

Concours d'admission 1983

MATHEMATIQUES I
 (3 pages dactylographiées)

M

N.B : On identifie les polynômes à coefficients réels et les fonctions polynômes associées.

- I -

I.1.a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$ et tout réel $x > 0$, l'intégrale

$$I_n(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{n+1}} dt$$

converge, et vérifie : $0 < I_n(x) < \frac{e^{-x}}{x^{n+1}}$

b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, $x \mapsto I_n(x)$ définit une application dérivable, I_n , de $]0, +\infty[$ dans \mathbb{R} . Déterminer I_n' .

I.2. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $x > 0$, on pose :

$$f_n(x) = \frac{1}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$$

On pose de plus : $f_0(x) = 0$.

Vérifier, pour tout entier $n \geq 0$ et tout réel $x > 0$:

$$e^x I_0(x) = f_n(x) + (-1)^n n! e^x I_n(x)$$

On posera désormais, pour tout $x > 0$:

$$\varphi(x) = e^x I_0(x)$$

Le but du problème est l'étude d'approximations de la fonction φ .

I.3. On dira qu'une application ψ de $]0, +\infty[$ dans \mathbb{R} admet un développement limité d'ordre n au voisinage de $+\infty$ si l'on peut trouver des constantes a_0, a_1, \dots, a_n et une fonction ε vérifiant $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon(x) = 0$ telles que l'on ait, pour tout $x > 0$:

$$\psi(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + \frac{\varepsilon(x)}{x^n}.$$

Etablir que la fonction φ définie en I.2. admet, à tout ordre, un développement limité au voisinage de $+\infty$.

I.4. Peut-on trouver un réel $A > 0$ et une suite réelle $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant pour tout $x > A$:

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{x^n} ?$$

I.5. Déterminer, parmi les $f_n(10)$, où n décrit \mathbb{N} , ceux qui fournissent les meilleures approximations par défaut et par excès de $\varphi(10)$. En déduire une valeur approchée de $\varphi(10)$ et donner une marge d'incertitude.

- II -

II.1 a) Montrer que, pour tout entier $m \geq 0$ et tout réel $x > 0$, l'intégrale

$$J_m(x) = m! \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t} (t-x)^m}{t^{m+1}} dt$$

converge. On définit ainsi une application J_m de $]0, +\infty[$ dans \mathbb{R} .

b) Exprimer la fonction J_m sous forme d'une combinaison linéaire des fonctions $x \mapsto x^p I_p(x)$.

.../...

c) Etablir que la fonction J_m est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$.

Déterminer J'_0 . Pour $m \geq 1$, comparer $J'_m(x)$ à $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t} (t-x)^{m-1}}{t^{m+1}} dt$

(On ne demande pas de déterminer J''_m).

II.2. Déterminer, en fonction de l'entier $m \geq 1$, des entiers relatifs α_m et β_m tels que l'on ait, pour tout réel $x > 0$:

$$(1) \quad x J'_m(x) = \alpha_m J_m(x) + \beta_m J_{m-1}(x)$$

II.3. En intégrant par parties $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t} (t-x)^{m-1}}{t^m} dt$, déterminer, pour tout entier $m \geq 1$, des entiers naturels γ_m et δ_m tels que l'on ait, pour tout réel $x > 0$:

$$(2) \quad J'_m(x) = \gamma_m J_{m-1}(x) + \delta_m J'_{m-1}(x)$$

II.4. En utilisant II.2 et II.3, établir pour tout réel $x > 0$ et tout entier $m \geq 1$:

$$(3) \quad J_{m+1}(x) = (x+2m+1) J_m(x) - m^2 J_{m-1}(x)$$

II.5. En utilisant encore II.2. et II.3, montrer que, pour tout entier $m \geq 0$, J_m est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle:

$$(E_m) \quad xy'' + (x+1)y' - my = 0$$

II.6. Etant donné l'entier m au moins égal à 1, déterminer les réels $\alpha_{m,1}, \alpha_{m,2}, \dots, \alpha_{m,m-1}$ pour que le polynôme g_m tel que:

$$g_m(x) = x^m + \alpha_{m,m-1} x^{m-1} + \dots + \alpha_{m,1} x + \alpha_{m,0}$$

soit solution de (E_m) sur $]-\infty, +\infty[$. Etablir que les $\alpha_{m,p}$ sont entiers. Expliciter $g_1(x), g_2(x), g_3(x)$. On pose $g_0(x) = 1$; légitimer cette convention.

II.7. a) En utilisant I.2 et II.1.b, établir pour tout entier $m \geq 0$ et tout réel $x > 0$, la formule:

$$(4) \quad J_m(x) = g_m(x) I_0(x) - h_m(x) e^{-x}$$

où h_m est un polynôme déterminé de manière unique.

b) Montrer que h_m est de degré $m-1$ si $m \geq 1$; quel est alors le coefficient de x^{m-1} dans $h_m(x)$?

Expliciter $h_0(x)$ et $h_1(x)$.

Quelle relation existe-t-il entre le polynôme h_m et la fraction rationnelle $g_m \cdot f_m$?

II.8. Etablir, pour tout réel x et tout entier $m \geq 1$:

$$(5) \quad g_{m+1}(x) = (x + 2m+1) g_m(x) - m^2 g_{m-1}(x)$$

II.9. a) Etablir, pour tout réel x et tout entier $m \geq 1$, la relation:

$$(6) \quad h_{m+1}(x) = (x+2m+1) h_m(x) - m^2 h_{m-1}(x)$$

On pourra se servir de (3) et (5).

b) Expliciter $h_2(x)$ et $h_3(x)$.

- III -

III.1. a) Etablir, pour tout $x > 0$ et tout entier $m \geq 0$ les inégalités:

$$0 < J_m(x) < \frac{m! e^{-x}}{x}$$

$$g_m(x) > m! m x$$

.../...