

CENTRALE 2000 PSI 2

I. A- 1) Un segment $[AB]$ est l'ensemble des combinaisons convexes de A et de B . Mais toute combinaison convexe de combinaisons convexes de A et de B est encore une combinaison convexe de A et de B . Donc le segment $[AB]$ est convexe.

I. A- 2) Soient $M_1, M_2, \dots, M_p$ p points du demi-plan fermé F et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ p réels positifs ou nuls de somme 1. Alors $\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i \vec{OM_i} / \vec{U} \right) \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i a = a$. Donc F est convexe. Le raisonnement est le même pour un

demi-plan ouvert en remplaçant l'inégalité large par une inégalité stricte.

I. A- 3) Soient $M_1, M_2, \dots, M_p$ p points de C et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ p réels positifs ou nuls de somme 1. Alors pour tout α dans A , $\sum_{i=1}^p \lambda_i M_i$ est un point de C_α , d'où $\sum_{i=1}^p \lambda_i M_i \in C$. Donc C est convexe.

I. B- Une combinaison convexe d'un point unique M_1 ne peut être que ce point lui-même. L'hypothèse de récurrence est donc triviale pour $p = 1$.

Supposons qu'elle soit vraie au rang $p - 1$; soient $M_1, M_2, \dots, M_p$ p points de C et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ p réels positifs ou nuls de somme 1. L'associativité du barycentre donne l'égalité
$$\sum_{i=1}^p \lambda_i M_i = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i \cdot \frac{\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i}{\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i} M_i + \lambda_p M_p$$
. Par hypothèse de récurrence, $N = \frac{\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i}{\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i} M_i$ est dans C et comme

le segment $[NM_p]$ est dans C , $\sum_{i=1}^p \lambda_i M_i$ est encore dans C . D'où le résultat.

I. C- 1) Le point $N = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_3} M_2 + \frac{\lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_3} M_3$ est un point de la droite $M_2 M_3$ et M est barycentre de M_1 et N pondérés par λ_1 et $\lambda_2 + \lambda_3$. Pour que M soit dans F_1 il faut et il suffit que M soit dans le segment $[M_1 N]$, c'est à dire $\lambda_1 \geq 0$ et $\lambda_2 + \lambda_3 \geq 0$ ou dans la demi-droite issue de M_1 ne contenant pas N , c'est à dire $\lambda_1 \geq 0$ et $\lambda_2 + \lambda_3 \leq 0$. Globalement, $M \in F_1 \Leftrightarrow \lambda_1 \geq 0$.

$$\text{D'où } M \in \text{Conv}(M_1, M_2, M_3) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 \geq 0 \\ \lambda_2 \geq 0 \\ \lambda_3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow M \in F_1 \cap F_2 \cap F_3.$$

I. C- 2) Un point du triangle $\text{Conv}(M_1, M_2, M_3)$ distinct de M_1 est tel que l'un au moins des coefficients λ_2 ou λ_3 est non nul. Une combinaison convexe de tels points vérifie encore cette propriété puisque tous ses coefficients sont positifs.

I. D- Une application affine f conserve le barycentre, donc les combinaisons convexes ; si de plus c'est une bijection, l'image d'une partie finie $\{M_1, M_2, \dots, M_p\}$ est une partie finie $\{f(M_1), f(M_2), \dots, f(M_p)\}$ de même cardinal. Donc l'image d'un polytope est un polytope.

I. E- 1) T est borné puisque contenu dans l'hypercube fermé $[0,1]^p$. De plus, T est l'intersection de cet hypercube fermé avec l'hyperplan d'équation $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$ qui est lui aussi un fermé. Donc T est fermé et borné : c'est un compact.

I. E- 2) f est continue car chaque fonction coordonnée est une fonction polynomiale des variables $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$.

I. E- 3) Le polytope $\text{Conv}(M_1, M_2, \dots, M_p)$ est l'image du compact T par l'application continue f . C'est donc un compact.

I. E- 4) L'intersection d'une droite Δ et d'un polygone convexe P de $\mathbb{R}^2$ est donc un fermé (intersection de deux fermés) borné (contenu dans P), donc compact.

Par ailleurs, c'est un convexe (cf. : A- 3). Or un convexe compact S sur une droite est un segment. En effet, si on note a et b la borne supérieure et la borne inférieure des abscisses (comptées sur la droite) des points de S (elles existent puisque S est borné), les points A et B correspondants sont dans S (car S est fermé) d'où $S \subset [AB]$ (car S est convexe) et finalement $S = [AB]$ (avec éventuellement $A = B$).

I. F- 1) Si P n'est pas réduit à M_1 , $P \setminus \{M_1\}$ est contenu dans le demi-plan ouvert $\overset{\circ}{F}$ et $P \setminus \{M_1\} = P \cap \overset{\circ}{F}$ qui est convexe d'après A- 3. Donc M_1 est extrémal.

I. F- 2) Soit $P = \text{Conv}(M_1, M_2, \dots, M_p)$ et $M \in P$ distinct de chacun des points M_i . Alors $P \setminus M$ contient $M_1, M_2, \dots, M_p$, donc n'est pas stable par combinaison convexe. Donc seuls les points $M_1, M_2, \dots, M_p$ peuvent être extrémaux.

I. F- 3) Pour $n = 2$, la courbe est une parabole.

Soit $M = \sum_{j=1}^p \lambda_j M(t_j)$ un point de P . Alors, pour tout i ,

$$t_i^2 - (\vec{OM} / \vec{U_i}) = \left(\sum_{j=1}^p \lambda_j \right) t_i^2 - 2t_i \left(\sum_{j=1}^p \lambda_j t_j \right) + \sum_{j=1}^p \lambda_j t_j^2 = \sum_{j=1}^p \lambda_j (t_j - t_i)^2 \geq 0$$

et cette quantité ne peut s'annuler que si tous les termes sont nuls, d'où $\lambda_j = 0 \quad \forall j \neq i$, c'est à dire $M = M_i$.

Donc M_i est pour tout i un point extrémal ; d'après 2, ce sont les seuls.

II. A- 1) Supposons que f est $\mathbb{R}$ -linéaire représentée dans la base canonique par la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors

$$f(z) = (ax + by) + i(cx + dy) = a \frac{z + \bar{z}}{2} + b \frac{z - \bar{z}}{2} + i \left(c \frac{z + \bar{z}}{2} + d \frac{z - \bar{z}}{2} \right) = \frac{a + d + i(c - b)}{2} z + \dots$$

Inversement, si $f(z) = \alpha z + \beta \bar{z}$, f est $\mathbb{R}$ -linéaire représentée par la matrice $\begin{pmatrix} \text{Re}(\alpha + \beta) & \text{Im}(\beta - \alpha) \\ \text{Im}(\alpha + \beta) & \text{Re}(\alpha - \beta) \end{pmatrix}$.

II. A- 2) $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = \frac{(a+d)^2 + (c-b)^2}{4} - \frac{(a-d)^2 + (c+b)^2}{4} = ad - bc = \det f$. Donc f est un automorphisme ssi $|\alpha| \neq |\beta|$.

II. A- 3) La matrice de la réflexion vectorielle considérée est $\begin{pmatrix} \cos 2\vartheta & \sin 2\vartheta \\ \sin 2\vartheta & -\cos 2\vartheta \end{pmatrix}$, d'où $\alpha = 0$ et $\beta = e^{2i\vartheta}$.

II. B- 1) H est défini comme le noyau de la forme linéaire (manifestement non nulle) $(z_1, \dots, z_p) \mapsto z_1 + \dots + z_p$. C'est donc un hyperplan vectoriel.

II. B- 2) $\psi^p = id$. Donc ψ annule le polynôme à racines simples $X^p - 1$, ce qui prouve que ψ est diagonalisable (le corps de base étant $\mathcal{C}$, tout polynôme est scindé).

$\psi(\Omega_k) = \omega^k \Omega_k$. Donc Ω_k est un vecteur propre de ψ associé à la valeur propre ω^k . Comme les ω^k , $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ sont distincts, les Ω_k constituent une base propre pour ψ .

II. B- 3) Pour $k \neq 0$, Ω_k est dans H . Donc $\{\Omega_1, \dots, \Omega_{p-1}\}$ est une base de H .

II. C- 1) Puisque V est dans H , il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1})$ unique tel que $V = \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k \Omega_k$.

II. C- 2) Calculons les produits scalaires (hilbertiens complexes) de chaque vecteur Ω_k par le vecteur

$$W = (1, \omega, \dots, \omega^{p-1}) : \text{il s'écrivent} \begin{cases} (W / \Omega_1) = \sum_{k=1}^p \omega^{1-k} \omega^{k-1} = p \\ (W / \Omega_r) = \sum_{k=1}^p \omega^{1-k} \omega^{r(k-1)} = \sum_{k=1}^p \omega^{(r-1)(k-1)} = 0 \quad \text{car } \Omega_{r-1} \in H \text{ si } r > 1 \end{cases}. \text{ On en}$$

déduit que $\lambda_1 = \frac{1}{p} (W / V) = \frac{1}{p} \sum_{r=1}^p \omega^{1-r} a_r$.

En calculant de même les produits scalaires avec le vecteur $W' = \left(1, \frac{1}{\omega}, \dots, \frac{1}{\omega^{p-1}}\right)$, on trouve

$$\lambda_{p-1} = \frac{1}{p} (W' / V) = \frac{1}{p} \sum_{r=1}^p \omega^{r-1} a_r.$$

II. C- 3)
$$\sum_{r=1}^p \alpha_r = \text{Im} \sum_{r=1}^p e^{i(r-1)\frac{2\pi}{p} - i\frac{\vartheta}{2}} = \text{Im} \left(e^{-i\frac{\vartheta}{2}} \right) \sum_{r=1}^p \omega^{r-1} = 0.$$

Ecrivons $\alpha_r = \frac{1}{2i} \left(e^{-i\frac{\vartheta}{2}} \omega^{r-1} - e^{i\frac{\vartheta}{2}} \omega^{1-r} \right)$. Alors

$$\sum_{r=1}^p a_r \alpha_r = \left(\frac{1}{2i} e^{i\frac{\vartheta}{2}} W' N \right) - \left(\frac{1}{2i} e^{-i\frac{\vartheta}{2}} W / V \right) = \frac{p}{2i} \left(\lambda_p e^{-i\frac{\vartheta}{2}} - \lambda_1 e^{i\frac{\vartheta}{2}} \right) = 0.$$

III. A- 1) Pour toute droite d_1 de $\mathbb{R}^2$, il existe une rotation qui envoie $\delta(0)$ sur d_1 .

Pour tout couple (d_1, d_2) , on peut définir une application linéaire qui envoie les vecteurs de la base canonique sur des vecteurs directeurs de d_1 et d_2 respectivement, c'est à dire $\delta(0)$ et $\delta(\frac{\pi}{2})$ sur d_1 et d_2 .

III. A- 2) Soient d_1, d_2 et d_3 trois droites deux à deux distinctes engendrées par U_1, U_2 et U_3 respectivement. On peut écrire $U_2 = \alpha U_1 + \beta U_3$. Notons (e_1, e_2) la base canonique et définissons l'application

linéaire f par
$$\begin{cases} f(e_1) = \alpha U_1 \\ f\left(\frac{-e_1 + \sqrt{3}e_2}{2}\right) = \beta U_3 \end{cases}$$
. Alors $f\left(\frac{e_1 + \sqrt{3}e_2}{2}\right) = U_2$ et l'application f envoie bien $\delta(0), \delta(\frac{\pi}{3})$ et

$\delta(\frac{2\pi}{3})$ sur d_1, d_2 et d_3 respectivement.

III. B- 1) Chaque vecteur U_j est défini au produit près par un scalaire non nul. De par la multilinéarité de $\det$, cette multiplication ne modifie pas $\mathcal{R}$.

III. B- 2)
$$\mathcal{R}(f(\mathcal{F})) = \frac{\det(f(U_1) f(U_3)) \det(f(U_2) f(U_4))}{\det(f(U_1) f(U_4)) \det(f(U_2) f(U_3))}$$
. Or $\det(f(U) f(V)) = \det f \det(U V)$; on peut donc simplifier par $(\det f)^2$ (on rappelle que $\det f$ n'est pas nul) d'où $\mathcal{R}(f(\mathcal{F})) = \mathcal{R}(\mathcal{F})$.

III. C- 1)
$$\cos k\vartheta = \text{Re } e^{ik\vartheta} = \text{Re}(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)^k = \sum_{0 \leq k \leq \frac{p}{2}} \binom{k}{2p} \cos^{k-2p} \vartheta (1 - \cos^2 \vartheta)^p$$
 qui est bien un polynôme en $\cos \vartheta$ à coefficients entiers.

III. C- 2)

$$\mathcal{R}(\mathcal{D}) = \mathcal{R}(f^{-1}(\mathcal{D})) = \frac{\begin{vmatrix} \cos \vartheta_1 & \cos \vartheta_3 \\ \sin \vartheta_1 & \sin \vartheta_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos \vartheta_2 & \cos \vartheta_4 \\ \sin \vartheta_2 & \sin \vartheta_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \vartheta_1 & \cos \vartheta_4 \\ \sin \vartheta_1 & \sin \vartheta_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos \vartheta_2 & \cos \vartheta_3 \\ \sin \vartheta_2 & \sin \vartheta_3 \end{vmatrix}} = \frac{\sin(\vartheta_3 - \vartheta_1) \sin(\vartheta_4 - \vartheta_2)}{\sin(\vartheta_4 - \vartheta_1) \sin(\vartheta_3 - \vartheta_2)} = \frac{\cos(\vartheta_3 - \vartheta_1 - \vartheta_4 + \vartheta_2)}{\cos(\vartheta_4 - \vartheta_1 - \vartheta_3 + \vartheta_2)}$$

où les ϑ_j sont les angles polaires de quatre des droites de $f^1(\mathcal{F})$, c'est à dire de la forme $k_j \frac{\pi}{p}$. D'où

$$\mathcal{R}(\mathcal{D}) = \frac{\cos\left((k_3 - k_1 - k_4 + k_2) \frac{\pi}{p}\right)}{\cos\left((k_4 - k_1 - k_3 + k_2) \frac{\pi}{p}\right)} = \frac{T_{k'}\left(\cos \frac{\pi}{p}\right)}{T_{k''}\left(\cos \frac{\pi}{p}\right)} = G\left(\cos \frac{\pi}{p}\right).$$

Notons φ_j l'angle polaire de d_j et supposons que $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \frac{\pi}{4}$ et $\varphi_3 = \frac{\pi}{2}$. Alors

$$\mathcal{R}(\mathcal{D}) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_4 - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\vartheta_4 - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = \tan\left(\vartheta_4 - \frac{\pi}{4}\right). \text{ Soit } x \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{E}. \text{ On peut trouver } \vartheta_4 \text{ tel que } \tan\left(\vartheta_4 - \frac{\pi}{4}\right) = x.$$

Alors aucune famille de p droite contenant les droites d_j ($1 \leq j \leq 4$) ne peut être π -rationnelle.

IV. A- En notant ζ l'angle polaire du point courant, $\Delta_{\vartheta x}$

a pour équation polaire $\rho = \frac{x}{\cos(\zeta - \vartheta - \pi/2)} = \frac{x}{\sin(\zeta - \vartheta)}$.

IV. B- 1) Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont $\delta(\vartheta)$ -identifiables, alors, pour tout x réel, $l(\Delta_{\vartheta x} \cap \mathcal{P}) = l(\Delta_{\vartheta x} \cap \mathcal{P}')$. Si deux segments d'une même droite sont de même longueur, leurs images par une bijection affine sont de même longueur, d'où $l(f(\Delta_{\vartheta x}) \cap f(\mathcal{P})) = l(f(\Delta_{\vartheta x}) \cap f(\mathcal{P}'))$.

$f(\Delta_{\vartheta x})$ est une droite qui reste dirigée par $\varphi(\delta(\vartheta))$ et, quand x décrit $\mathbb{R}$, le point $xie^{i\vartheta}$ décrit la droite $\delta(\vartheta + \pi/2)$ et son image décrit donc $\varphi(\delta(\vartheta + \pi/2))$. Comme φ est une bijection, cette droite n'est pas identique à $\varphi(\delta(\vartheta))$ et par conséquent, $f(\Delta_{\vartheta x})$ balaie tout le plan. Donc $f()$ et $f(\mathcal{P}')$ sont $\varphi(\delta(\vartheta))$ -identifiables.

IV. B- 2) La réflexion affine σ_q envoie un point d'argument ζ sur le point d'argument $\zeta' = (2q-1)\frac{\pi}{p} - \zeta$. Il est alors clair que si ζ est un multiple pair de $\frac{\pi}{p}$, ζ' est un multiple impair et inversement. Les deux ensembles $\{A_1, \dots, A_p\}$ et $\{B_1, \dots, B_p\}$ sont donc globalement échangés, donc aussi $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ puisqu'une application affine conserve une combinaison convexe.

IV. B- 3) Par suite, les p droites vectorielles orthogonales aux droites Δ_q , $q = 1, \dots, p$ constituent une famille $\mathcal{F}$ telle que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ soient $\mathcal{F}$ -identifiables.

IV. B- 4) Si $\mathcal{G}$ est une famille π -rationnelle, $\mathcal{G}$ est l'image par une application affine des droites $\delta\left(q\frac{\pi}{m}\right)$, $q = 0, \dots, m-1$, droites que l'on peut faire tourner d'un angle $\frac{\pi}{2m} + \frac{\pi}{2}$ pour se retrouver dans la situation des droites Δ_q' orthogonales aux droites Δ_q de la question 3). Si f' est la bijection affine telle que $f'(\{\Delta_1', \dots, \Delta_m'\}) = \mathcal{G}$, alors $Q = f'(\mathcal{P})$ et $Q' = f'(\mathcal{P}')$ sont $\mathcal{G}$ -identifiables et distincts.

IV. C- Par construction, d'après **III. C- 3)**, $\mathcal{D}$ n'est pas extraite d'une famille π -rationnelle. Il ne peut donc exister deux polygones convexes distincts $\mathcal{D}$ -identifiables. Donc $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$.

