle$ sont inclus dans U ; par linéarité, $f_i\langle U\rangle \subset U$.

On en déduit (encore **I.**B.2)) que $U^\perp$ est aussi stable par f_1, f_2, f_3, f_4. En considérant les endomorphismes de $U^\perp$ induits par les f_i, on obtient quatre automorphismes orthogonaux antisymétriques de $U^\perp$ qui anti-commutent ; on en déduit d'après la conclusion du **I.** que $\mathscr{L}(U^\perp)$ contient un sous-e.v. de dimension 5 formé de similitudes, et donc que $d_4 \geqslant 5$, puisque $\dim U^\perp = \dim E - \dim U = 12 - (4+4) = 4$. Cela contredit B.2) (et aussi **I.**C.2)).

C.6) On vient de montrer qu'il n'existe pas dans E de famille de quatre endomorphismes orthogonaux antisymétiques qui anti-commutent ; il n'existe donc pas de sous-e.v. de dimension 5 de $\mathscr{L}(E)$ inclus dans $\mathrm{Sim}(E)$ et par conséquent $\delta_{12} \leqslant 4$.

L'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} x_0 I_3 & -x_1 I_3 & -x_2 I_3 & -x_3 I_3 \\ x_1 I_3 & x_0 I_3 & -x_3 I_3 & x_2 I_3 \\ x_2 I_3 & x_3 I_3 & x_0 I_3 & -x_1 I_3 \\ x_3 I_3 & -x_2 I_3 & x_1 I_3 & x_0 I_3 \end{pmatrix}$ avec $(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4$ est un sous-e.v. de dimension 4 de $\mathscr{M}_{12}(\mathbb{R})$ formé de matrices de similitudes. En raisonnant comme en **I.**C.3) et en B.2) on en déduit que $d_{12} \geqslant 4$, et finalement que $d_{12} = 4$.

D. Les colonnes de la matrice proposée sont toutes de norme $\sqrt{\sum\limits_{i=0}^{7} x_i^2}$ et on vérifie (avec de la patience) qu'elles sont deux à deux orthogonales. Il s'agit donc d'une matrice de similitude.

L'ensemble des matrices de la forme précédente, avec $(x_0, \ldots, x_7) \in \mathbb{R}^8$, est un sous-e.v. de dimension 8 de $\mathscr{M}_8(\mathbb{R})$ formé de matrices de similitudes ; on en déduit comme précédemment que $\delta_8 \geqslant 8$, puis que $d_8 = 8$ (**I.**C.2)).

E. D'après les cas étudiés (n impair, $n = 2p$ avec p impair, $n = 4$, $n = 12$, $n = 8$) on peut conjecturer que d_n est la plus grande puissance de 2 qui divise n.
