

PARTIE I

1°. (a) $L(f)$ est une primitive de f , il existe donc une constante C telle que pour tout $t \in [a, b]$: $L(f)(t) = \int_a^t f(u) du + C$.

La relation $\int_a^b L(f)(t) dt = 0$ permet de déterminer $C = -\frac{1}{b-a} \int_a^b \left(\int_a^x f(u) du \right) dx$

D'où $L(f)(t) = \int_a^t f(u) du - \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(\int_a^x f(u) du \right) dx$

On montre facilement que $f \mapsto \int_a^t f(u) du - \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(\int_a^x f(u) du \right) dx$ est une application linéaire de E_0 dans E_0 , donc

$$\boxed{L \text{ est bien définie, } C \text{ est un endomorphisme de } E_0.}$$

1°. (b) Soit $f \in \ker L$, alors, $L(f) = 0$. En dérivant, on obtient $f = 0$.

$$\boxed{\ker L = \{0\}}$$

1°. (c) $L(f)$ est dérivable de dérivée f , donc $L(f)$ est de classe C^1 :

$$\boxed{\text{Im } L \subset E_1}$$

L'endomorphisme $\begin{matrix} E_1 & \rightarrow & E_1 \\ f & \mapsto & L(f) \end{matrix}$ n'est pas surjectif car les éléments de son image sont de classe C^2 .

$$\boxed{\text{La restriction de } L \text{ à } E_1 \text{ n'est pas un automorphisme de } E_1.}$$

2°. (a) On repart de la formule trouvée en 1°. (a):

$$\begin{aligned} L(f)(t) &= \int_a^t f(u) du - \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(\int_a^x f(u) du \right) dx \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(\int_a^t f(u) du \right) dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(\int_a^x f(u) du \right) dx \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(\int_x^t f(u) du \right) dx \end{aligned}$$

$$\boxed{L(f)(t) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(\int_x^t f(u) du \right) dx}$$

2°. (b) $L(f)$ est continue sur le segment $[a, b]$, donc elle est bornée et atteint sa borne inf en un point $x_i \in [a, b]$ et sa borne sup en un point $x_s \in [a, b]$. Pour tout $t \in [a, b]$:

$$\boxed{L(f)(x_i) \leq L(f)(t) \leq L(f)(x_s).}$$

$$\begin{aligned} 2°. (c) \quad \int_a^b |x-t| dt &= \int_a^x (x-t) dt + \int_x^b (t-x) dt \\ &= x^2 - (a+b)x + \frac{a^2+b^2}{2}. \end{aligned}$$

L'étude des variations de la fonction $x \mapsto x^2 - (a+b)x + \frac{a^2+b^2}{2}$ permet de montrer que sa borne supérieure est $\frac{(b-a)^2}{2}$, donc

$$\boxed{\sup_{t \in [a, b]} \int_a^b |t-x| dt = \frac{(b-a)^2}{2}.}$$

$$\begin{aligned}
|L(f)(t)| &= \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(\int_x^t f(u) du \right) dx \right| \\
&\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \left| \int_x^t f(u) du \right| dx \\
&\leq \frac{\|f\|}{b-a} \int_a^b |x-t| dx \\
&\leq \frac{b-a}{2} \|f\|
\end{aligned}$$

Donc

$$|L(f)(t)| \leq \frac{b-a}{2} \|f\|$$

Le théorème de continuité des applications linéaires permet de déduire de la relation $\|L(f)\| \leq \frac{b-a}{2} \|f\|$ que

$$L \text{ est continue sur } E_0.$$

2°. (d) $L(P_0)(t) = t + C$ avec $\int_a^b (t + C) dt = 0$ donc $L(P_0)(t) = t - \frac{a+b}{2}$ et $\|L(P_0)\| = \frac{b-a}{2}$

De la relation $\|L(f)\| \leq \frac{b-a}{2} \|f\|$, on déduit $|||L||| \leq \frac{b-a}{2}$.

De la relation $\|L(P_0)\| = \frac{b-a}{2}$, on déduit $|||L||| \geq \frac{b-a}{2}$.

On a donc

$$|||L||| = \frac{b-a}{2}$$

PARTIE II

1°. (a) $F_1 = \{f \in E_0, \quad \forall t \in [a, b] \quad f(a+b-t) = -f(t)\}$
 $F_2 = \{f \in E_0, \quad \forall t \in [a, b] \quad f(a+b-t) = f(t)\}$

L'application $f_1 : t \mapsto \left(t - \frac{a+b}{2}\right)^3$ est dans F_1 donc F_1 est non vide et non réduit à $\{0\}$.

L'application $f_2 : t \mapsto (t-a)(t-b)$ est dans F_2 donc F_2 est non vide et non réduit à $\{0\}$.

1°. (b) On voit facilement que F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels de E_0 .

Soit $f \in F_1$. Il existe $C \in \mathbf{R}$ tel que $L(f)(t) = \int_{\frac{a+b}{2}}^t f(u) du + C$ ($L(f)$ primitive de f)

$$\begin{aligned}
\text{Alors, } L(f)(a+b-t) &= \int_{\frac{a+b}{2}}^{a+b-t} f(u) du + C \\
&= - \int_{\frac{a+b}{2}}^t f(a+b-v) dv + C \quad (\text{changement de variable } v = a+b-u) \\
&= \int_{\frac{a+b}{2}}^t f(v) dv + C \quad (\text{car } f \in F_1)
\end{aligned}$$

donc, si $f \in F_1$, alors $L(f) \in F_2$.

$$L(F_1) \subset F_2$$

Soit $f \in F_2$.

$$\begin{aligned}
\int_a^b \left(\int_{\frac{a+b}{2}}^t f(u) du \right) dt &= \int_a^b \left(\int_{\frac{a+b}{2}}^{a+b-x} f(u) du \right) dx \quad (\text{changement de variable } t = a+b-x) \\
&= \int_a^b \left(- \int_{\frac{a+b}{2}}^x f(a+b-v) dv \right) dx \quad (\text{changement de variable } u = a+b-v) \\
&= - \int_a^b \left(\int_{\frac{a+b}{2}}^x f(v) dv \right) dx \quad (\text{car } f \in F_2)
\end{aligned}$$

On en déduit que si $f \in F_2$, alors, $\int_a^b \left(\int_{\frac{a+b}{2}}^t f(u) du \right) dt = 0$ et donc $L(f)(t) = \int_{\frac{a+b}{2}}^t f(u) du$.

On a alors

$$\begin{aligned} L(f)(a+b-t) &= \int_{\frac{a+b}{2}}^{a+b-t} f(u) du \\ &= - \int_{\frac{a+b}{2}}^t f(a+b-v) dv \quad (\text{changement de variable } v = a+b-u) \\ &= - \int_{\frac{a+b}{2}}^t f(v) dv + C \quad (\text{car } f \in F_2) \end{aligned}$$

Si $f \in F_2$, alors $L(f) \in F_1$.

$$\boxed{L(F_2) \subset F_1}$$

2°. (a) $\forall t \in [a, b]$, $g(a+b-t) = g(t)$ donc $g \in F_2$.

De la même façon, on définit la fonction h sur $[a, b]$ par $h(t) = \frac{1}{2} [f(t) - f(a+b-t)]$ et on vérifie que $h \in F_1$.

2°. (b) Soit $f \in E_0$, alors $f = h + g$ (notations du (a)) avec $h \in F_1$ et $g \in F_2$ donc $E_0 = F_1 + F_2$.
De plus $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ donc

$$\boxed{E_0 = F_1 \oplus F_2}$$

2°. (c) Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

$$\begin{aligned} L^n(f)(b) - L^n(f)(a) &= \int_a^b (L^n(f))'(t) dt \quad (\text{car } L^n(f) \text{ est } C^1) \\ &= \int_a^b L^{n-1}(f)(t) dt = 0 \quad (\text{définition de } L) \end{aligned}$$

Donc, pour tout entier $n \geq 2$

$$\boxed{L^n(f)(b) = L^n(f)(a)}$$

3°. (a) $f \in F_2$, $L(F_1) \subset F_2$ et $L(F_2) \subset F_1$, pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, $L^{2n-1}(f)$ est donc un élément de F_1 .

$$\text{On a alors } L^{2n-1}(f) \left(\frac{a+b}{2} \right) = -L^{2n-1}(f) \left(a+b - \frac{a+b}{2} \right) = -L^{2n-1}(f) \left(\frac{a+b}{2} \right)$$

donc pour $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\boxed{L^{2n-1}(f) \left(\frac{a+b}{2} \right) = 0}$$

De la même façon,

$$L^{2n+1}(f)(a) = -L^{2n+1}(f)(a+b-a) = -L^{2n+1}(f)(b) \text{ or, on sait que } L^{2n+1}(f)(a) = L^{2n+1}(f)(b)$$

donc pour $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\boxed{L^{2n+1}(f)(a) = L^{2n+1}(f)(b) = 0}$$

$$\text{N}^*: \int_a^{\frac{a+b}{2}} L^{2n}(f)(t) dt = \int_a^{\frac{a+b}{2}} (L^{2n+1}(f))'(t) dt = L^{2n+1}(f) \left(\frac{a+b}{2} \right) - L^{2n+1}(f)(a) = 0. \text{ donc pour } n \in$$

$$\boxed{\int_a^{\frac{a+b}{2}} L^{2n}(f)(t) dt = 0}$$

3°. (b) $(L(f))' = f$ et f est strictement positive. On en déduit les variations de $L(f)$.

t	a	$\frac{a+b}{2}$	b
$L(f)(t)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

$(L^2(f))' = L(f)$, de plus, on sait que la moyenne de $L^2(f)$ sur $[a, b]$ est nulle, $L^2(f)$ s'annule donc en deux points que l'on notera c_2 et d_2 . On en déduit les variations de $L^2(f)$.

$(L^3(f))' = L^2(f)$, de plus $L^3(f)$ s'annule en a , b , et $\frac{a+b}{2}$. On en déduit les variations de $L^3(f)$.

t	a	c_2	$\frac{a+b}{2}$	d_2	b			
$L^2(f)(t)$	$L^2(f)(a)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$L^2(f)(a)$
$L^3(f)(t)$	0	$\nearrow$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\nearrow$	0	0

De même, on obtient les variations de $L^4(f)$ et de $L^5(f)$:

t	a	c_4	$\frac{a+b}{2}$	d_4	b
$L^4(f)(t)$	$L^4(f)(a)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\searrow$
$L^5(f)(t)$	0	$\searrow$	$\nearrow$	0	$\searrow$

Par récurrence, on peut déterminer les variations de $L^n(f)$ lorsque n décrit $\mathbf{N}^*$:

Variations de $L^{4p}(f)$ et de $L^{4p+1}(f)$, $p \in \mathbf{N}^*$:

t	a	c_{4p}	$\frac{a+b}{2}$	d_{4p}	b
$L^{4p}(f)(t)$	$L^{4p}(f)(a)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$L^{4p}(f)(a)$
$L^{4p+1}(f)(t)$	0	$\searrow$	$\nearrow$	0	0

Variations de $L^{4p+2}(f)$ et de $L^{4p+3}(f)$, $p \in \mathbf{N}$:

t	a	c_{4p+2}	$\frac{a+b}{2}$	d_{4p+2}	b
$L^{4p+2}(f)(t)$	$L^{4p+2}(f)(a)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\nearrow$
$L^{4p+3}(f)(t)$	0	$\nearrow$	$\searrow$	0	$\nearrow$

3°. (c) $\Omega_n = \{t \in [a, b] | L^n(f)(t) = 0\}$

Des tableaux de variation de la question précédente, on déduit que:

pour $n = 1$, le cardinal de Ω_1 est 1, pour n pair, le cardinal de Ω_n est 2, pour $n \geq 3$ impair, le cardinal de Ω_n est 3.

3°. (d) De même,

pour $n = 1$, $L(f)(a) < 0$,

pour $n \geq 3$ impair, $L^n(f)(a) = 0$,

pour n congru à 2 modulo 4, $L^n(f)(a) > 0$,

pour n multiple de 4, $L^n(f)(a) < 0$.

PARTIE III

1°. (a) $P_0(t) = 1$

$$P_1(t) = (t - a) - \frac{b - a}{2}$$

$$P_2(t) = \frac{(t - a)^2}{2} - \frac{(b - a)(t - a)}{2} + \frac{(b - a)^2}{12}$$

$$P_3(t) = \frac{(t - a)^3}{6} - \frac{(b - a)(t - a)^2}{4} + \frac{(b - a)^2(t - a)}{12}$$

1°. (b) Montrons l'égalité $P_n(X + b - a) - P_n(X) = (b - a) \frac{(X - a)^{n-1}}{(n - 1)!}$ par récurrence sur n .

Pour $n = 1$, on a bien $P_1(X + b - a) - P_1(X) = (b - a)$

Supposons que pour un entier $n \in \mathbf{N}^*$ on ait $P_n(X + b - a) - P_n(X) = (b - a) \frac{(X - a)^{n-1}}{(n - 1)!}$.

La dérivée de P_{n+1} est P_n , donc le polynôme $P_{n+1}(X+b-a) - P_{n+1}(X) - (b-a)\frac{(X-a)^n}{n!}$ a pour dérivée $P_n(X+b-a) - P_n(X) - (b-a)\frac{(X-a)^{n-1}}{(n-1)!}$, qui est nulle d'après l'hypothèse de récurrence.

De plus, sa valeur en a est $P_{n+1}(b) - P_{n+1}(a)$ qui est nulle d'après la question II 2°(c).

On en déduit que le polynôme $P_{n+1}(X+b-a) - P_{n+1}(X) - (b-a)\frac{(X-a)^n}{n!}$ est nul, d'où la relation à l'ordre $n+1$.

D'après le principe de récurrence, on a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^* \quad P_n(X+b-a) - P_n(X) = (b-a)\frac{(X-a)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

1°. (c) Dans la relation précédente, on pose $a=0$, $b=1$, $n=3$ et $X=k$.

$$\text{On obtient } P_3(k+1) - P_3(k) = \frac{k^2}{2}$$

$$\text{On somme alors pour } k \text{ variant de } 1 \text{ à } n \text{ et on trouve } P_3(n+1) - P_3(1) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k^2.$$

$$\text{Or } P_3(t) = \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{4} + \frac{t}{12} \text{ d'où finalement}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$2^\circ. (a) \quad \varphi(P, Q) = \frac{1}{b-a} \int_a^b P(t)Q(t) dt$$

φ est une application de $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ dans $\mathbf{R}$.

On vérifie facilement que φ est bilinéaire et symétrique.

Pour tout $P \in \mathcal{P}$, $\varphi(P, P) \geq 0$ et si $\varphi(P, P) = 0$, alors $P = 0$ donc φ est définie positive.

$$\boxed{\varphi \text{ est bien un produit scalaire de } \mathcal{P}}$$

2°. (b) Intégrons $\varphi(P_n, P_m)$ par parties:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b P_n(t)P_m(t) dt = \frac{1}{b-a} \left([P_n(t)P_{m+1}(t)]_a^b - \int_a^b P_{n-1}(t)P_{m+1}(t) dt \right) \begin{pmatrix} u = P_n & v' = P_m \\ u' = P_{n-1} & v = P_{m+1} \end{pmatrix}$$

or, on sait d'après II 2°. (c) que pour $k \geq 2$, $P_k(a) = P_k(b)$ donc pour $m \geq n \geq 2$, on a

$$\varphi(P_n, P_m) = -\varphi(P_{n-1}, P_{m+1}).$$

On montre alors par récurrence que

$$\varphi(P_n, P_m) = (-1)^{n+1} \varphi(P_{m+n-1}, P_1) = \frac{(-1)^{n+1}}{b-a} \int_a^b P_{m+n-1}(t)P_1(t) dt$$

$$\text{Puis } \frac{(-1)^{n+1}}{b-a} \int_a^b P_{m+n-1}(t)P_1(t) dt$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{b-a} \left([P_{m+n}(t)P_1(t)]_a^b - \int_a^b P_{m+n}(t) dt \right) \begin{pmatrix} u = P_1 & v' = P_{m+n-1} \\ u' = 1 & v = P_{m+n} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{b-a} (P_{m+n}(b)P_1(b) - P_{m+n}(a)P_1(a)) \text{ (car } \int_a^b P_{m+n}(t) dt = 0 \text{ par définition de } L)$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{b-a} (P_{m+n}(a)(b-a)) \text{ (car } P_{m+n}(a) = P_{m+n}(b) \text{ et } P_1(b) - P_1(a) = b-a)$$

On obtient bien pour $m \geq n > 0$

$$\boxed{\varphi(P_n, P_m) = (-1)^{n+1} P_{m+n}(a)}$$

$$\varphi(P_n, P_0) = \frac{1}{b-a} \int_a^b P_n(t) dt = \frac{1}{b-a} \int_a^b L(P_{n-1})(t) dt = 0 \text{ d'après la définition de } L.$$

2°. (c) $P_n(a) = L^n(P_0)(a)$ et P_0 est un élément de F_2 tel que pour tout $t \in [a, b]$, $P_0(t) > 0$. En utilisant le résultat trouvé en II 3°. (d), on montre que

$$\boxed{P_n(a) = 0 \text{ si et seulement si } n \text{ est impair et différent de } 1.}$$

3°. (a) Pour tout entier n , le polynôme P_n est de degré n , $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une base de $\mathcal{P}$.

On en déduit que les espaces $FP_1 = \text{Vect}\{P_n, n \in 2\mathbb{N} + 1\}$ et $FP_2 = \text{Vect}\{P_n, n \in 2\mathbb{N}\}$ sont deux espaces supplémentaires:

$$\boxed{\mathcal{P} = FP_1 \oplus FP_2.}$$

3°. (b) Si n est un entier pair et si m est un entier impair, montrons que $\varphi(P_n, P_m) = 0$.

Si $n = 0$, c'est vrai (III 2)(b).

Si $0 < n \leq m$, $\varphi(P_n, P_m) = (-1)^{n+1} P_{m+n}(a) = 0$. (d'après III 2) (b) et III 2) (c)

$\boxed{\text{La somme directe } FP_1 \oplus FP_2 \text{ est donc bien orthogonale pour le produit scalaire } \varphi}$

4°. (a) Montrons par récurrence que $P_n(t) = \sum_{k=0}^n \gamma_k \frac{(t-a)^{n-k}}{(n-k)!} \frac{(b-a)^k}{k!}$

Pour $n = 0$ la formule est vraie.

Supposons que $P_n(t) = \sum_{k=0}^n \gamma_k \frac{(t-a)^{n-k}}{(n-k)!} \frac{(b-a)^k}{k!}$

P_{n+1} est une primitive de P_n donc

$$\begin{aligned} P_{n+1}(t) &= \int_a^t P_n(u) du + P_{n+1}(a) = \int_a^t P_n(u) du + \gamma_{n+1} \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^n \gamma_k \frac{(t-a)^{n+1-k}}{(n+1-k)!} \frac{(b-a)^k}{k!} + \gamma_{n+1} \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \gamma_k \frac{(t-a)^{n+1-k}}{(n+1-k)!} \frac{(b-a)^k}{k!} \end{aligned}$$

On obtient la relation à l'ordre $n+1$.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(t) = \sum_{k=0}^n \gamma_k \frac{(t-a)^{n-k}}{(n-k)!} \frac{(b-a)^k}{k!}$

On pose ensuite $t = b$: $P_n(b) = \sum_{k=0}^n \gamma_k \frac{(b-a)^n}{(n-k)!k!} = \frac{(b-a)^n}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k \gamma_k$

Or pour $n \geq 2$, $P_n(b) = P_n(a) = \frac{(b-a)^n}{n!} \gamma_n$

On en déduit la relation demandée pour $n \geq 2$:

$$\boxed{\gamma_n = \sum_{k=0}^n C_n^k \gamma_k}$$

On peut alors déterminer une formule de récurrence permettant de calculer les γ_n :

$$\gamma_0 = 1 \text{ et pour } n \geq 2, \gamma_{n-1} = \frac{-1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} C_n^k \gamma_k.$$

On en déduit que γ_n est indépendant de a et b .

4°. (b) $\gamma_1 = \frac{-1}{2}$; $\gamma_2 = \frac{1}{6}$; $\gamma_3 = 0$; $\gamma_4 = \frac{-1}{30}$; $\gamma_6 = \frac{1}{42}$; $\gamma_8 = \frac{-1}{30}$; $\gamma_{10} = \frac{5}{66}$;

4°. (c) On utilise le procédé d'orthogonalisation de Schmidt en calculant les produits scalaires avec les relations de la question III 2°. (b). $\varphi(P_n, P_0) = 0$ et pour $m \geq n > 0$, $\varphi(P_n, P_m) = (-1)^{n+1} P_{m+n}(a) = (-1)^{n+1} \frac{(b-a)^{m+n}}{(m+n)!} \gamma_{m+n}$

On obtient comme base φ -orthogonale du sous espace G de FP_2 engendré par la famille (P_0, P_2, P_4, P_6) :

$$\boxed{(P_0, P_2, P_4 + (b-a)^2 \frac{P_2}{42}, P_6 + (b-a)^2 \frac{P_4}{33} + (b-a)^4 \frac{P_2}{7920})}$$