

I. Matrice d'adjacence et matrice Lagrangienne d'un graphe

- 1.1) Le coefficient d'indices i, j de $L_G {}^t L_G$ est $m_{ij} = \sum_{k=1}^m l_{ik} l_{jk}$. Pour $i = j$, cette somme est égale à la somme des carrés de la ligne i de L_G ; c'est le degré du sommet i . Pour $i \neq j$, un produit $l_{ik} l_{jk}$ est non nul si et seulement si la k -ème arête est $\{i, j\}$ et dans ce cas $l_{ik} l_{jk} = -1$. Ainsi $m_{ij} = -1$ si i, j appartiennent à une même arête et $m_{ij} = 0$ sinon. Par disjonction de cas, on a prouvé $m_{ij} = e_{ij}$ pour tous i, j .
- 1.2) Si $v \in \mathbf{R}^n$ est un vecteur quelconque alors ${}^t L_G v$ est le vecteur de \mathbf{R}^m dont la k -ème composante est $v_i - v_j$ où la k -ème arête est (i, j) . La relation $\|{}^t L_G v\|^2 = \sum_{\{i,j\} \in E} (v_i - v_j)^2$ s'ensuit.
Si $\Delta_G v = \lambda v$ alors $\|{}^t L_G v\|^2 = \text{tr}({}^t v L_G {}^t L_G v) = \text{tr}({}^t v \lambda v) = \lambda \|v\|^2$.
Ainsi les valeurs propres réelles de Δ_G sont positives, et comme Δ_G est symétrique réelle, on sait que toutes ses valeurs propres sont réelles. Donc Δ_G est une matrice symétrique positive.
- 1.3) D'après la question précédente, on a $\Delta_G v = 0$ si et seulement si $v_i = v_j$ pour toute arête $\{i, j\} \in E$. Ceci équivaut au fait que v_i ne dépend que de la composante connexe du sommet i . En notant C_1, \dots, C_p les composantes connexes de G , on voit que $\ker(\Delta_G)$ est le sous-espace de \mathbf{R}^n engendré par les vecteurs u_1, \dots, u_p où u_k est le vecteur indicateur de C_k ($u_{k,i} = 1$ si $i \in C_k$, $u_{k,i} = 0$ sinon). Ces vecteurs étant manifestement linéairement indépendants, on en déduit : $\dim(\ker(\Delta_G)) = p$, le nombre de composantes connexes, et $\text{rg}(\Delta_G) = n - p$.
- 1.4) On a $\Delta_{G,k} = L_{G,k} {}^t L_{G,k}$ donc si v est vecteur propre de $\Delta_{G,k}$ associé à la valeur propre λ , alors $\|{}^t L_{G,k} v\|^2 = \lambda \|v\|^2$. Par ailleurs, $\|{}^t L_{G,k} v\|^2 = \sum_{k \notin \{i,j\} \in E} (v_i - v_j)^2 + \sum_{\{i,k\} \in E} v_i^2$, donc $v \in \ker(\Delta_{G,k})$ si et seulement si v_i est nul sur la composante connexe de k , et constant arbitraire sur les autres composantes connexes du graphe G . Ainsi, $\dim(\ker(\Delta_{G,k}))$ est égal au nombre de composantes connexes de G autre que celle de k . On en déduit que si G est connexe alors $\dim(\ker(\Delta_{G,k})) = 0$ et $\text{rg}(\Delta_{G,k}) = n$ (et réciproquement).
- 1.5) $\text{rg}(\{\Delta_1, \dots, \Delta_n\} \setminus \{\Delta_k\} \cup \{x_k\}) = \text{rg}(\Delta_{G,k})$. Ce rang vaut n si et seulement si G est connexe (erreur d'énoncé).
- 1.6) Soit $\delta = |\det(A)| > 0$. On a ${}^t \text{com}(A)A = \pm \delta I_n$ donc ${}^t \text{com}(A)a = \pm \delta v$. Ceci prouve que v est à coordonnées rationnelles et que δ est un dénominateur commun pour ces coordonnées. La forme demandée s'en déduit en effectuant la division euclidienne des numérateurs par δ .

II. Le groupe critique d'un graphe

- 2.1) Question de cours.
- 2.2) Soit H le sous-groupe de \mathbf{R}^n engendré par $\{\Delta_1, \dots, \Delta_n\} \setminus \{\Delta_i\} \cup \{x_k\}$. On a évidemment $H \subset \Delta(G, k)$, et comme $\Delta_1 + \dots + \Delta_n = (1, \dots, 1)\Delta_G = {}^t(\Delta_G {}^t(1, \dots, 1)) = 0$, on a aussi $\Delta_i \in H$. Les autres Δ_j et x_k appartenant à H par définition, on obtient $\Delta(G, k) \subset H$ soit finalement, $\Delta(G, k) = H$.
- 2.3) Immédiat.
- 2.4) Immédiat.
- 2.5) Soit $\delta = |\det(\Delta_{G,k})|$ et a un élément de \mathbf{Z}^n . On décompose $a = (v'_0/\delta + v''_0)\alpha_k + \sum_{j \neq i} (v'_j/\delta + v''_j)\Delta_j$ comme en 1.6. Soit $a' = (v'_0 \alpha_k + \sum_{j \neq i} v'_j \Delta_j)/\delta$. Alors a et a' sont équivalents relativement à $\Delta(G, k)$ et donc $a/\Delta(G, k) = a'/\Delta(G, k)$. On en déduit que $\mathbf{Z}^n/\Delta(G, k) = \{a'/\Delta(G, k), a \in \mathbf{Z}^n\}$ et donc $\text{card}(\mathbf{Z}^n/\Delta(G, k)) \leq \text{card}\{a', a \in \mathbf{Z}^n\} \leq \delta^n$.

Remarque : il résulte de la théorie des groupes abéliens libres de type fini que l'on a en fait $\text{card}(\mathbf{Z}^n/\Delta(G, k)) = \delta$.

- 2.6) On suppose K et K' abéliens dans cette question (sinon les groupes quotients K/H et $K'/\phi(H)$ ne sont pas bien définis). On vérifie alors facilement que l'application : $K/H \ni x/H \mapsto (\phi(x))_{/\phi(H)} \in K'/\phi(H)$ est bien définie et est un isomorphisme de groupes.

2.7) Si $k = \ell$ il n'y a rien à démontrer. Si $k \neq \ell$, on vérifie que l'application ϕ donnée dans l'énoncé induit un isomorphisme de \mathbf{Z}^n et vérifie $\phi(\Delta(G, k)) = \Delta(G, \ell)$. La question précédente permet alors de conclure.

- a) ϕ , définie par son effet sur une base de \mathbf{R}^n existe en tant qu'application linéaire de \mathbf{R}^n dans \mathbf{R}^n . En particulier c'est un morphisme pour l'addition.
- b) Pour $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbf{R}^n$, on a $\phi(v) = \sum_{i \neq k} v_i(x_i - x_k) - v_k x_\ell = v - (\sum_{i=1}^n v_i)x_k - v_k x_\ell$. En particulier $\phi(\mathbf{Z}^n) \subset \mathbf{Z}^n$.
- c) Avec les notations précédentes, en notant $\phi(v) = (w_1, \dots, w_n)$, on a $\sum_{i=1}^n w_i = -v_k$ et $w_k = -\sum_{i=1}^n v_i$, d'où $v = \phi(v) - w_k x_k - (\sum_{i=1}^n w_i)x_\ell$. En particulier ϕ est bijective et $\phi^{-1}(\mathbf{Z}^n) \subset \mathbf{Z}^n$.
- d) Les points c) et d) impliquent $\phi(\mathbf{Z}^n) = \mathbf{Z}^n$ donc ϕ induit un isomorphisme de \mathbf{Z}^n .
- e) D'après b) et le fait que la somme des coefficients d'une ligne quelconque de Δ_G est nulle, on a $\phi(\Delta_i) = \Delta'_i$ donc $\phi(\Delta(G, k)) = \langle \Delta'_1, \dots, \Delta'_n, -x_\ell \rangle = \langle \Delta_1, \dots, \Delta_n, x_\ell \rangle = \Delta(G, \ell)$.

III. Tas de sable sur un graphe et configurations récurrentes

3.1) Si l'on passe de u à v en une étape alors $v = u - \Delta_i$ pour un certain i , donc $u/\Delta(G, n) = v/\Delta(G, n)$. Par récurrence ceci s'étend au cas où l'on passe de u à v en un nombre quelconque d'étapes.

3.2) *Erreur d'énoncé : une configuration positive u est stable si et seulement si $u_i < d_i$ pour tout $i \leq n - 1$.*

3.2.a) Si u est stable on prend $v = u$. Sinon, soit $i < n$ tel que $u_i \geq d_i$ et $u' = u - \Delta_i$. Par choix de i , u' est une configuration positive et de plus $\mu(u') > \mu(u)$ pour l'ordre lexicographique (un grain au moins s'est rapproché du puits). Si u' est stable on prend $v = u'$. Sinon on itère le processus. La suite des configurations obtenue est finie car le potentiel μ augmente strictement à chaque éboulement et il est majoré par $(N, 0, \dots, 0)$ avec $N = \sum_{i=1}^n u_i$. Ceci prouve que pour toute configuration positive u il existe une configuration positive stable v telle que $u \xrightarrow{*} v$.

3.2.b) Soient v, w deux configurations positives stables telles que $u \xrightarrow{*} v$ et $u \xrightarrow{*} w$. On a donc deux suites d'éboulements : $u = u^0 \rightarrow u^1 \rightarrow \dots \rightarrow u^p = v$ et $u = u'^0 \rightarrow u'^1 \rightarrow \dots \rightarrow u'^q = w$. Montrons par récurrence sur p que $v = w$.

Pour $p = 0$, $u = v$ est stable donc $q = 0$, $u = w$ et par conséquent $v = w$.

Pour $p \geq 1$, soit i tel que $u^1 = u - \Delta_i$: on passe de u à u^1 en éboulant le sommet i donc $u_i \geq d_i$. Comme $w_i < d_i$, il existe une première configuration, u'^r telle que $u'^{r+1} = u'^r - \Delta_i$. Par choix de r , le sommet i contient au moins d_i grains dans chacune des configurations u'^0, \dots, u'^r et la suite d'éboulements :

$$u^1 = (u'^0 - \Delta_i) \rightarrow (u'^1 - \Delta_i) \dots \rightarrow (u'^r - \Delta_i) = u'^{r+1} \rightarrow u'^{r+2} \rightarrow \dots \rightarrow u'^q = w$$

est valide. Ainsi on passe de u^1 à v en $p - 1$ éboulements et de u^1 à w en $q - 1$ éboulements. Par hypothèse de récurrence, $v = w$.

3.3) *Erreur d'énoncé : il faut imposer $(v_1, \dots, v_{n-1}) \neq 0$ au lieu de $v \neq 0$, sinon la question 3.3.b est fautive.*

3.3.a) C'est évident.

3.3.b) Soit $i < n$ tel que $v_i > 0$ et $j \in \{1, \dots, n - 1\}$. Comme le graphe est connexe, il existe dans G un chemin $i \xrightarrow{*} j$; soit p sa longueur et d un majorant des degrés des nœuds le long de ce chemin. Alors on peut amener au moins un grain de sable en position j en partant d'une configuration kv telle que $kv_i \geq d^p$: ébouler d^{p-1} fois de suite le sommet i ; il est arrivé au moins d^{p-1} grains de sable sur le deuxième sommet du chemin $i \xrightarrow{*} j$; itérer. En faisant varier j et par addition de configurations (cf a)), on peut trouver $k' \in \mathbf{N}$ tel que $k'v \xrightarrow{*} w$ où $w_j > 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, n - 1\}$.

3.3.c) S'il existe u' positive telle que $u' + \delta \xrightarrow{*} u$ alors $u + (u' + \delta - u) \xrightarrow{*} u$ et $v = u' + \delta - u$ est positive non nulle. S'il existe v positive non nulle telle que $u + v \xrightarrow{*} u$ alors pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a $u + kv \xrightarrow{*} u$. Par adaptation de la question précédente, il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $kv \xrightarrow{*} w$ où w est telle que $w_i \geq d_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n - 1\}$. On a donc $u + kv \xrightarrow{*} u + w = (u + w - \delta) + \delta \xrightarrow{*} u$ et $u + w - \delta$ est une configuration positive.

3.4) Soit $u - v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \Delta_i = \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i - \lambda_n) \Delta_i$ (car $\Delta_1 + \dots + \Delta_n = 0$). Soit I l'ensemble des indices $i \in \{1, \dots, n-1\}$ tels que $\lambda_i \geq \lambda_n$ et soit $w = u + \sum_{i \notin I} (\lambda_n - \lambda_i) \Delta_i = v + \sum_{i \in I} (\lambda_i - \lambda_n) \Delta_i$. Par construction on a $w \xrightarrow{*} u$ et $w \xrightarrow{*} v$.

3.5) $\varepsilon = \delta + (\delta - (\delta \oplus \delta))$ est positive puisque δ l'est et $\delta \oplus \delta$ est stable. On a $\varepsilon + \delta = (\delta - (\delta \oplus \delta)) + 2\delta \xrightarrow{*} (\delta - (\delta \oplus \delta)) + (\delta \oplus \delta) = \delta$.

3.6) Erreur d'énoncé : supposer u stable.

Si u est stable et $u + \varepsilon \xrightarrow{*} u$ alors u est récurrente par définition. Si u est récurrente, soit u' positive telle que $u' + \delta \xrightarrow{*} u$. On a donc $(u' + \delta) + \varepsilon \xrightarrow{*} u + \varepsilon$ et $u' + (\delta + \varepsilon) \xrightarrow{*} u' + \delta \xrightarrow{*} u$. Par unicité de la configuration stable obtenue après avalanche, on obtient $u + \varepsilon \xrightarrow{*} u$.

3.7) Montrons déjà qu'il existe $w \in \langle \Delta_1, \dots, \Delta_n \rangle$ telle que $w_i > 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$. La configuration $-\Delta_n$ est positive non nulle (au sens donné au début de **3.3**), donc d'après **3.3.b** il existe $k \in \mathbf{N}$ et une configuration w telle que $-k\Delta_n \xrightarrow{*} w$ et $w_i > 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Si i_1, \dots, i_p sont les nœuds d'éboulement dans la séquence $-k\Delta_n \xrightarrow{*} w$ alors $w = -k\Delta_n - \Delta_{i_1} - \dots - \Delta_{i_p}$, donc $w \in \langle \Delta_1, \dots, \Delta_n \rangle$.

Considérons alors une configuration quelconque u . Il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $u_i + kw_i \geq d_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Ainsi $u + kw = u' + \delta$ avec u' positive. Soit v la configuration stable obtenue par avalanche de $u + kw$. Par construction on a $u - v \in \langle \Delta_1, \dots, \Delta_n \rangle$ et $(u + kw) + \varepsilon = u' + (\delta + \varepsilon) \xrightarrow{*} u' + \delta = u + kw \xrightarrow{*} v$. Comme $(u + kw) + \varepsilon \xrightarrow{*} v + \varepsilon$, on obtient $v + \varepsilon \xrightarrow{*} v$ par unicité de la configuration en fin d'avalanche donc v est une configuration récurrente. Ceci prouve l'existence demandée.

Unicité : si v et v' sont deux configurations récurrentes dans $u + \langle \Delta_1, \dots, \Delta_n \rangle$ alors $v - v' \in \langle \Delta_1, \dots, \Delta_n \rangle$ donc il existe une configuration w telle que $w \xrightarrow{*} v$ et $w \xrightarrow{*} v'$. On a alors pour tout $k \in \mathbf{N}$, $w + k\delta \xrightarrow{*} v$ et $w + k\delta \xrightarrow{*} v'$ en effectuant les mêmes éboulements que lors de $w \xrightarrow{*} v$ et $w \xrightarrow{*} v'$. En choisissant k suffisamment grand, toutes les configurations obtenues lors de ces éboulements sont positives, soit $w + k\delta \xrightarrow{*} v$ et $w + k\delta \xrightarrow{*} v'$. Ceci implique $v = v'$ par unicité de la configuration stable en fin d'avalanche.

3.8) \oplus est clairement une opération commutative et associative. Si u est une configuration récurrente et v une configuration positive quelconque alors $(u + v) + \varepsilon = (u + \varepsilon) + v \xrightarrow{*} u + v \xrightarrow{*} u \oplus v$ et $(u + v) + \varepsilon \xrightarrow{*} (u \oplus v) + \varepsilon$ donc $(u \oplus v) + \varepsilon \xrightarrow{*} u \oplus v$, c'est-à-dire $u \oplus v$ est récurrente. En particulier la restriction de \oplus à $R(G)$ est une opération interne. Soit θ l'unique configuration récurrente dans $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_n \rangle$ (question précédente avec $u = 0$) : pour $u \in R(G)$ on a $u \oplus \theta \in u + \langle \Delta_1, \dots, \Delta_n \rangle$ dont $u \oplus \theta = u$ par unicité dans **3.7**. Ainsi θ est élément neutre pour \oplus . On montre de même que si $u \in R(G)$ et v est l'unique configuration récurrente dans $-u + \langle \Delta_1, \dots, \Delta_n \rangle$ alors $u \oplus v = \theta$. Ainsi $(R(G), \oplus)$ est un groupe commutatif.

Isomorphisme : par **3.7**, tout élément de $H = \mathbf{Z}^n / \langle \Delta_1, \dots, \Delta_n \rangle$ est la classe d'équivalence d'une configuration u et donc d'une unique configuration récurrente v . Ainsi l'application $R(G) \ni u \mapsto \bar{u} \in H$ est bijective. C'est un morphisme de groupes car si $u, v \in R(G)$, on a $u \oplus v \in u + v + \langle \Delta_1, \dots, \Delta_n \rangle$ donc $\bar{u} \oplus \bar{v} = \bar{u} + \bar{v}$. Ceci prouve que $R(G)$ est isomorphe à H .

Contrairement à ce que demande l'énoncé, $R(G)$ et $C(G)$ ne sont pas isomorphes : $R(G)$ est infini car si u est un état récurrent alors pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $u + kx_n$ est aussi récurrent, tandis que $C(G)$ est fini (question **2.5**). On peut toutefois prouver facilement les deux faits suivants :

- a) l'application $R(G) \ni u \mapsto (u_{/C(G)}, u_1 + \dots + u_n) \in C(G) \times \mathbf{Z}$ est un isomorphisme de groupes ;
- b) soit $R'(G)$ le sous-ensemble des configurations u récurrentes telles que $u_1 + \dots + u_n = 0$. Alors $R'(G)$ est un sous-groupe de $R(G)$ et il est isomorphe à $C(G)$.

IV. Configurations récurrentes et arbres couvrants

4.1) Si u est stable alors $u_i < d_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$ donc $u_1 + \dots + u_{n-1} < \sum_{i=1}^{n-1} d_i < \sum_{i=1}^n d_i = 2m$ (chaque arête est comptée deux fois dans cette dernière somme).

4.2) Soit u une configuration positive et v la configuration stable telle que $u \xrightarrow{*} v$. Donc $u - v = \lambda_1 \Delta_1 + \dots + \lambda_{n-1} \Delta_{n-1}$ où λ_i est le nombre de fois où on a éboulé le nœud i . Comme $(\Delta_1, \dots, \Delta_{n-1})$ est une famille libre (question **1.3**), λ_i ne dépend que de $u - v$.

4.3) L'algorithme proposé termine car il n'existe pas de suite infinie d'éboulements à partir d'une configuration donnée (cf. 3.2.a). En sortie de cet algorithme il n'y a plus aucun sommet instable ni dans S_1 ni dans $S_{>1}$ donc la configuration obtenue est stable. Ainsi l'algorithme proposé calcule bien la configuration stable issue de u . Cela dit, cet algorithme est ambigu car on ne précise pas dans quel ordre ébouler les sommets lors de l'étape (b). On peut prouver en s'inspirant de 3.2.b que la configuration obtenue en sortie de (b) est indépendante d'un tel ordre.

La majoration demandée est fautive : pour $i = \ell$ le majorant proposé, $\mu_{\geq \ell}(u) \text{card}(S_{>\ell})$, est nul alors que le nombre d'éboulements ne l'est pas s'il y a au moins un sommet instable à la distance ℓ du puits. Nous allons plutôt montrer que le nombre d'éboulements effectués à l'étape i est majoré par $\mu_{\geq i}(u) \text{card}(S_{\geq i})$ où $S_{\geq i} = S_{>i-1}$.

Lemme 1 : soit v une configuration positive telle que $v_j < d_j$ pour tout $j \in S_{\geq i}$ et soit $k \in S_i$. On considère une suite d'éboulements $v + x_k \xrightarrow{*} w$ telle que seuls des nœuds de $S_{\geq i}$ ont été éboulés et $w_j < d_j$ pour tout $j \in S_{\geq i}$. Alors chaque nœud de $S_{\geq i}$ a été éboulé au plus une fois.

Démonstration : on raisonne par l'absurde et on considère le premier nœud, j , ayant été éboulé deux fois. Si $j \neq k$, soient α le nombre de nœuds voisins de j ayant été éboulés avant le premier éboulement de j et β le nombre de nœuds voisins de j ayant été éboulés entre le premier et le deuxième éboulement de j . Par choix de j , les nœuds concernés par ces α et β éboulements sont distincts donc $\alpha + \beta \leq d_j$. Or le nombre de grains présents en j avant le deuxième éboulement est $v_j + \alpha - d_j + \beta < d_j$ donc le deuxième éboulement n'a pas pu se produire. Si $j = k$, avec les mêmes notations on a $\alpha + \beta \leq d_j - 1$ car il y a au moins un voisin de j dans S_{i-1} et ce voisin n'est jamais éboulé. Le nombre de grains présents en j avant le deuxième éboulement est cette fois $v_j + 1 + \alpha - d_j + \beta < d_j$ et on obtient à nouveau une contradiction.

Lemme 2 : soit v une configuration positive telle que $v_j < d_j$ pour tout $j \in S_{>i}$. On considère une suite d'éboulements $v \xrightarrow{*} w$ telle que seuls des nœuds de $S_{\geq i}$ ont été éboulés et $w_j < d_j$ pour tout $j \in S_{\geq i}$. Alors chaque nœud de $S_{\geq i}$ a été éboulé au plus $\mu_i(v)$ fois.

Démonstration : on écrit $v = v' + \sum_{k \in S_i} v_k x_k$, c'est-à-dire $v'_j = 0$ si $j \in S_i$ et $v'_j = v_j$ sinon. Donc v' satisfait aux hypothèses du lemme 1. En ajoutant un à un à v' les grains de la configuration $\sum_{k \in S_i} v_k x_k$, et en effectuant tous les éboulements possibles dans $S_{\geq i}$ entre chaque ajout, on obtient une suite d'éboulements $v \xrightarrow{*} w'$ telle que chaque nœud de $S_{\geq i}$ a été éboulé au plus $\sum_{k \in S_i} v_k = \mu_i(v)$ fois. Par adaptation de la réponse donnée en 3.2.b, on voit que $w' = w$ donc les éboulements effectués sont à l'ordre près ceux effectués dans n'importe quelle suite d'éboulements $v \xrightarrow{*} w$.

Proposition : l'algorithme donné dans l'énoncé effectue au plus $\mu_{\geq i}(u) \text{card}(S_{\geq i})$ éboulements lors de l'étape i .

Démonstration : Soit v, w les configurations à l'entrée et à la sortie de l'étape i . Donc v et w satisfont aux hypothèses du lemme 2. Puisqu'on n'a effectué dans les étapes précédentes que des éboulements de nœuds à la distance au moins $i + 1$ du puits, on a $\mu_i(v) \leq \mu_{\geq i}(v) = \mu_{\geq i}(u)$. La majoration obtenue au lemme 2 permet alors de conclure.

Complexité d'une avalanche $u \xrightarrow{*} v$: en appliquant l'inégalité précédente à chaque étape et en remarquant que la valeur de $\mu_{\geq i}$ sur la configuration en cours n'est pas modifiée avant l'étape i , on obtient :

$$\text{nombre total d'éboulements} \leq \sum_{i=1}^{\ell} \mu_{\geq i}(u) \text{card}(S_{\geq i}) \leq \ell n p.$$

4.4) u étant stable, le nombre de grains hors du puits pour u est majoré par $\sum_{i=1}^{n-1} (d_i - 1) \leq \sum_{i=1}^n (d_i - 1) = 2m - n$. $\varepsilon = 2\delta - (\delta \oplus \delta)$ donc le nombre de grains hors du puits pour ε est majoré par $2 \sum_{i=1}^{n-1} d_i \leq 4m$. D'après la question précédente, la complexité d'une avalanche à partir de $u + \varepsilon$ est majorée par $\ell n (6m - n) = O(n^3 \ell)$. On obtient de même une majoration par $O(n^3 \ell)$ pour le calcul de $u \oplus v$ si u et v sont récurrentes ou plus généralement stables.

4.5) *Erreur d'énoncé* : supposer u stable.

Si u est stable et $u + \beta \xrightarrow{*} u$ alors u est récurrente par définition. Si u est récurrente alors $u + \beta \xrightarrow{*} u \oplus \beta$ et on sait depuis 3.7 que $u \oplus \beta$ est l'unique configuration récurrente dans $u + \beta + \langle \Delta_1, \dots, \Delta_n \rangle = u + \langle \Delta_1, \dots, \Delta_n \rangle$. D'où $u + \beta \xrightarrow{*} u$.

Si u est récurrente, soient i_1, \dots, i_p les nœuds éboulés dans $u + \beta \xrightarrow{*} u$. On a donc $u = u + \beta - \Delta_{i_1} - \dots - \Delta_{i_p}$, soit $\Delta_{i_1} + \dots + \Delta_{i_p} = \beta = -\Delta_n = \Delta_1 + \dots + \Delta_{n-1}$. Par liberté de $(\Delta_1, \dots, \Delta_{n-1})$ on en déduit que (i_1, \dots, i_p) est une permutation de $(1, \dots, n - 1)$, donc chaque nœud autre que le puits est éboulé exactement une fois.

L'algorithme suivant vérifie que u est récurrente.

- Vérifier que $0 \leq u_i < d_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$.
- $I \leftarrow \emptyset$ (sommets instables), $S \leftarrow \{1, \dots, n-1\}$ (sommets stables).
- Pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$:
 - $u_i \leftarrow u_i + 1$;
 - déplacer i de S vers I si $u_i = d_i$.
- Tant que $I \neq \emptyset$:
 - choisir un sommet $i \in I$;
 - l'ébouler ;
 - déplacer de S vers I les voisins devenus instables ;
 - retirer i de I .
- Vérifier que $S = \emptyset$.
- Vérifier que $u_i < d_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

La complexité spatiale est $O(n)$ et la complexité temporelle est $O(n+m)$ si l'on représente I par une liste chaînée, S par un tableau de booléens, u par un tableau de valeurs et le graphe par un tableau de listes d'adjacence.

4.6) $u^{(i+1)}$ est la configuration déduite de $u^{(i)}$ par éboulement simultané de tous les nœuds instables donc est déduite de $u^{(0)}$ par éboulements. Comme il n'existe pas de suite infinie d'éboulements à partir d'une configuration donnée, l'algorithme termine et fournit, comme dernière configuration, $u^{(p+1)} = u \oplus \beta$. Si u est récurrente alors chaque nœud autre que le puits est éboulé une et une seule fois donc (R_0, \dots, R_p) est une partition de $\{1, \dots, n-1\}$ et (R_{-1}, \dots, R_p) est une partition de $\{1, \dots, n\}$. Considérons alors un nœud $k \in R_i$. Si $i \geq 1$, ce nœud était stable dans $u^{(i-1)}$ donc les $u_k^{(i)} - d_k + 1$ grains surnuméraires proviennent tous des éboulements de R_{i-1} . Il en résulte que $V_k \cap R_{i-1}$ a au moins $u_k^{(i)} - d_k + 1$ éléments et donc la sélection du $(u_k^{(i)} - d_k + 1)$ -ème élément de cet ensemble est valide. On peut tenir le même raisonnement si $i = 0$ en posant $u^{(-1)} = u$.

4.7) Pour $i \geq 1$ et pour chaque nœud $k \in R_i$, il existe une et une seule arête dans A menant de k à un sommet $\ell \in R_{i-1}$, donc tout nœud de X est relié par un unique chemin dans T au nœud n . Ceci prouve que T est connexe sans cycle ; c'est un arbre couvrant de G .

4.8) Soient u, v deux configurations récurrentes ayant même arbre couvrant associé T . Les ensembles R_i obtenus dans l'algorithme thermique à partir de u et v sont donc les mêmes car R_i est calculable à partir de T : c'est l'ensemble des nœuds à la distance $i+1$ de n dans T . Il en résulte que $u - u^{(i)} = \sum_{j \in R_{-1} \cup \dots \cup R_{i-1}} \Delta_j = v - v^{(i)}$ pour tout i . Enfin si $k \in R_i$ et si ℓ est l'ascendant de k dans R_{i-1} alors $u_k^{(i)} - d_k + 1 = \text{rang de } \ell \text{ dans } V_k \cap R_{i-1} = v_k^{(i)} - d_k + 1$ donc $u_k^{(i)} = v_k^{(i)}$, et $u_k = v_k$. Ainsi u et v coïncident sur $R_0 \cup \dots \cup R_p = \{1, \dots, n-1\}$.

Par contre rien ne permet d'affirmer que $u_n = v_n$; c'est une hypothèse manquante dans l'énoncé.

4.9) La réponse précédente fournit une construction de u à partir de T :

- soit R_i l'ensemble des nœuds à la distance $i+1$ de n dans T ;
- pour tout $i \in \mathbf{N}$ et tout $k \in R_i$:
 - soit ℓ l'ascendant de k dans R_{i-1} ;
 - poser $u_k = (\sum_{j \in R_{-1} \cup \dots \cup R_{i-1}} \Delta_j)_k + d_k - 1 + (\text{rang de } \ell \text{ dans } V_k \cap R_{i-1})$;
 - choisir u_n arbitrairement.

Il reste à vérifier que u est ainsi bien définie, positive, stable, récurrente et que l'algorithme thermique appliqué à u redonne T .

u est bien définie : soit p la plus grande distance entre n et un nœud quelconque de X . Par construction la famille $(R_i)_{-1 \leq i \leq p}$ est une partition de X . Si $i \in \{0, \dots, p\}$ et $k \in R_i$ alors ℓ est bien défini et appartient à $V_k \cap R_{i-1}$ par définitions de V_k et R_{i-1} donc la formule définissant u_k a un sens. Ainsi u_k est défini sans ambiguïté pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$.

u est positive : Soit $i \in \{0, \dots, p\}$ et $k \in R_i$. $(\sum_{j \in R_{-1} \cup \dots \cup R_{i-1}} \Delta_j)_k = -\text{card}(V_k \cap (R_{-1} \cup \dots \cup R_{i-1})) \geq -d_k$ donc $u_k \geq 0$.

u est stable : avec les mêmes notations, $(\sum_{j \in R_{-1} \cup \dots \cup R_{i-1}} \Delta_j)_k \leq -\text{card}(V_k \cap R_{i-1})$ donc $u_k \leq d_k - 1$.

Algorithme thermique pour u : on note R'_i les ensembles notés R_i dans l'algorithme thermique appliqué à u et on vérifie par récurrence sur $i \geq -1$ que $R'_i = R_i$. C'est évident si $i = -1$. Si $i \in \mathbb{N}$ et si $R'_j = R_j$ pour tout $j < i$, considérons $k \in X$ et soit q tel que $k \in R_q$. Si $q \geq i$ alors :

$$u_k^{(i)} = u_k - \left(\sum_{j \in R'_{-1} \cup \dots \cup R'_{i-1}} \Delta_j \right)_k = \left(\sum_{j \in R_i \cup \dots \cup R_{q-1}} \Delta_j \right)_k + d_k - 1 + (\text{rang de } \ell \text{ dans } V_k \cap R_{q-1}).$$

Puisque $k \in R_q$ on a $k \notin R_i \cup \dots \cup R_{q-1}$ et donc $(\sum_{j \in R_i \cup \dots \cup R_{q-1}} \Delta_j)_k = -\text{card}(V_k \cap (R_i \cup \dots \cup R_{q-1}))$. On en déduit $k \in R'_i \iff u_k^{(i)} \geq d_k \iff \text{card}(V_k \cap (R_i \cup \dots \cup R_{q-1})) + 1 \leq (\text{rang de } \ell \text{ dans } V_k \cap R_{q-1}) \iff q = i$.

Si $q > i$ on a de même :

$$\begin{aligned} u_k^{(i)} &= - \left(\sum_{j \in R_q \cup \dots \cup R_{i-1}} \Delta_j \right)_k + d_k - 1 + (\text{rang de } \ell \text{ dans } V_k \cap R_{q-1}) \\ &= \text{card}(V_k \cap (R_q \cup \dots \cup R_{i-1})) - 1 + (\text{rang de } \ell \text{ dans } V_k \cap R_{q-1}). \\ &\leq \text{card}(V_k \cap (R_{q-1} \cup \dots \cup R_{i-1})) - 1 \\ &< d_k. \end{aligned}$$

Donc $k \notin R'_i$. Ainsi R_i et R'_i contiennent les mêmes éléments ; ces ensembles sont égaux et la récurrence est terminée.

On en déduit alors que le nœud ℓ donné dans la définition de u et celui défini dans l'algorithme thermique coïncident pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, et donc les arêtes de l'arbre couvrant produit par l'algorithme thermique sont exactement celles de T . En conclusion : l'algorithme thermique appliqué à u donne l'arbre couvrant T .

u est récurrente : d'après les calculs précédents, pour $k \in \{1, \dots, n-1\}$ on a

$$\begin{aligned} u_k^{(p+1)} &= \text{card}(V_k \cap (R_{q-1} \cup \dots \cup R_p)) - 1 + (\text{rang de } \ell \text{ dans } V_k \cap R_{q-1}) \\ &= d_k - 1 + (\text{rang de } \ell \text{ dans } V_k \cap R_{q-1}) \\ &= u_k \end{aligned}$$

car tout voisin de k est à la distance au moins $q-1$ de n dans T . On a aussi $u_n^{(p+1)} = u_n$ car le nombre total de grains est conservé dans l'algorithme thermique, d'où $u = u^{(p+1)} = u \oplus \beta$. Sachant que u est stable, on en déduit que u est récurrente d'après 4.5.

- 4.10) On déduit des deux questions précédentes qu'il y a bijection entre l'ensemble des arbres couvrants de G et l'ensemble des configurations récurrentes ayant un nombre fixé de grains dans le puits (neuvième et dernière erreur de l'énoncé). En particulier ces ensembles ont même cardinal.

Fin du corrigé