Épreuve commune Maths ENS Paris Lyon Cachan 2009

A - Fonction d'exclusion associée à un polynôme

$n \in \mathbb{N}^*$, $(a_0, a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $a_n \neq 0$.

$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Z est l'ensemble des racines réelles de P, on suppose $Z \neq \emptyset$.

QA.1) $x \in \mathbb{R}$ est fixé.

$$M(x,t) = |P(x)| - \sum_{k=1}^{n} \frac{\left|P^{(k)}(x)\right|}{k!} t^k$$

P est un polynôme de degré n, $P^{(n)}$ est donc un polynôme constant égal à $a_n \times n!$.
La fonction $H : t \mapsto M(x,t)$ est une fonction polynôme de degré n, de coefficient dominant $-|a_n|$.
Sa dérivée est $H' : t \mapsto -\sum_{k=1}^{n} k \frac{\left|P^{(k)}(x)\right|}{k!} t^{k-1}$. Si $t > 0$, $H'(t) \leq -n|a_n|t^{n-1} < 0$.
La fonction est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. Comme elle est continue en 0, elle est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. La fonction H est continue, strictement monotone sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$. L'intervalle image est $H(I) =]\lim_{t \to +\infty} H(t), H(0)]$.
H réalise une bijection de I sur $H(I)$.
Mais $H(t) \sim_{+\infty} -|a_n|t^n$ et donc $\lim_{t \to +\infty} H(t) = -\infty$. De plus $H(0) = |P(x)| \geq 0$.
$0 \in H(I)$ et possède un antécédent unique par H.
Il existe bien un unique réel positif, noté $m(x)$ tel que $H(m(x)) = M(x, m(x)) = 0$.

QA.2) $P(x) = x^2 - 1$. $M(x,t) = |x^2-1| - |2x|t - t^2 = -\left((t+|x|)^2 - |x|^2 - |x^2-1|\right)$.
L'unique racine positive est $m(x) = -|x| + \sqrt{x^2 + |x^2 - 1|}$.
La fonction m est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty - 1[$, $]-1, 0[$,$]0, 1[$ et $]1, +\infty[$, par composition et somme de fonctions dérivables.

- Si $x < -1$, $m(x) = x + \sqrt{2x^2 - 1}$, $m'(x) = 1 + \frac{2x}{\sqrt{2x^2 - 1}}$
  $\lim_{x \to -1^-} m'(x) = -1$. Comme m est continue en -1, le théorème d'extension du caractère dérivable permet d'affirmer que m est dérivable à gauche en -1 et $m'_g(-1) = -1$.
- Sur $]-1, 0[$, $m(x) = x + 1$. $m'_d(-1) = 1$, $m'_g(0) = 1$.
- Sur $]0, 1[$, $m(x) = -x + 1$. $m'_d(0) = -1$, $m'_g(1) = -1$.
- Sur $]1, +\infty[$, $m(x) = -x + \sqrt{2x^2 - 1}$. $m'_d(1) = 1$.

QA.3) La fonction $t \to M(x,t)$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et s'annule de manière unique en $t = m(x)$. Donc pour $t \geq 0$, $t = m(x) \Leftrightarrow M(x,t) = 0$.
Or $M(x, 0) = |P(x)|$.
Donc $m(x) = 0 \Leftrightarrow |P(x)| = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0$.

QA.4) Soit x, y deux réels. Appliquons la formule de Taylor à l'ordre n à P entre x et y. La dérivée $(n+1)$-ème de P est nulle donc :
$P(y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(x)}{k!}(y-x)^k$ et $P(x) = P(y) - \sum_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}(x)}{k!}(y-x)^k$.
On a : $|P(x)| \leq |P(y)| + \sum_{k=1}^{n} \frac{|P^{(k)}(x)|}{k!}|y-x|^k$ et donc
$|P(y)| \geq |P(x)| - \sum_{k=1}^{n} \frac{\left|P^{(k)}(x)\right|}{k!}|y-x|^k = M\left(x, |y-x|\right)$.
Si $P(x) \neq 0$, le réel $m(x)$ est strictement positif. Vu la stricte décroissance sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction $t \mapsto M(x,t)$ la condition $|y-x| < m(x)$ entraîne $M(x, |y-x|) > 0$. L'inégalité précédente permet alors de conclure que $|P(y)| > 0$ et en particulier $P(y) \neq 0$.

QA.5) Soit $x \in \mathbb{R}$ avec $P(x) \neq 0$. D'après la question précédente, l'intervalle $]x - m(x), x + m(x)[$ ne contient pas de racine de P. Donc $d(x, Z) \geq m(x)$.
Si $P(x) = 0$, $m(x) = 0$ et $x \in Z$ donc $d(x, Z) = 0$. Dans tous les cas :

$$m(x) \leq d(x, Z).$$

QA.6) $\varepsilon > 0$ est fixé et $x \in \mathbb{R}$.
QA.6.1) Si $m(x) > \varepsilon$, les deux réels $m(x) + \varepsilon$ et $m(x) - \varepsilon$ sont strictement positifs et, vu la stricte décroissance de $t \mapsto M(x,t)$ sur $\mathbb{R}^+$ on a :

$$M\left(x, m(x) + \varepsilon\right) < M(x, m(x)) = 0 < M\left(x, m(x) - \varepsilon\right)$$

La fonction $X \mapsto M(X, m(x) + \varepsilon)$ est continue sur $\mathbb{R}$ (x est fixé). Notons α sa valeur en x. $\alpha = M(x, x + m(x)) < 0$. Par continuité il existe $\eta_1 > 0$ tel que $|X - x| < \eta_1 \Rightarrow M(X, m(x) - \varepsilon) \in \left]\frac{3\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right[$.
Et : $|y - x| < \eta_1 \Rightarrow M(y, m(x) + \varepsilon) < \alpha/2 < 0$.
Le même raisonnement avec la fonction $X \mapsto M(X, m(x) - \varepsilon)$ donne l'existence d'un réel η_2 tel que : $|y - x| < \eta_2 \Rightarrow M(y, m(x) + \varepsilon) > M(x, m(x) + \varepsilon)/2 > 0$.
Avec $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$, $|x - y| < \eta \Rightarrow M\left(y, m(x) + \varepsilon\right) < 0 < M\left(y, m(x) - \varepsilon\right)$.

QA.6.2) Si $m(x) \leq \varepsilon$, l'étude précédente donne l'existence de $\eta > 0$ tel que
$|x - y| < \eta \Rightarrow M\left(y, m(x) + \varepsilon\right) < 0$.

QA.6.3) Pour tout z l'application $t \mapsto M(z, t)$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
Si $t \geq 0$, $M(z, t) > 0 \Leftrightarrow t < m(z)$ et $M(z, t) < 0 \Leftrightarrow t > m(z)$.
Soit x fixé et $\varepsilon > 0$.

- Si $m(x) > \varepsilon$ soit $\eta > 0$ obtenu dans la question précédente :
  $|x - y| < \eta \Rightarrow M\left(y, m(x) + \varepsilon\right) < 0 < M\left(y, m(x) - \varepsilon\right)$
  $|x - y| < \eta \Rightarrow m(x) + \varepsilon > m(y) \,\text{et}\, m(x) - \varepsilon < m(y)$
  $|x - y| < \eta \Rightarrow -\varepsilon < m(y) - m(x) < \varepsilon$
- Si $m(x) \leq \varepsilon$ le η obtenu donne :
  $|x - y| < \eta \Rightarrow m(y) - m(x) < \varepsilon$ mais aussi $m(y) \geq 0$ et $-m(x) \geq -\varepsilon$ et donc $m(y) - m(x) \geq -\varepsilon$.

On a donc montré que :
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \,/\, |x-y| < \eta \Rightarrow |m(x)-m(y)| \leq \varepsilon$.
La fonction m est continue en tout point x de $\mathbb{R}$.

QA.7) Étude de la dérivabilité de m :

QA.7.1) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $h \neq 0$.

$$0 = M(x, m(x)) = |P(x)| - \sum_{k=1}^{n} \frac{|P^{(k)}(x)|}{k!} m(x)^k$$

$$0 = M(x+h, m(x+h)) = |P(x+h)| - \sum_{k=1}^{n} \frac{|P^{(k)}(x+h)|}{k!} m(x+h)^k$$

Par différence, et en divisant par h on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{|P(x+h)| - |P(x)|}{h} - & \sum_{k=1}^{n} \left|P^{(k)}(x+h)\right| \frac{m(x+h)^k - m(x)^k}{hk!} \\ - & \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\left|P^{(k)}(x+h)\right| - \left|P^{(k)}(x)\right|}{hk!} m(x)^k = 0. \end{aligned}$$

QA.7.2) $x \in \mathbb{R}$, $P^{(k)}(x) \neq 0$ pour $k = 0..(n-1)$. Par continuité de P et de ses dérivées successives, il existe un intervalle ouvert de centre x tel que chacune des dérivées de P garde un signe constant sur cet intervalle.
Pour h assez petit l'égalité précédente s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{signe(P(x))\,(P(x+h)-P(x))}{h} - & \sum_{k=1}^{n} \left|P^{(k)}(x+h)\right| \frac{m(x+h)^k - m(x)^k}{hk!} \\ - & \sum_{k=1}^{n-1} signe(P^{(k)}(x)) \frac{P^{(k)}(x+h) - P^{(k)}(x)}{hk!} m(x)^k = 0. \end{aligned}$$

Notons $A(h) = \dfrac{signe(P(x))\,(P(x+h)-P(x))}{h}$. $\lim\limits_{h\to 0} A(h) = signe(P(x))P'(x)$.
De même si $B(h) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} signe(P^{(k)}(x)) \frac{P^{(k)}(x+h) - P^{(k)}(x)}{hk!} m(x)^k$,
$\lim\limits_{h\to 0} B(h) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} signe(P^{(k)}(x)) \frac{P^{(k+1)}(x)}{k!} m(x)^k$.
D'autre part pour $k \geq 1$ donné : $m(x+h)^k - m(x)^k = (m(x+h)-m(x))\,T(k,h)$ avec $T(k,h) = \displaystyle\sum_{r=0}^{k-1} m(x+h)^r m(x)^{k-1-r}$. Il vient :

$$\frac{m(x+h)-m(x)}{h} \left(\sum_{k=1}^{n} \left|P^{(k)}(x+h)\right| T(k,h) \right) = A(h) - B(h)$$

Or : $\lim\limits_{h\to 0} \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left|P^{(k)}(x+h)\right| T(k,h) \right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left|P^{(k)}(x)\right| k m(x)^{k-1}$.

Comme $m(x) > 0$ car $P(x) \neq 0$, cette dernière limite est non nulle.
On en déduit que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{m(x+h) - m(x)}{h}$ existe. m est dérivable en x et en remplaçant et en effectuant un changement d'indice on obtient :

$$m'(x) = \frac{P'(x) signe\left(P(x)\right) - \sum_{k=2}^{n} P^{(k)}(x) signe\left(P^{(k-1)}(x)\right) m(x)^{k-1}/(k-1)!}{\sum_{k=1}^{n} |P^{(k)}(x)|\, m(x)^{k-1}/(k-1)!}$$

QA.7.3) On obtient des formules similaires sur des intervalles à gauche ou à droite de 0, le signe des quantités restant constant sur l'intervalle d'étude. On obtient :
$\dfrac{m(x+h) - m(x)}{h} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \left|P^{(k)}(x+h)\right| T(k,h) \right) = A_1(h) - B_1(h).$
L'expression en facteur a une limite non nulle, supérieure à $n|a_n| m(x)^{n-1}$.
Le taux d'accroissement de m en x a donc une limite à gauche et à droite. La fonction est dérivable à gauche et à droite en x.
L'étude de l'exemple montre que la fonction m peut ne pas être dérivable.

QA.7.4) On suppose désormais et jusqu'à la fin de la partie A que toutes les racines réelles de P sont simples. Soit x l'une de ces racines. $P(x) = m(x) = 0$ et $P'(x) \neq 0$ car x est racine simple de P.
La formule de la question $QA.7.1)$: devient :

$$\frac{|P(x+h)|}{h} - \sum_{k=1}^{n} \left|P^{(k)}(x+h)\right| \frac{m(x+h)^k}{hk!} = 0$$

$$\frac{|P(x+h)|}{h} = \frac{m(x+h)}{h} \sum_{k=1}^{n} \left|P^{(k)}(x+h)\right| \frac{m(x+h)^{k-1}}{k!}$$

Notons $A_2(h) = \sum\limits_{k=1}^{n} \left|P^{(k)}(x+h)\right| \dfrac{m(x+h)^{k-1}}{k!}$.
Par continuité de m et des dérivées de P, $\lim\limits_{h \to 0} A_2(h) = |P'(xh)| \neq 0$.
On peut donc trouver un intervalle $]x, x+r]$ où l'on peut écrire :
$\dfrac{m(x+h)}{h} = \varepsilon_0 \dfrac{P(x+h)}{h} \times \dfrac{1}{A_2(h)}$ avec $\varepsilon_O = \pm 1$. On obtient :
$\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{m(x+h) - m(x)}{h} = \varepsilon_0 \times \dfrac{P'(x)}{|P'(x)|} = \pm 1.$
m est bien dérivable à droite en x, racine de P. Comme, pour $h > 0$, $m(x+h)/h \geq 0$, la limite du taux d'accroissement est ici $+1$.
De manière identique on montre que m est dérivable à gauche en x et $m'_g(x) = -1$.

QA.8) En tout point x où m est dérivable on a :

$$|m'(x)| = \frac{\left|P'(x) signe\left(P(x)\right) - \sum_{k=2}^{n} P^{(k)}(x) signe\left(P^{(k-1)}(x)\right) m(x)^{k-1}\right| /(k-1)!}{\sum_{k=1}^{n} |P^{(k)}(x)|\, m(x)^{k-1}/(k-1)!}$$

$$|m'(x)| \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} \left|P^{(k)}(x)\right| m(x)^{k-1}/(k-1)!}{\sum_{k=1}^{n} |P^{(k)}(x)|\, m(x)^{k-1}/(k-1)!} = 1$$

Soit alors deux réels x, y avec $x \leq y$

- si m est dérivable sur $]x, y[$; comme m est continue sur $[x, y]$, et que m' est bornée, on peut appliquer l'inégalité des accroissements finis

$$|m(y) - m(x)| \leq \sup_{t \in]x,y[} |m'(t)| \times |y - x| \leq |y - x|$$

- si non il existe un nombre fini de points $z_1, ..., z_r$ avec $x < z_1 < ... < z_r < y$ où m n'est pas dérivable. Mais on peut écrire :

$$|m(y) - m(x)| = |m(y) - m(z_r) + m(z_r) - ... - m(z_1) + m(z_1) - m(x)|$$

$$|m(y) - m(x)| \leq |m(y) - m(z_r)| + ... + |m(z_1) - m(x)| \leq |y - z_r| + ... + |z_1 - x|$$

$$|m(y) - m(x)| \leq y - z_r + ... + z_1 - x = y - x$$

Même étude en échangeant le rôle de x et y. Donc :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |m(y) - m(x)| \leq |y - x|$$

QA.9) On admet l'existence de

$$m_- = \lim_{x \to --\infty} \frac{m(x)}{|x|} \quad \text{et de} \quad m_+ = \lim_{x \to -+\infty} \frac{m(x)}{|x|}$$

QA.9.1) Pour tout entier k, $1 \leq k \leq n$:
$P^{(k)}(x) =_{+\infty} n(n-1)...(n-k+1)a_n x^{n-k} + o(x^{n-k})$ et $m(x) =_{+\infty} m_+ x + o(x)$.
D'où $|P^{(k)}(x)| m(x)^k =_{+\infty} \dfrac{n!}{(n-k)!} |a_n| m_+^k x^n + o(x^n)$
La formule (1) donne : $|a_n| x^n - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} m_-^k x^n + o(x^n) = 0$.
Comme $a_n \neq 0$, $1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} m_+^k =_{+\infty} o(1)$.
La constante ainsi obtenue est donc nulle. La même étude en $-\infty$ donne :

$$1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} m_-^k = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} m_+^k = 0.$$

QA.9.2) On obtient : $1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} m_+^k = 0 = 2 - (1 + m_+)^n$.
Comme $m_+ \geq 0$, $m_+ = \sqrt[n]{2} - 1$. Idem pour m_-.

QA.10) Soit f la fonction égale à $f(x) = \dfrac{m(x)}{d(x, Z)}$ si $x \notin Z$ et égale à 1 sinon.
Nous allons montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

- si $x \notin Z$, comme Z est un ensemble fini il existe un réel $r > 0$ et un élément $x_i \in Z$ tel que, $\forall y \in]x-r, x+r[$, $d(y,Z) = |y - x_i|$.
  Sur cet intervalle, $f(y) = \dfrac{m(y)}{|y - x_i|}$ ce qui assure la continuité de f en x.
- si $x \in Z$, il existe $r > 0$ tel que , $\forall y \in]x-r, x+r[$, $d(y,Z) = |y - x|$.
  $m(x) = 0$. m est dérivable à gauche en x et $m'_g(x) = -1$ donc
  $m(y) =_{x^-} -(y-x) + o(y-x) = |y-x| + o(y-x)$.
  Même étude à droite. $m(y) =_x |y-x| + o(y-x)$ et donc $\lim\limits_{y \to x} f(y) = 1 = f(x)$.

Soit alors $x_1, ..., x_n$ les racines de P rangées dans l'ordre croissant.
Pour $x > x_n$, $d(x,Z) = x - x_n$ et $f(x) = \dfrac{m(x)}{x - x_n} \sim_{+\infty} \dfrac{m(x)}{x} \to m^+$.
De même $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = m^- = m^+ > 0$.
On peut trouver un réel A tel que : $|x| \geq A \Rightarrow f(x) \in \left[\dfrac{m^+}{2}, \dfrac{3m^+}{2}\right]$.
Mais f est continue sur le segment $[-A, A]$ et $f([-A,A])$ est un segment $[a,b]$ avec $a > 0$ car f ne prend que des valeurs strictement positives.
Soit $\alpha_n = \min(m^+/2, a)$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq \alpha_n > 0$.
On obtient donc pour tout x réel :

$$\alpha_n d(x,Z) \leq m(x)$$

B - Détermination d'un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant toutes les racines de P.

On note $x_0 = \max\limits_{x \in Z} |x|$.On suppose $a_n = 1$ et $(a_0, a_1, ..., a_{n-1}) \neq (0, 0, ..., 0)$.

QB.1) $Q(x) = x^n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| x^k$.
Pour $x \neq 0$, $Q(x) = x^n \left(1 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| x^{k-n}\right) = x^n H_1(x)$.
La fonction H_1 est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée strictement positive car l'un au moins des a_k est non nul. $\lim\limits_{x \to 0^+} H_1(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} H_1(x) = 1$. H_1 réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $]-\infty, 1[$. Il existe donc un unique $r_0 > 0$ tel que $H_1(r_0) = 0$.
Mais pour $x \neq 0$, $Q(x) = 0 \Leftrightarrow H_1(x) = 0$ d'où r_0 est l'unique réel strictement positif pour lequel Q s'annule.

QB.2) Si $x_0 = 0$, toutes les égalités à démontrer sont vérifiées. On supposera donc dans la suite $x_0 > 0$.
Il existe un élément $x_i \in Z$ tel que $x_0 = |x_i|$. Mais $P(x_i) = 0$ donc :
$x_i^n = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k x_i^k \Rightarrow |x_i|^n = x_0^n = \left|\sum_{k=1}^{n-1} a_k x_i^k\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| x_0^k$.

On obtient $Q(x_0) \leq 0$, $H_1(x_0) \leq 0$ et donc $x_0 \leq r_0$.
Si $r > 0$ vérifie, $Q(r) > 0$ alors $H_1(r) > 0$ et d'après les variations de H_1, $r > r_0$.
Donc en résumé si $r > 0$ vérifie $Q(r) > 0$ alors on a $x_0 \leq r$.

QB.3)

- ou bien $x_0 \leq 1$ et l'inégalité demandée est vraie
- ou bien $x_0 > 1$ et pour tout k avec $0 \leq k \leq n-1$, $x_0^k \leq x_0^{n-1}$.
  L'inégalité de **QB.2)** donne : $x_0^n \leq \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\right) x_0^{n-1}$.
  Comme $x_0 > 0$ on a : $x_0 \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$.

On a toujours : $x_0 \leq \max\left(1, \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\right)$.

QB.4) Si $P(x) = 0$, $P_1(x) = (x-1)P(x) = 0$.
En développant on obtient : $x^{n+1} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k)x^k - a_0 = 0$.
Soit alors Z_1 l'ensemble des racines de P_1. $Z_1 = Z \cup \{1\}$.
Notons $x'_0 = \displaystyle\sup_{x \in Z_1} |x|$. On a : $x_0 \leq x'_0$ et $x'_0 \geq 1$.
En appliquant le résultat de la question précédente à x'_0 et P_1 on obtient :

$$x_0 \leq x'_0 \leq |a_{n-1} - 1| + \sum_{k=1}^{n-1} |a_k - a_{k-1}| + |a_0|.$$

QB.5) Supposons que $x_0 > 2|a_{n-1}|$, $x_0 > 2\dfrac{|a_{n-2}|}{|a_{n-1}|}$,...,$x_0 > 2\dfrac{|a_1|}{|a_2|}$ et $x_0 > \dfrac{|a_0|}{|a_1|}$.
On a alors : $|a_{n-1}| < \dfrac{x_0}{2}$, $|a_{n-2}| < \dfrac{x_0^2}{2^2}$, ..., $|a_1| < \dfrac{x_0^{n-1}}{2^{n-1}}$, $|a_0| < \dfrac{x_0^n}{2^{n-1}}$.
Mais : $x_0^n \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| x_0^k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x_0^k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_0^n}{2^{n-k}} + \frac{x_0^n}{2^{n-1}}\right)$.
Comme $x_0 > 0$, $1 < \dfrac{1}{2^n}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k + 2\right) = \dfrac{1}{2^n}\left(\dfrac{2^n - 1}{2-1} - 1 + 2\right) = 1$.
Contradiction. Donc x_0 est inférieur à au moins l'un des réels utilisés plus haut et :

$$x_0 \leq \max\left(2|a_{n-1}|, 2\frac{|a_{n-2}|}{|a_{n-1}|}, ..., 2\frac{|a_1|}{|a_2|}, \frac{|a_0|}{|a_1|}\right)$$

QB.6)

- $P(x) = 1 + x + x^2 + x^3$.
  Par **QB.4**, $x_0 \leq 1$ et par **QB.5** $x_0 \leq 2$.

- $P(x) = \frac{25}{12} + \frac{11}{6}x + \frac{3}{2}x^2 + x^3$.
  Par **QB.4**, $x_0 \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{25}{12} = \frac{38}{12}$
  et par **QB.5** $x_0 \leq \max\left(3, \frac{22}{9}, \frac{25}{22}\right) = 3$.

C - Algorithme d'exclusion

$\varepsilon > 0$ est fixé, P a au moins une racine réelle et ses racines sont simples.
$Z = \{x_1, ..., x_p\}$. α_n a été introduit en **QA.10**.

$$B_{i,\varepsilon} = \left\{ x \in \mathbb{R} \text{ tels que } |x - x_i| \leq \frac{\varepsilon}{\alpha_n} \right\} \qquad Z_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{p} B_{i,\varepsilon}.$$

On va construire un ensemble F_ε tel que $Z \subset F_\varepsilon \subset Z_\varepsilon$.
Soit R tel que $Z \subset [-R, R]$. On construit une suite de réels $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite d'ensembles de $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

$y_0 = -R$ et $F_{0,\varepsilon} = \emptyset$.Le réel y_n et l'ensemble $F_{n,\varepsilon}$ étant connus, on construit y_{n+1} de la manière suivante :

- si $m(y_n) \geq \varepsilon/2$, on pose $y_{n+1} = y_n + m(y_n)$ et $F_{n+1,\varepsilon} = F_{n,\varepsilon}$.
- sinon on cherche le plus petit entier k strictement positif tel que $m(y_n + k\varepsilon) \geq \varepsilon/2$ et on pose $y_{n+1} = y_n + k\varepsilon$. On définit alors
  - si $y_n \leq y_{n+1} - m(y_{n+1})$:
    $F_{n+1,\varepsilon} = F_{n,\varepsilon} \cup [y_n, y_{n+1} - m(y_{n+1})]$
  - sinon $F_{n+1,\varepsilon} = F_{n,\varepsilon}$.

QC.1) Soit $x > R$; $d(x, Z) > x - R$ car $Z \subset [-R, R]$.
Et donc : $m(x) \geq \alpha_n d(x, Z) \geq \alpha_n(x - R)$. D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} m(x) = +\infty$.
Soit alors y un réel quelconque.

- ou bien $m(y) \geq \varepsilon/2$ et $y' = y + m(y) \geq y + \varepsilon/2$
- ou bien $m(y) < \varepsilon/2$ et dans ce cas on considère l'ensemble des entiers $\{p \in \mathbb{N}/m(y+p\varepsilon) \geq \varepsilon/2\}$. Cet ensemble n'est pas vide car, d'après la remarque préliminaire, $\lim\limits_{p\to+\infty} m(y + p\varepsilon) = +\infty$. Cet ensemble d'entiers possède donc un plus petit élément qui, d'après l'hypothèse , est strictement positif.
  Notons k cet entier et $y' = y + k\varepsilon$.
  On a encore $y' \geq y + \varepsilon/2$.

Ces remarques montrent que le réel y_{n+1} est toujours bien défini à partir de y_n et que $y_{n+1} - y_n \geq \varepsilon/2$. Donc pour tout n, $y_n \geq y_0 + n\varepsilon/2$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$, il existe un entier n_0 pour lequel $y_{n_0} > R$.

QC.2) Soit n entier positif donné. On définit deux ensembles G_n et H_n par :

- si $m(y_n) \geq \varepsilon/2$, $G_n = \emptyset$ et $H_n = [y_n, y_{n+1}[$
- si $m(y_n) < \varepsilon/2$,
  - $\star$ si $y_n \leq y_{n+1} - m(y_{n+1})$:
    $G_n = [y_n, y_{n+1} - m(y_{n+1}]$ et $H_n =]y_{n+1} - m(y_{n+1}), y_{n+1}[$
  - $\star$ sinon $G_n = \emptyset$ et $H_n = [y_n, y_{n+1}[$

Par construction , pour tout n :

- $G_n \cap H_n = \emptyset$, $G_n \cup H_n = [y_n, y_{n+1}[$
- $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} G_k = F_{n+1,\varepsilon}$
- Comme $Z \subset [-R, R] \subset [y_0, y_{n_0}[= \displaystyle\bigcup_{k=0}^{n_0-1} (G_k \cup H_k)$ et que les ensembles H_k et G_k sont disjoints, $Z = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n_0-1} (Z \cap G_k) \cup (Z \cap H_k)$
- Et donc $Z = (Z \cap F_{n_0,\varepsilon}) \cup \left(\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n_0-1} Z \cap H_k \right)$

Montrons donc que , pour tout n, $Z \cap H_n = \emptyset$. En effet :

- ou bien $m(y_n) \geq \varepsilon/2$ et $y_{n+1} = y_n + m(y_n)$, $H_n = [y_n, y_{n+1}[$.
  Pour tout $t \in H_n$, $|t - y_n| = t - y_n < m(y_n) \leq d(y_n, Z)$ donc $t \notin Z$.
- ou bien dans les deux cas de figure $H_n \subset]y_{n+1} - m(y_{n+1}), y_{n+1}[$
  et $t \in H_n \Rightarrow |t - y_{n+1}| < m(y_{n+1}) \leq d(y_{n+1}, Z) \Rightarrow t \notin Z$.

On a toujours $Z \cap H_n = \emptyset$ et donc $Z = Z \cap F_{n_0,\varepsilon}$ ce qui montre que

$$Z \subset F_{n_0,\varepsilon}.$$

QC.3) Montrons enfin que chaque G_n est inclus dans Z_ε.
Etudions les ensembles G_n non vides.
Dans ce cas $m(y_n) < \varepsilon/2$, $m(y_n + \varepsilon) < \varepsilon/2$,...,$m(y_n + (k-1)\varepsilon) < \varepsilon/2$
$m(y_n) + k\varepsilon \geq \varepsilon/2$, $y_{n+1} = m(y_n) + k\varepsilon$, $G_n = [y_n, y_{n+1} - m(y_{n+1}] \subset [y_n, y_{n+1}[$.
Chaque élément t de G_n est à une distance inférieure ou égale à $\varepsilon/2$ d'un des points $y_n, y_n + \varepsilon, ...y_n + (k-1)\varepsilon$.
Soit t dans G_n et y associé.
$\forall t \in G_n$, $\exists y \in \mathbb{R}$ tel que $m(y) < \varepsilon/2$ et $|t - y| \leq \varepsilon/2$.
Comme $\alpha_n d(y, Z) \leq m(y) < \varepsilon/2$, on a $d(y, Z) < \dfrac{\varepsilon}{2\alpha_n}$.
Il existe donc au moins un élément de Z , z, dans $\left] y - \dfrac{\varepsilon}{2\alpha_n}, y + \dfrac{\varepsilon}{2\alpha_n} \right[$.
On a alors : $|t - z| \leq |t - y| + |y - z| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2\alpha_n} \leq \dfrac{\varepsilon}{\alpha_n}$ car $0 < \alpha_n \leq 1$.
Donc, $\forall t \in G_n$, $t \in Z_\varepsilon$.

On a bien : $F_{n_0,\varepsilon} = \bigcup_{k=0}^{n_0-1} G_k \subset Z_\varepsilon$.

QC.4) Supposons que les valeurs de $m(x)$ soient toutes connues à η près avec $\eta > 0$ quelconque.. Notons pour x donné, $\tilde{m}(x)$ la valeur obtenue ;

$$m(x) \in]\tilde{m}(x) - \eta, \tilde{m}(x) + \eta[$$

On prend $\varepsilon = 4\eta$. On modifie la construction de la suite et des ensembles de la manière suivante.
Supposons y_n connu.

1. Si $\tilde{m}(y_n) \geq \varepsilon/2$, on a $m(y_n) \geq \tilde{m}(y_n) - \eta \geq \varepsilon/2 - \eta = \varepsilon/4$.
   On prend $y_{n+1} = y_n + \tilde{m}(y_n) - \eta$.
   $y_{n+1} - y_n \geq \varepsilon/4$ et $d(y_n, Z) \geq m(y_n) \geq \tilde{m}(y_n) - \eta$.
   Il n'y a donc pas d'éléments de Z dans $[y_n, y_{n+1}[$.
2. Si $\tilde{m}(y_n) < \varepsilon/2$, alors $m(y_n) \leq \tilde{m}(y_n) + \eta < \varepsilon/2 + \eta = 3\varepsilon/4$.
   On considère k, le plus petit entier strictement positif tel que
   $\tilde{m}(y_n + 3k\varepsilon/2) \geq \varepsilon/2$.
   On prend : $y_{n+1} = y_n + 3k\varepsilon/2$ et $y_{n+1} - y_n \geq 3\varepsilon/2 \geq \varepsilon/4$.
   On a alors $m(y_{n+1}) \geq \tilde{m}(y_{n+1}) - \eta \geq \varepsilon/4$
   Si $y_{n+1} - \tilde{m}(y_{n+1}) + \eta < y_n$ alors $y_{n+1} - m(y_{n+1}) < y_n$ et il n'y a pas d'éléments de Z dans $[y_n, y_{n+1}[$
   Sinon on étudie les éléments de l'ensemble $G'_n = [y_n, y_{n+1} - \tilde{m}(y_{n+1} + \eta]$ et $H'_n = [y_{n+1} - \tilde{m}(y_{n+1} + \eta, y_{n+1}$.
   Dans H'_n il n'y a pas d'éléments de Z et dans G'_n tout élément t est situé à une distance inférieure à $3\varepsilon/4$ d'un point x tel que $m(x) < 3\varepsilon/4$.
   La distance de x à Z est majorée par $3\varepsilon/4\alpha_n$.
   La distance de t à Z est majorée par $3\varepsilon/2\alpha_n$.

Fin de l'épreuve

Corrigé rédigé par Hugues Demongeot- PC Dijon ; merci de transmettre toute remarque, erreur ou omission décelée.*