

Concours d'admission 1982

(M)

MATHÉMATIQUES I

**Définitions** Étant donné un corps commutatif  $\mathbb{K}$ , on appellera  $\mathbb{K}$ -algèbre tout  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $A$  muni d'une multiplication interne qui est associative, distributive à droite et à gauche par rapport à l'addition et telle que, pour tout triplet  $(\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times A \times A$  :

$$(\lambda x) \cdot y = x \cdot (\lambda y) = \lambda(x \cdot y).$$

Cette multiplication interne peut avoir ou ne pas avoir d'élément unité.

On appellera sous-algèbre d'une  $\mathbb{K}$ -algèbre  $A$  tout sous-espace vectoriel de  $A$  contenant stable pour la multiplication interne de  $A$ . On admettra que toute sous-algèbre est  $\mathbb{K}$ -algèbre pour les lois induites.

Si  $X$  est un sous-ensemble non-vidé de  $A$ , on admet l'existence d'une plus petite sous-algèbre de  $A$  contenant  $X$ , que l'on appellera sous-algèbre engendrée par  $X$ .

**Notations** Dans tout le problème, on se donne un corps commutatif  $\mathbb{K}$  et un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n \geq 2$ ; à partir de la partie II, on adoptera pour  $n$  la valeur 2.

On désignera par  $L(E)$  la  $\mathbb{K}$ -algèbre des endomorphismes de  $E$ , par  $\mathbf{I}$  l'application identique de  $E$ , qui est élément unité de l'algèbre  $L(E)$ . Le produit de deux endomorphismes  $f$  et  $g$  de  $E$  sera noté  $f \cdot g$  (de préférence à  $f \circ g$ ).

Pour tout élément  $x$  d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $\mathbb{K} \cdot x$  désigne le sous-espace engendré par  $x$ .

**PARTIE I**

Dans cette partie,  $A$  désigne une sous-algèbre de dimension  $n^2 - 1$  de  $L(E)$ . On veut montrer que  $\mathbf{I} \in A$ . Pour cela, raisonnant par l'absurde, on suppose que  $\mathbf{I} \notin A$ .

1. (a) Montrer que  $A$  et  $\mathbb{K} \cdot \mathbf{I}$  sont supplémentaires dans  $L(E)$ .  
 (b) Soit  $p$  la projection sur  $\mathbb{K} \cdot \mathbf{I}$  parallèlement à  $A$ . Montrer que  $p$  est un homomorphisme d'algèbres.
2. Montrer que si  $f \in L(E)$  et  $f^2 \in A$ , alors  $f \in A$ .
3. Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $f_{i,j}$  l'élément de  $L(E)$  défini par

$$\begin{cases} f_{i,j}(e_j) &= e_i \\ f_{i,j}(e_k) &= 0_E \text{ pour tout } k, k \neq j. \end{cases}$$

- (a) Calculer  $f_{ij} \cdot f_{kl}$ .
- (b) Montrer que:  $\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2, i \neq j, f_{ij} \in A$ .

(c) En déduire que:  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, f_{ii} \in A$ .

4. Conclure.

## PARTIE II

Dans cette partie et les suivantes,  $\dim E = 2$ .

Soit  $A$  une sous-algèbre de  $L(E)$ , de dimension 3.

1. Soit  $f \in L(E)$ . On note:  $C(f) = \{g \in L(E), f \cdot g = g \cdot f\}$ .
  - (a) Montrer que  $C(f)$  est une sous-algèbre de  $L(E)$ , et calculer sa dimension.  
On pourra associer à  $f$  sa matrice dans une base de  $E$ .
  - (b) Montrer que  $\mathbf{I}$ ,  $f$  et  $f^2$  sont liés.
2.
  - (a) Montrer qu'il existe une base de  $A$  de la forme:  $(\mathbf{I}, \phi, \psi)$  avec  $\psi \cdot \phi \neq \phi \cdot \psi$ .
  - (b) Montrer qu'il existe  $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{K}^3$  tel que:  $\phi \cdot \psi = \lambda\phi + \mu\psi + \nu\mathbf{I}$ .
  - (c) Calculer alors  $(\phi - \mu\mathbf{I}) \cdot (\psi - \lambda\mathbf{I})$  et montrer, en raisonnant par l'absurde, que  $(\phi - \mu\mathbf{I}) \cdot (\psi - \lambda\mathbf{I}) = 0$ .
  - (d) Montrer alors qu'il existe une base de  $A$  de la forme:  $(\mathbf{I}, \phi_1, \psi_1)$  avec  $\phi_1 \cdot \psi_1 = 0$ .
3. Soit  $(\mathbf{I}, \phi_1, \psi_1)$  une base de  $A$  telle que  $\phi_1 \cdot \psi_1 = 0$ .
  - (a) Montrer que les endomorphismes  $\phi_1$  et  $\psi_1$  sont de rang 1.
  - (b) Montrer que  $\phi_1$  et  $\psi_1$  ont un vecteur propre (non nul) commun.

## PARTIE III

1. Soit  $A$  un sous-ensemble non-vide de  $L(E)$ .  
Montrer l'équivalence des propriétés suivantes:
  - (i)  $A$  est une sous-algèbre de  $L(E)$  de dimension 3.
  - (ii) Il existe une droite  $D$  de  $E$  telle que:  $A = \{f \in L(E), f(D) \subset D\}$ .
  - (iii) Il existe une base  $(e_1, e_2)$  de  $E$  tel qu'un endomorphisme  $f$  de  $E$  appartient à  $A$  si et seulement si la matrice de  $f$  dans  $(e_1, e_2)$  est triangulaire supérieure.
2. Soit  $f \in L(E)$ . Montrer l'équivalence des propriétés suivantes:
  - (i) Il existe une sous-algèbre de  $L(E)$  de dimension 3 contenant  $f$ .
  - (ii) Le polynôme caractéristique de  $f$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ , c'est-à-dire de la forme  $(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)$  où  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont des éléments distincts ou confondus de  $\mathbb{K}$ .
  - (iii) Il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est triangulaire supérieure.

3. Dans ce paragraphe III-3. uniquement,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

Soit  $G$  un sous-groupe fini du groupe des éléments inversibles de  $L(E)$ . On suppose que  $G$  est de rang 3, c'est-à-dire que le sous-espace vectoriel  $V$  de  $L(E)$  qu'il engendre est de dimension 3.

- (a) Montrer que  $V$  est une sous-algèbre de  $L(E)$ .
- (b) Montrer que:  $\forall f \in G, f^2 = \mathbf{I}$ .
- (c) En déduire que  $G$  est commutatif.
- (d) Aboutir à une contradiction. Que conclure?

### PARTIE IV

1. Soient  $f$  et  $g$  deux éléments indépendants de  $L(E)$  tels que  $f^2 = g^2 = 0$ .

Montrer que la sous-algèbre engendrée par  $f$  et  $g$  est  $L(E)$ .

(On pourra montrer successivement que la sous-algèbre engendrée par  $f$  et  $g$  n'est ni de dimension 2, ni de dimension 3.)

2. On étudie  $D$  l'ensemble des éléments  $\Delta$  de  $L(L(E))$  tels que:

$$\forall (f, g) \in L(E) \times L(E), \quad \Delta(f) \cdot g + f \cdot \Delta(g) = \Delta(f \cdot g).$$

- (a) Montrer que  $D$  est un sous-espace vectoriel de  $L(L(E))$ .
- (b) À tout  $f_0 \in L(E)$ , on associe l'élément  $\phi(f_0)$  de  $L(L(E))$  défini par:

$$\forall f \in L(E), \quad \phi(f_0)(f) = f_0 \cdot f - f \cdot f_0.$$

Montrer que  $\phi$  est une application linéaire de  $L(E)$  dans  $L(L(E))$ , et déterminer  $\ker \phi$ .  
Montrer que  $\text{Im } \phi \subset D$ .

3. Soit  $(e_1, e_2)$  une base de  $E$ , et pour  $(i, j) \in \{1, 2\}^2$ , les applications linéaires  $f_{ij}$  définies par:

$$\begin{cases} f_{i,j}(e_j) = e_i \\ f_{i,j}(e_k) = 0 \quad \text{pour tout } k, k \neq j. \end{cases}$$

- (a) Soit  $\Delta \in D$ . Montrer qu'il existe trois scalaires  $x, y, z$  tels que, dans la base  $(e_1, e_2)$ , les matrices de  $\Delta(f_{1,2})$  et  $\Delta(f_{2,1})$  soient respectivement  $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & -x \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} z & 0 \\ -y & -z \end{pmatrix}$ .
- (b) À l'aide de l'application de  $D$  dans  $L(E) \times L(E)$  définie par:  
 $\Delta \longmapsto (\Delta(f_{1,2}), \Delta(f_{2,1}))$ ,  
montrer que  $\dim D = 3$ .  
En déduire que  $\text{Im } \phi = D$ .