

# I Forme Quadratique et Déterminant

I.A -

$$\text{I.A.1)} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}, \quad \text{alors : } \lambda A + A' = \begin{pmatrix} \lambda a + a' & \lambda b + b' \\ \lambda c + c' & \lambda d + d' \end{pmatrix}.$$

Ce qui donne :  $\text{tr}(\lambda A + A') = \lambda a + a' + \lambda d + d' = \lambda \text{tr}(A) + \text{tr}(A')$ .

On a bien la linéarité.

$$\text{D'autre part, } AA' = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix},$$

ce qui donne :  $\text{tr}(AA') = aa' + bc' + cb' + dd' = \text{tr}(A'A)$ .

Enfin, il est clair que  $\text{tr}({}^tA) = \text{tr}(A)$ .

**I.A.2)** Il faut montrer que la forme est bilinéaire symétrique, définie positive.

$\langle A|B \rangle = \text{tr}(A {}^tB) = \text{tr}({}^t(A {}^tB)) = \text{tr}(B {}^tA) = \langle B|A \rangle$ , la forme est symétrique.

$\langle \lambda A + A'|B \rangle = \text{tr}((\lambda A + A') {}^tB) = \text{tr}(\lambda A {}^tB + A' {}^tB) = \lambda \text{tr}(A {}^tB) + \text{tr}(A' {}^tB)$

$\langle \lambda A + A'|B \rangle = \lambda \langle A|B \rangle + \langle A'|B \rangle$ .

La forme est aussi linéaire par rapport à la première variable, elle est bilinéaire symétrique.

Etudions maintenant la forme quadratique.

$\langle A|A \rangle = \text{tr}(A {}^tA) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 0$ , la forme est positive.

$\langle A|A \rangle = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0 \Rightarrow a = b = c = d = 0 \Rightarrow A = 0$ .

La forme quadratique est bien définie positive, on a bien un produit scalaire sur  $M_2$ .

**I.B** Pour montrer qu'on a une base orthonormée, il faut montrer que les vecteurs-matrices sont normés et orthogonaux 2 à 2.

$E_1 {}^tE_1 = E_1$  dont la trace est 1 :  $E_1$  est normé.

$E_2 {}^tE_2 = E_2$  dont la trace est 1 :  $E_2$  est normé.

$E_3 {}^tE_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  dont la trace est 1 :  $E_3$  est normé.

$E_4 {}^tE_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  dont la trace est 1 :  $E_4$  est normé.

On aurait aussi pu utiliser  $\langle A|A \rangle = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ , l'expression obtenue à la question précédente, ce qui donne un peu moins de calculs.

$E_1 {}^tE_2 = 0$  dont la trace est 0 :  $E_1$  et  $E_2$  sont orthogonaux.

$E_1 {}^tE_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  dont la trace est 0 :  $E_1$  et  $E_3$  sont orthogonaux.

$E_1 {}^tE_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  dont la trace est 0 :  $E_1$  et  $E_4$  sont orthogonaux.

$E_2 {}^tE_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  dont la trace est 0 :  $E_2$  et  $E_3$  sont orthogonaux.

$E_2 {}^tE_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  dont la trace est 0 :  $E_2$  et  $E_4$  sont orthogonaux.

$E_3 {}^tE_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  dont la trace est 0 :  $E_3$  et  $E_4$  sont orthogonaux.

$\mathbf{B}_0$  est bien une base orthonormale.

## I.C -Déterminant

$$\text{I.C.1)} \quad M = \sum_{i=1}^4 x_i E_i = \begin{pmatrix} x_1 & \frac{1}{\sqrt{2}}(x_3 + x_4) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(x_3 - x_4) & x_2 \end{pmatrix}, \text{ ce qui donne :}$$

$$\det(M) = x_1 x_2 - \frac{1}{2}(x_3 - x_4)(x_3 + x_4) = x_1 x_2 + \frac{1}{2}(x_4^2 - x_3^2).$$

$$\text{I.C.2)} \quad \det \circ \Psi(a, b, c, d) = \det \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = ad - bc.$$

C'est un polynôme homogène de degré 2 en  $a, b, c, d$ , c'est donc une forme quadratique.

$$\text{La matrice de } \det \circ \Psi \text{ dans la base canonique est donc : } M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{La matrice, orthogonale, de changement de bases est : } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice de cette forme quadratique dans la nouvelle base est donc :  $P^{-1} M P = {}^t P M P$ .

Plus simplement, c'est aussi la matrice de la forme quadratique obtenue à la question précédente

$$\left( x_1 x_2 + \frac{1}{2}(x_4^2 - x_3^2) \right).$$

$$\text{En effet, } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \text{ d'où : } (a, b, c, d) = (x_1, x_2, x_3, x_4) {}^t P,$$

$$\text{ce qui donne : } \det(M) = (a, b, c, d) M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = (x_1, x_2, x_3, x_4) {}^t P M P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$x_1 x_2 + \frac{1}{2}(x_4^2 - x_3^2) = (x_1, x_2, x_3, x_4) {}^t P M P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \text{ donne bien : } {}^t P M P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

## II Forme Quadratique sur $M_2$

**II.A** Il est clair que le déterminant convient.

**II.B**  $q$  est non nulle, sinon,  $q \circ \Psi$  serait nulle, ce qui est contraire aux hypothèses.

Soit  $N$  telle que  $q(N) \neq 0$  et  $q(N) \neq 1$ , ce qui est possible car  $q(2N) = 4q(N)$ .

$q(0) = q(0 \times N) = q(0)q(N)$ , ce qui entraîne  $q(0)(q(N) - 1) = 0$ , et enfin  $q(0) = 0$ .

$q(N) = q(I \times N) = q(I)q(N)$ , ce qui entraîne  $q(N)(q(I) - 1) = 0$ , et enfin  $q(I) = 1$ .

**II.C** Si le rang de  $M$  est 2,  $M$  est inversible, et donc :  $q(I) = q(M M^{-1}) = q(M)q(M^{-1}) = 1$ , ce qui prouve :  $q(M) \neq 0$ .

## II.D -

**II.D.1)**  $f$  est de rang 1, son noyau est de dimension :  $2 - 1 = 1$ , engendré par  $v$ . On complète par  $u$  cette base incomplète d'un seul vecteur, on se retrouve avec une base  $(u, v)$  telle que  $\ker f = \text{Vect}(v)$ . On appelle  $A$  la matrice de passage correspondante.

$u$  n'appartient pas au noyau car il n'est pas colinéaire à  $v$ , ce qui donne  $f(u) \neq 0$ . On complète par  $w$  cette base incomplète d'un seul vecteur  $f(u)$ . On obtient la base  $B_3$ . On appelle  $B$  la matrice de passage correspondante.

On appelle  $U, V, W$  les vecteurs colonnes des coordonnées de  $u, v, w$  dans la base canonique.

$$\text{On a } AU = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } AV = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On a aussi } BW = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ qu'on n'utilise pas, et } BMU = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Enfin, } MV = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ce qui donne : } BMA^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = BMU = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ première colonne de } BMA^{-1},$$

$$\text{et } BMA^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = BMV = B \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ seconde colonne de } BMA^{-1}.$$

$$\text{Ce qui revient à : } BMA^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$P = B$  et  $Q = A^{-1}$  conviennent donc.

$$\text{II.D.2)} \quad q(M) = q\left(B^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A\right) = q(B^{-1}) q\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) q(A),$$

$$\text{on va plus loin en calculant : } q(M^2) = q(M)^2 = q(B^{-1})^2 q\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)^2 q(A)^2$$

$$q(M)^2 = q(B^{-1})^2 q\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)^2 q(A)^2 = q(B^{-1})^2 q(0) q(A)^2 = 0.$$

Finalement :  $q(M) = 0$ .

**II.E** Si le rang de  $M$  est 2,  $q(M) \neq 0$ ,

si le rang est 1,  $q(M) = 0$  et si le rang de  $M$  est nul,  $M = 0$  et  $q(M) = 0$  car  $q$  est quadratique.

On a bien :  $M \neq 0 \Leftrightarrow M$  est inversible.

## II.F -

**II.F.1)**  $f(\lambda) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc$ . C'est un polynôme de degré 2 en  $\lambda$  dont les racines sont les valeurs propres de  $M$ .

**II.F.2)** Remarquons d'abord que :  $\varphi(A, A) = \frac{1}{4}(q(2A) - q(0)) = \frac{1}{4}q(2A) = q(A)$ .

Mais  $\varphi$  est bilinéaire symétrique, on l'admet ou on considère qu'il s'agit d'une extension des propriétés du cours ; la démonstration est la même.

$$\text{Ce qui donne : } g(\lambda) = q(M - \lambda I) = \varphi(M - \lambda I, M - \lambda I) = \underbrace{\varphi(M, M)}_{=q(M)} - 2\lambda \varphi(M, I) + \lambda^2 \underbrace{\varphi(I, I)}_{=q(I)=1}.$$

$$\text{Enfin, } g(\lambda) = q(M) - 2\lambda \varphi(M, I) + \lambda^2.$$

$g(\lambda) = 0 \Leftrightarrow q(M - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow M - \lambda I$  non inversible  $\Leftrightarrow \lambda$  valeur propre de  $M$ .

Les racines de  $g$  sont les valeurs propres de  $M$ .

Ainsi  $g$  et le polynôme caractéristique de  $M$  ont les mêmes racines et même terme de plus haut degré, ils sont égaux. Ils ont donc le même terme constant, ce qui donne :  $q(M) = \det(M)$ .

## II.G -

**II.G.1)** Il suffit de prendre  $M$  non trigonalisable, c'est à dire dont le polynôme caractéristique n'est pas scindé. Par exemple  $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  dont le polynôme caractéristique est :  $\lambda^2 - 2\lambda + 2 > 0$ .

**II.G.2)** On a :  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}$ , ce qui revient à remplacer la deuxième ligne par  $a$  fois la deuxième moins  $c$  fois la première.

$$q\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}\right) = q\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \underbrace{q\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c & a \end{pmatrix}\right)}_{\text{égal au déterminant}} q\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$$

$$\text{D'où : } a(ad - bc) = a q\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) \text{ et } a \neq 0 \text{ donnent : } q\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = ad - bc.$$

Si  $a \neq 0$ ,  $q$  est encore le déterminant.

**II.G.3)** Dans le cas où  $a = 0$  et  $c \neq 0$  :  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$ .

$$\text{Ce qui donne } q\left(\begin{pmatrix} c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}\right) = q\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \underbrace{q\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)}_{=1} q\left(\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}\right),$$

$$q\left(\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = -cb, q \text{ est encore le déterminant.}$$

**II.G.4)** Il ne reste que le cas où  $a = c = 0$ , mais alors  $M$  n'est pas inversible, donc  $q(M) = 0$  et d'autre part, on a aussi  $\det(M) = 0$ .

$$\text{Finalement, } q \text{ n'est que le déterminant : } q\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = ad - bc.$$

## III Etude d'une surface

**III.A**  $M = \begin{pmatrix} x & \frac{z}{\sqrt{2}} \\ \frac{z}{\sqrt{2}} & y \end{pmatrix}$ ,  $\det(M) = xy - \frac{z^2}{2} = k$  est bien l'équation d'une quadrique.

**III.B** Comme  $k = 0$ , on a comme équation :  $xy - \frac{z^2}{2} = 0$ . On reconnaît l'équation d'un cône de sommet  $O$ .

**III.B.1)** Par  $M_0 \neq O$ , il passe la génératrice  $(OM_0)$  tracée sur le cône. En paramétriques : 
$$\begin{cases} x = \lambda x_0 \\ y = \lambda y_0 \\ z = \lambda z_0 \end{cases}$$

**III.B.2)** En  $M_0 \neq O$ , le gradient est  $\begin{pmatrix} y_0 \\ x_0 \\ -z_0 \end{pmatrix}$  qui est bien non nul, le plan tangent est donc d'équation :

$$(x - x_0)y_0 + (y - y_0)x_0 - (z - z_0)z_0 = 0, \text{ ou encore, comme } M_0 \in \Gamma_0, x_0 y_0 + y_0 x_0 - z_0 z_0 = 0.$$

Ce plan contient bien la génératrice car il contient  $M_0$  et  $O$ .

**III.C** Comme  $k = -1$ , on a comme équation :  $xy - \frac{z^2}{2} = -1$ .

**III.C.1)** On a  $xy = -1 + \frac{z^2}{2}$ , c'est à dire que, quand  $z$  varie,  $xy$  prend toutes les valeurs supérieures ou égales à  $-1$ . La projection orthogonale de  $\Gamma_{-1}$  est donc l'espace du plan  $xOy$  situé, au sens large, entre les 2 branches de l'hyperbole d'équation  $xy = -1$ .

**III.C.2)** On a encore :  $xy = -1 + \frac{z^2}{2}$ , si  $x \neq 0$ , on a toujours une valeur de  $y$  qui permet d'obtenir le point de coordonnées  $(x, z)$  dans la projection.

Si  $x = 0$ , les seules valeurs possibles de  $z$  sont  $\pm\sqrt{2}$ ,  $y$  est d'ailleurs quelconque dans ce cas.

La projection de  $\Gamma_{-1}$  sur le plan  $xOz$  est donc tout le plan, privé de l'axe  $Oz$  auquel il faut remettre les point de coordonnées  $(0, \pm\sqrt{2})$ .

**III.C.3)** Compte tenu de la remarque faite à la question précédente, les droites :  $\begin{cases} x = 0 \\ z = \sqrt{2} \end{cases}$  et  $\begin{cases} x = 0 \\ z = -\sqrt{2} \end{cases}$  sont parallèles et tracées sur  $\Gamma_{-1}$ .

### III.D Equation réduite

**III.D.1)** La matrice de la forme quadratique est :  $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Son polynôme caractéristique est :  $\left(\lambda^2 - \frac{1}{4}\right)\left(-\lambda - \frac{1}{2}\right)$ .

Les valeurs propres sont donc :  $-\frac{1}{2}$  qui est double et  $\frac{1}{2}$  qui est simple.

Dans un repère orthonormal de même origine et de vecteurs propres, en commençant par un vecteur propre correspondant à la valeur propre  $\frac{1}{2}$ , l'équation devient :  $\frac{X^2}{2} - \frac{Y^2}{2} - \frac{Z^2}{2} = k$ .

$E_3$  est bien propre pour la valeur propre  $-\frac{1}{2}$ .

Le premier vecteur  $U$  est normé et propre pour  $\lambda = \frac{1}{2}$ . On obtient  $x = y$  et  $z = 0$ .

Par exemple  $U = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Le second vecteur est normé et orthogonal à  $U$  et à  $E_3$ , par exemple  $V = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ .

On a ici en fait un nouveau repère direct, tourné de  $\frac{\pi}{4}$  par rapport à  $Oz$ .

**III.D.2)** La quadrique est toujours de révolution. Si  $k > 0$ , on a un hyperboloïde à 2 nappes, si  $k < 0$ , on a un hyperboloïde à 1 nappe et si  $k = 0$ , on a le cône déjà étudié.

## IV Applications $\Phi$

### IV.A Propriété P

**IV.A.1)** -

- a)  $\Phi$  est bijective donc il existe  $M$  telle que  $\Phi(M) = I$ .  
 $\Phi(IM) = \Phi(I)\Phi(M) = \Phi(I) = \Phi(M) = I$ .
- b) Si  $M$  est symétrique,  $\Phi({}^tM) = \Phi(M) = {}^t(\Phi(M))$ , d'où  $\Phi(M)$  est aussi symétrique.  
Ceci prouve que  $\Phi(S_2) \subset S_2$ , et comme  $\Phi$  est linéaire et bijective en dimension finie,  $\Phi(S_2)$  et  $S_2$  ont la même dimension, finalement  $\Phi(S_2) = S_2$ .
- c)  ${}^tE_4 = -E_4$ , donc  $\Phi({}^tE_4) = \Phi(-E_4) = -\Phi(E_4) = {}^t(\Phi(E_4))$ ,  $\Phi(E_4)$  est donc antisymétrique, colinéaire à  $E_4$ .  
 $\Phi(E_4) = \lambda E_4$ , mais  $E_4^2 = -\frac{1}{2}I$  et  $\Phi(E_4^2) = \Phi(E_4)^2 = \Phi\left(-\frac{1}{2}I\right) = -\frac{1}{2}I = \lambda^2 E_4^2 = -\frac{\lambda^2}{2}I$  ce qui prouve que  $\lambda^2 = 1$ .  
Finalement :  $\Phi(E_4) = \pm E_4$ .

**IV.A.2)** Si  $M$  est inversible :  $\Phi(I) = I = \Phi(MM^{-1}) = \Phi(M)\Phi(M^{-1})$  ce qui prouve que  $\Phi(M)$  est inversible.

Si  $\Phi(M)$  est inversible, comme  $\Phi$  est bijective, soit  $M'$  telle que  $\Phi(M') = \Phi(M)^{-1}$ , alors  $\Phi(MM') = \Phi(M)\Phi(M') = \Phi(M)\Phi(M)^{-1} = I$ . Et comme encore une fois  $\Phi$  est bijective,  $MM' = I$  et donc  $M$  est inversible.

On a bien l'équivalence demandée. De plus :  $\Phi(M^{-1}) = \Phi(M)^{-1}$ .

$M \in \Gamma_0 \Leftrightarrow \det M = 0 \Leftrightarrow M$  non inversible  $\Leftrightarrow \Phi(M)$  non inversible  $\Leftrightarrow \det(\Phi(M)) = 0$

Ce qui donne :  $M \in \Gamma_0 \Leftrightarrow \Phi(M) \in \Gamma_0$ .

Finalement :  $\Phi(\Gamma_0) = \Gamma_0$ .

## IV.B Exemple

**IV.B.1)**  $\Phi_A$  est clairement linéaire et  $\Phi_A(I) = I = AIA = A^2$ . On a la condition nécessaire, il faut montrer que  $A^2 = I$  est suffisante.

$A$  est donc inversible et  $\Psi_A$  définie par  $\Psi_A(M) = A^{-1}MA^{-1}$  vérifie clairement  $\Psi_A \circ \Phi_A(M) = M$ , c'est à dire  $\Psi_A \circ \Phi_A = I$  et enfin  $\Phi_A$  est bijective.

On a facilement :  $\Phi_A(M)\Phi_A(M') = AMAAM'A = AMM'A = \Phi_A(MM')$ .

$A$  est symétrique donc :  $\Phi_A({}^tM) = A{}^tMA = {}^tA{}^tM{}^tA = {}^t(AMA) = {}^t\Phi_A(M)$ .

$\Phi_A$  vérifie bien la propriété **P**.

**IV.B.2)**  $A^2 = I$  et  $A = {}^tA$  donc  $A{}^tA = I$ , ce qui prouve que  $A$  est orthogonale.

$A$  est orthogonale et symétrique, c'est donc la matrice d'une symétrie orthogonale :

- matrice de l'identité ou de moins l'identité, ce qui est impossible ici car contraire aux hypothèses, ou
- la matrice d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite, de la forme  $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ .

On aurait aussi pu travailler avec  $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  et  $\begin{cases} ab + bc = 0 \\ a^2 + b^2 = 1 \\ b^2 + c^2 = 1 \end{cases}$

On en tire  $a^2 = c^2$  ou  $a = \pm c$ .

$a = c$  donne  $b = 0$  et  $a = \pm 1$ , c'est à dire l'identité ou moins l'identité.

Pour  $a = -c$ , on pose  $a = \cos \theta$  et  $b = \sin \theta$  qui donne la matrice de la symétrie orthogonale déjà précisée.

$$\Phi_A(E_4) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\Phi_A(E_4) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ -\cos \theta & -\sin \theta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -E_4.$$

$$\text{IV.B.3)} \quad A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} = \cos \theta (E_1 - E_2) + \sqrt{2} \sin \theta E_3 = \sqrt{2} \left( \underbrace{\cos \theta \frac{E_1 - E_2}{\sqrt{2}}}_{\text{normé}} + \sin \theta E_3 \right).$$

Les deux matrices-vecteurs  $\frac{E_1 - E_2}{\sqrt{2}}$  et  $E_3$  sont normés et orthogonaux.

$A$  décrit donc le cercle du plan  $\left(O, \frac{E_1 - E_2}{\sqrt{2}}, E_3\right)$  de centre  $O$  et de rayon  $\sqrt{2}$ .

$$\text{IV.B.4)} \quad \|\Phi_A(M)\|^2 = \text{tr}(\Phi_A(M) {}^t\Phi_A(M)) = \text{tr}(AMA {}^tA {}^tM {}^tA) = \text{tr}(AM {}^tM {}^tA) \\ = \text{tr}((AM {}^tM) A) = \text{tr}(A(AM {}^tM)) = \text{tr}(M {}^tM) = \|M\|^2.$$

Ceci prouve que  $\Phi_A$  conserve la norme et est donc une isométrie.

Par ailleurs,  $\Phi_A \circ \Phi_A(M) = AAMA = M$ , c'est à dire  $\Phi_A$  est une symétrie.

$\Phi_A$  est donc une symétrie orthogonale.

**IV.B.5)** Restriction de  $\Phi_A$  à  $S_2$  qui est de dimension 3.

a)  $\Phi_A(A) = AAA = A$  et  $\Phi_A(I) = I$ , le plan engendré par  $A$  et  $I$  est invariant.

Dans la base orthonormale  $(E_1, E_2, E_3)$  de  $S_2$ ,

$$A \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} \cos \theta \\ -\cos \theta \\ \sqrt{2} \sin \theta \end{pmatrix} \text{ et } I : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

un vecteur normal à ces deux vecteurs a (par exemple) pour coordonnées :  $\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \sin \theta \\ \sqrt{2} \sin \theta \\ 2 \cos \theta \end{pmatrix}$ ,

qui est l'écriture dans la base donnée de :  $\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \sin \theta & \sqrt{2} \cos \theta \\ \sqrt{2} \cos \theta & \sqrt{2} \sin \theta \end{pmatrix}$ .

$$\Phi_A \left( \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \sin \theta & \sqrt{2} \cos \theta \\ \sqrt{2} \cos \theta & \sqrt{2} \sin \theta \end{pmatrix} \right) \\ = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \sin \theta & \sqrt{2} \cos \theta \\ \sqrt{2} \cos \theta & \sqrt{2} \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \\ = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \sin \theta & -\sqrt{2} \cos \theta \\ -\sqrt{2} \cos \theta & -\sqrt{2} \sin \theta \end{pmatrix} \\ = - \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \sin \theta & \sqrt{2} \cos \theta \\ \sqrt{2} \cos \theta & \sqrt{2} \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Ce vecteur-matrice est transformé en son opposé.

$\Phi_A$  est donc la symétrie orthogonale par rapport au plan engendré par  $A$  et  $I$ .

$$\text{b)} \quad \Phi_A(E_1) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \\ \Phi_A(E_2) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta \end{pmatrix} \\ \Phi_A(U) = \Phi_A \left( \frac{E_1 + E_2}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{E_1 + E_2}{\sqrt{2}} = U$$

$$\begin{aligned}
\Phi_A(V) &= \Phi_A\left(\frac{E_1 - E_2}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 2 \cos \theta \sin \theta \\ 2 \cos \theta \sin \theta & -\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \end{pmatrix} \\
&= \cos 2\theta \frac{E_1 - E_2}{\sqrt{2}} + \sin 2\theta E_3 = \cos 2\theta V + \sin 2\theta E_3 \\
\Phi_A(E_3) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 \cos \theta \sin \theta & -\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \\ -\cos^2 \theta + \sin^2 \theta & -2 \cos \theta \sin \theta \end{pmatrix} \\
&= \sin 2\theta \frac{E_1 - E_2}{\sqrt{2}} - \cos 2\theta E_3 = \sin 2\theta V - \cos 2\theta E_3
\end{aligned}$$

La matrice de  $\Phi_A$  dans la base  $(U, V, E_3)$  est donc : 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ 0 & \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}.$$

#### IV.C Retour au cas général

**IV.C.1)**  $\Phi$  est linéaire donc les coefficients de  $\Phi(M)$  sont des formes linéaires des coefficients de  $M$  et  $\det \circ \Phi(M)$  est une forme quadratique, (polynôme homogène de degré 2), des coefficients de  $M$ . c'est à dire que  $\det \circ \Phi \circ \Psi$  est une forme quadratique.

Elle est non nulle car  $\Phi(I) = I$  et  $\det \circ \Phi(I) = 1$ .

**IV.C.2)**  $\det \circ \Phi$  est une forme quadratique non nulle qui vérifie la propriété (1) de la partie II car  $\Phi$  vérifie **P**.

Vérifions :  $\det(\Phi(MM')) = \det(\Phi(M)\Phi(M')) = \det(\Phi(M))\det(\Phi(M'))$ .

En utilisant le résultat final de la partie II,  $\det \circ \Phi$  est le déterminant.

Enfin  $M \in \Gamma_k \Leftrightarrow \det M = k \Leftrightarrow \det(\Phi(M)) = k \Leftrightarrow \Phi(M) \in \Gamma_k$ .

**IV.C.3)**  $U // I$  et  $\Phi(I) = I$  donc  $\Phi(U) = U$ .

Si  $M$  est symétrique,  $\Phi(M)$  est symétrique donc  $\Phi(S_2) \subset S_2$ .  $\Phi$  est bijective et on est en dimension finie donc  $\Phi(S_2) = S_2$ .

$\Phi({}^t E_4) = \Phi(-E_4) = -\Phi(E_4) = {}^t \Phi(E_4)$  donc  $\Phi(E_4)$  est antisymétrique.

Ce qui donne :  $E_4 \in S_2^\perp \Rightarrow \Phi(E_4) \in S_2^\perp$  qui est de dimension 1 donc  $\Phi(E_4) = \lambda E_4$ .

$\Phi(E_4^2) = \Phi\left(-\frac{1}{2}I\right) = -\frac{1}{2}I = \Phi(E_4)^2 = \lambda^2 E_4^2 = -\frac{1}{2}\lambda^2 I$  d'où  $\lambda^2 = 1$ .

On a bien :  $\Phi(E_4) = \varepsilon E_4$  avec  $\varepsilon = \pm 1$ .

La matrice de  $\Phi$  dans la base **B** est donc de la forme : 
$$\begin{pmatrix} 1 & u & v & 0 \\ 0 & \alpha & \gamma & 0 \\ 0 & \beta & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

On prend la matrice  $M$  de coordonnées dans cette base : 
$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix},$$
 les coordonnées de  $\Phi(M)$  sont

donc : 
$$\begin{pmatrix} a + bu + cv \\ \alpha b + \gamma c \\ \beta b + \delta c \\ \varepsilon d \end{pmatrix}.$$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{\sqrt{2}} & \frac{c+d}{\sqrt{2}} \\ \frac{c-d}{\sqrt{2}} & \frac{a-b}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ et } \det M = \frac{a^2 - b^2 - c^2 + d^2}{2},$$

$$\text{et } \det(\Phi(M)) = \frac{(a+bu+cv)^2 - (\alpha b + \gamma c)^2 - (\beta b + \delta c)^2 + d^2}{2} = \det M = \frac{a^2 - b^2 - c^2 + d^2}{2} \text{ pour}$$

toutes les valeurs de  $a, b, c, d$ .

Ce qui donne :  $u = 0$  et  $v = 0$  pour les termes en  $ab$  et  $ac$ .

On arrive maintenant à  $(\alpha b + \gamma c)^2 + (\beta b + \delta c)^2 = b^2 + c^2$  pour tous les  $b$  et  $c$ .

$$\text{Ce qui donne : } \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = 1 \\ \gamma^2 + \delta^2 = 1 \\ \alpha\gamma + \beta\delta = 0 \end{cases} \text{ ou encore } \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \text{ est orthogonale.}$$

C'est donc soit une matrice de rotation,  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ ,

soit une matrice de symétrie orthogonale,  $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ .

Dans tous les cas  $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \varepsilon' \sin \theta \\ \sin \theta & -\varepsilon' \cos \theta \end{pmatrix}$  avec  $\varepsilon' = \pm 1$ .

La matrice de  $\Phi$  dans la base  $\mathbf{B}$  a bien la forme indiquée.

#### IV.C.4) $\varepsilon' = 1$

a) Montrons que si  $\Phi$  et  $\Phi_A$  vérifient la propriété  $\mathbf{P}$ , alors  $\Phi \circ \Phi_A$  la vérifie aussi.

Tout d'abord :  $\Phi(\Phi_A(M M')) = \Phi(\Phi_A(M) \Phi_A(M')) = \Phi(\Phi_A(M)) \Phi(\Phi_A(M'))$ ,

et ensuite :  $\Phi(\Phi_A({}^t M)) = \Phi({}^t \Phi_A(M)) = {}^t \Phi(\Phi_A(M))$ , ce qui assure la propriété car  $\Phi \circ \Phi_A$  est clairement linéaire et bijective.

La propriété démontrée ici est en fait très générale. On la réutilisera à la question suivante.

b) On cherche maintenant la matrice de la transposition dans  $\mathbf{B}$ .

$$M = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{\sqrt{2}} & \frac{c+d}{\sqrt{2}} \\ \frac{c-d}{\sqrt{2}} & \frac{a-b}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ est de transposée } {}^t M = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{\sqrt{2}} & \frac{c-d}{\sqrt{2}} \\ \frac{c+d}{\sqrt{2}} & \frac{a-b}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \text{ la matrice cherchée}$$

$$\text{associe donc le vecteur } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ -d \end{pmatrix} \text{ au vecteur } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}. \text{ C'est donc : } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Toujours dans la base  $\mathbf{B}$ ,  $\Phi \circ \Phi_A$  a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Ce qui prouve que  $\Phi \circ \Phi_A$  est soit l'identité, soit la transposition.

Mais la transposition ne vérifie pas la deuxième ligne de la définition de  $\mathbf{P}$ , donc  $\Phi \circ \Phi_A$  est l'identité et  $\varepsilon = -1$ .

Enfin,  $\Phi = \Phi_A^{-1} = \Phi_A$ .

#### IV.C.5) On prend maintenant $\varepsilon' = -1$ et on cherche la matrice de $\Phi \circ \Phi_A$ , toujours dans la base $\mathbf{B}$ .

$$\text{C'est : } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ 0 & \sin 2\theta & -\cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Mais cette matrice, en utilisant la question précédente est celle de  $\Phi_B$  en changeant  $\theta$  en  $2\theta$ . Cette fois ci,  $\varepsilon$  vaut 1.

Ce qui donne  $\Phi \circ \Phi_A = \Phi_B$  ou encore  $\Phi = \Phi_B \circ \Phi_A^{-1} = \Phi_B \circ \Phi_A$ .

Fin du corrigé.

Auteur : Christophe Caignaert, Lycée Colbert, Parvis Colbert 59200 Tourcoing.

<http://c.caignaert.free.fr>