ECOLES NORMALES SUPERIEURES
CORRIGÉ MATHÉMATIQUES C (ULSR)
2024 MP-MPI

m.laamoum2@gmail.com [1]

Le problème à pour sujet les théorèmes d'Abel et de Hardy et les théorèmes Taubériens

I - Lemme de Cesàro

1 ▷

- Cas $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{C}$.

Soit $\varepsilon > 0$, an a, par hypothèse sur la convergence de (u_n) :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

D'autre part, pour tout entier $n \geq n_0$:

$$|\sigma_n - l| = \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k - l\right| = \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(u_k - l)\right| = \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{n_0-1}(u_k - l) + \sum_{k=n_0}^{n}(u_k - l)\right|$$

L'inégalité triangulaire donne alors :

$$|\sigma_n - l| \leq \frac{1}{n}\left|\sum_{k=0}^{n_0-1}(u_k - l)\right| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n}|u_k - l|$$

L'inégalité triangulaire donne alors :

$$|\sigma_n - l| \leq \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n_0-1}(u_k - l)\right| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n}|u_k - l|$$

le deuxième terme vérifie pour tout entier $n \geq n_0$:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n}|u_k - l| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n}\frac{\varepsilon}{2} = \frac{(n - n_0 + 1)\,\varepsilon}{2n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

De plus, le premier terme étant une somme finie de réels, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n_0-1}(u_k - l)\right| = 0$$

Ce qui donne, d'après la définition de la limite:

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1}(u_k - l)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

en posant $N = \max(n_0, n_1)$, on obtient :

$$\forall n \geq N, |\sigma_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ainsi on a

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ /\ n \geq N \Rightarrow |\sigma_n - l| \leq \varepsilon$$

Ce qui permet donc d'écrire:

$$\lim_{n\to+\infty}\sigma_n = l$$

[1] `https://tinyurl.com/2qyzzrbd`

- Cas $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Soit $A>0$. La suite u tend vers $+\infty$, il existe donc un rang n_0 à partir duquel les termes de la suite sont supérieurs à $2A$. On a, pour tout $n>n_0$:

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \frac{1}{n+1}\sum_{k=n_0}^{n} u_k \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k + 2A\frac{n-n_0+1}{n}$$

et $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n_0-1} u_k + 2A\frac{n_0-n_0+1}{n} = 2A + \dfrac{B}{n}$ avec $B = \sum\limits_{k=1}^{n_0-1} u_k + 2(1-n_0)A \in \mathbb{R}$.

Il existe un rag n_1 à partir duquel on a $\left|\dfrac{B}{n}\right| \leq A$ et donc $\dfrac{B}{n} \geq -A$. En posantSoit $N = \max(n_0, n_1\ )$ on obtient

$$\forall n \geq N, \sigma_n \geq 2A - A = A$$

Ainsi on a

$$\forall A>0\ \exists N \in \mathbb{N}\ /\ n \geq N \Rightarrow \sigma_n \geq A$$

Ce qui permet donc d'écrire:

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = +\infty$$

- Cas $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Il suffit d'appliquer le résultat précédent à la suite $-u$.

Applications

2 ▷ Soit $u = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. En utilisant Cesàro on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $[1,+\infty[$, donc pour tout $k \geq 1$ on a

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$$

et pour $n \geq 2$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leq \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

ainsi

$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$$

ce qui donne $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ et $\boxed{v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}}$.

3 ▷

- On a $e_n = u_{n+1} - u_n$ donc $\sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} e_k = \dfrac{u_{n+1}-u_0}{n+1}$. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = \alpha \in \mathbb{R}^*$,le lemme de Cesàro donne $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1},}{n+1} = \alpha$ ainsi $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha n}$.
- On a $\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = \alpha \in \mathbb{R}^*$ donc $e_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha$, à partir d'un certain rang e_n et α sont de même signe et la série $\sum e_n$ diverge, le théorème de comparaison de séries à termes de signe constant donne $\sum\limits_{k=0}^{n} e_k \underset{n\to+\infty}{\sim} (n+1)\alpha$ soit $u_{n+1} - u_0 \underset{n\to+\infty}{\sim} (n+1)\alpha$ d'où $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha n$.

4 ▷

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in]0,+\infty[^{\mathbb{N}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in]0,+\infty[$, composons par ln

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln(\ell)$$

La question précédente donne

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\sqrt[n]{u_n}\right) = \ln(\ell)$$

d'où $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell}$.

- Si $\ell = +\infty$ (respectivement $\ell = 0$) alors $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = +\infty$ (respectivement $-\infty$) , d'près la question 1 on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = +\infty \quad (\text{respectivement} - \infty)$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \ln(\sqrt[n]{u_n}) = +\infty \quad (\text{respectivement} - \infty)$$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \ln(\sqrt[n]{u_n}) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \ln(\sqrt[n]{u_n}) = +\infty$

- Soit $u_n = n!$, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = n+1 \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty}$.
- Soit $v_n = \dfrac{n^n}{n!}$,on a $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{(n+1)^n}{n^n} = (1+\dfrac{1}{n})^n \underset{n\to+\infty}{\to} e$ donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n^n}{n!}} = e}$.

5 ▹ Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ et $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$.

Posons $w_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, on a

$$\begin{aligned} w_n - ab &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} (a_k b_{n-k} - ab) \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} (a_k b_{n-k} - a b_{n-k} + a b_{n-k} - ab) \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} (a_k - a) b_{n-k} + \frac{a}{n+1}\sum_{k=0}^{n} (b_{n-k} - b) \end{aligned}$$

$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc elle est bornée , soit $M = \sup_{k\geq 0} |b_k|$, donc

$$|w_n - ab| \leq \frac{M}{n+1}\sum_{k=0}^{n} |a_k - a| + \frac{|a|}{n+1}\sum_{k=1}^{n} |b_k - b|$$

le lemme de Cesàro on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} |a_k - a| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} |b_k - b| = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} w_n = ab$, d'où

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) = ab}$$

6 ▹ Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ deux séries convergentes de sommes respectives A et B, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, posons $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ et $C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$.

On a $C_n = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$, comme $(0 \leq k \leq n \ \text{ et } \ 0 \leq i \leq k) \Leftrightarrow (0 \leq i \leq n \ \text{ et } \ i \leq k \leq n)$ (*), alors après interversion des sommes

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{i=0}^{n}\left(a_i \sum_{k=i}^{n} b_{k-i}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i B_{n-i} \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} B_k \end{aligned}$$

ce qui donne pour tout $N \geq 0$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} C_n &= \sum_{n=0}^{N}\left[\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}B_k\right] \\
&= \sum_{k=0}^{N}\left[\left(\sum_{n=k}^{N} a_{n-k}\right)B_k\right] \quad \text{(d'après (*))} \\
&= \sum_{k=0}^{N} A_{N-k}B_k
\end{aligned}$$

ainsi

$$\boxed{\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} C_n = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} A_{N-k}B_k}$$

d'après la question 5. on a $\lim\limits_{N\to+\infty} \frac{1}{N+1}\sum\limits_{k=0}^{N} A_{N-k}B_k = AB$, d'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n} C_k\right) = AB}$

Réciproques partielles

7 ▷ Soit $u_n = (-1)^n$, on a $\sigma_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ \frac{1}{n+1} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge et $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge .

8 ▷

• On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n = \ell$, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée alors elle tend vers $+\infty$ par suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend aussi vers $+\infty$ ce qui est absurde , donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée et elle converge vers ℓ' , le lemme de Cesàro donne $\ell = \ell'$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante alors $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est , le cas précédent donne le résultat . Finalement on a

$$\left(\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \ell \text{ et } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ monotone}\right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell\right)$$

• Si $\ell = +\infty$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est forcement croissante, car si elle est décroissante alors soit elle converge soit elle tend vers $-\infty$ ce qui contredit $\ell = +\infty$, si elle est majorée alors elle converge vers une limite finie ce qui contredit $\ell = +\infty$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

le cas $\ell = -\infty$ est similaire .

9 ▷ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n = \ell$ et $e_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(u_{n+1} - u_n\right) = 0$.

Ecrivons

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\left(k\left(u_{k+1} - u_k\right)\right) &= \sum_{k=0}^{n} ku_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} ku_k \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}(k-1)u_k - \sum_{k=1}^{n} ku_k \\
&= -\sum_{k=0}^{n} u_k + nu_{n+1} + u_0
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$u_{n+1} = \frac{n+1}{n} \times \left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} ke_k\right) - \frac{u_0}{n} + \frac{n+1}{n}\sigma_n. \quad (*)$$

par hypothèse et par le lemme de Cesàro,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \times \sum_{k=0}^{n} ke_k = 0.$$

En passant à la limite dans $(*)$, nous obtenons que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

10 ▷ On suppose que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sigma_n = \ell$ et $e_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

a) Soit $0 \leqslant n < m$. Démonstration. Posons, pour $n \in \mathbb{N}, x_n = u_{n+1} - u_n$. Soient $0 \leqslant n < m$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{m} u_k - (m-n)u_n &= \sum_{k=n+1}^{m} (u_k - u_n) \\
&= \sum_{k=n+1}^{m} \left(\sum_{i=n}^{k-1} (u_{i+1} - u_i) \right)
\end{aligned}$$

comme $(n+1 \leq k \leq m \;\text{ et }\; n \leq i \leq k-1) \Leftrightarrow (n \leq i \leq m-1 \;\text{ et }\; i+1 \leq k \leq m)$ (*) alors

$$\sum_{k=n+1}^{m} u_k - (m-n)u_n = \sum_{i=n}^{m-1} \left(\sum_{k=i+1}^{m} e_i \right) = \sum_{i=n}^{m-1} (m-i)\, e_i.$$

b)

- On a $e_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ donc il existe une constante $C > 0$ telle que $|e_n| \leq \dfrac{C}{n}$,donc pour tous $2 \leqslant n < m$, on a

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{m-n} \sum_{k=n+1}^{m} u_k - u_n \right| &= \left| \sum_{i=n}^{m-1} \frac{m-i}{m-n} e_i \right| \\
&\leqslant \sum_{i=n}^{m-1} \frac{m-i}{m-n} |e_i| \\
&\leq C \sum_{i=n}^{m-1} \frac{m-i}{m-n} \, \frac{1}{i} \\
&\leqslant C \sum_{i=n}^{m-1} \frac{1}{i}.
\end{aligned}$$

L'inégalité $\dfrac{1}{i} \leq \displaystyle\int_{i-1}^{i} \frac{dt}{t} = \ln(i) - \ln(i-1)$, pour tout $i \geq 2$, donne

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{m-n} \sum_{k=n+1}^{m} u_k - u_n \right| &\leqslant C \sum_{i=n}^{m-1} (\ln(i) - \ln(i-1)) \\
&\leqslant C \ln\left(\frac{m-1}{n-1} \right).
\end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\frac{1}{m-n} \sum_{k=n+1}^{m} u_k = \frac{(m+1)\,\sigma_m - (n+1)\,\sigma_n}{m-n}$$

d'où pour tous $2 \leqslant n < m$

$$\left| \frac{(m+1)\,\sigma_m - (n+1)\,\sigma_n}{m-n} - u_n \right| \leqslant C \ln\left(\frac{m-1}{n-1} \right).$$

- Par l'inégalité triangulaire, pour tous $n < m$,

$$\begin{aligned}
|u_n - \ell| &\leqslant \left| \frac{(m+1)\,\sigma_m - (n+1)\,\sigma_n}{m-n} - u_n \right| + \left| \frac{(m+1)\,\sigma_m - (n+1)\,\sigma_n}{m-n} - \ell \right| \\
&\leqslant C \ln\left(\frac{m-1}{n-1} \right) + \left| \frac{(m+1)\,(\sigma_m - \ell) - (n+1)\,(\sigma_n - \ell)}{m-n} \right| \\
&\leqslant C \ln\left(\frac{m-1}{n-1} \right) + \frac{m+1}{m-n} \,|\sigma_m - \ell| + \frac{n+1}{m+1} \,|\sigma_n - \ell| \\
&\leqslant C \ln\left(\frac{m-1}{n-1} \right) + \frac{m+1}{m-n} \,(|\sigma_m - \ell| + |\sigma_n - \ell|)
\end{aligned}$$

c) Soit $\alpha > 1$ et $m = 1 + [\alpha n]$. On a $\alpha n < m \leq \alpha n + 1$ donc $\dfrac{m-1}{n} \leqslant \alpha$ et $(\alpha - 1)n < m - n$, par suite $\dfrac{m+1}{m-n} \leq \dfrac{\alpha n + 2}{(\alpha - 1)n} \leqslant \dfrac{\alpha + 1}{\alpha - 1}$.
Nous avons donc pour tout $n \geq 2$ et $\alpha > 1$

$$|u_n - \ell| \leqslant C \ln(\alpha) - C \ln(1 - \frac{1}{n}) + \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \times \left(\left| \sigma_{1+[\alpha n]} - \ell \right| + |\sigma_n - \ell| \right).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim\limits_{\alpha \to 1} K \ln(\alpha) = 0$ alors, il existe e $\alpha > 1$ tel que $C \ln(\alpha) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[-C \ln(1 - \frac{1}{n}) + \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \times \left(\left| \sigma_{1+[\alpha n]} - \ell \right| + |\sigma_n - \ell| \right) \right] = 0$ alors

$$\exists N \in \mathbb{N} \;/\; \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow \left| -C \ln(1 - \frac{1}{n}) + \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \times \left(\left| \sigma_{1+[\alpha n]} - \ell \right| + |\sigma_n - \ell| \right) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a donc prouvé que

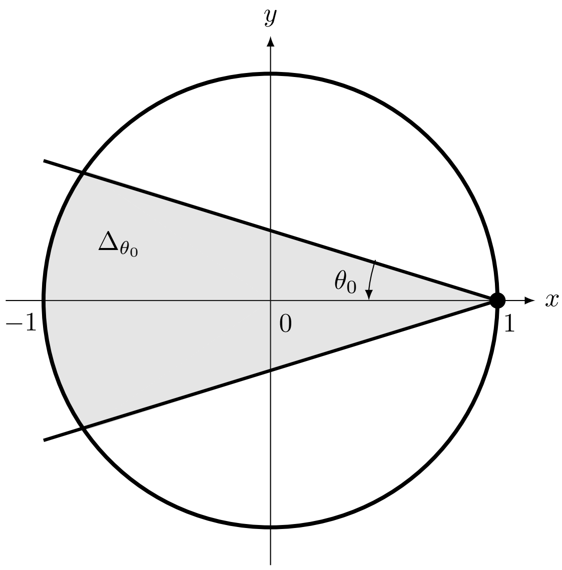
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \;/\; n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Le suite (u_n) converge donc vers ℓ .

II - Théorème d'Abel

11 ▷ On note pour $\theta_0 \in [0, \pi/2[$.

$$\Delta_{\theta_0} = \left\{ z \in \mathbb{C}; |z| < 1 \text{ et } \exists \rho > 0, \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0], z = 1 - \rho e^{i\theta} \right\}$$



a) Si $R > 1$ alors f est définie et continue en 1 , ainsi pour tout θ_0 on a

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \lim_{z \to 1} f(z) = f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

À partir de maintenant, on suppose que $R = 1$ et que $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n$ converge, et on se donne un $\theta_0 \in [0, \pi/2[$.

b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}, |z| < 1$, on a va réaliser une transformation d'Abel en écrivant pour tout $n \geq 1$, $a_n = R_{n-1} - R_n$.
Donc

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - S_N &= \sum_{n=1}^{N} a_n\left(z^n-1\right)\\ &= \sum_{n=1}^{N}\left(R_{n-1}-R_n\right)\left(z^n-1\right)\\ &= \sum_{n=0}^{N-1} R_n\left(z^{n+1}-1\right)-\sum_{n=0}^{N} R_n\left(z^n-1\right)\\ &= \sum_{n=0}^{N-1} R_n\left(z^{n+1}-z^n\right)-R_N\left(z^N-1\right)\end{aligned}$$

ainsi

$$\boxed{\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - S_N = (z-1)\sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n - R_N\left(z^N-1\right)}$$

c) On a $R_N \underset{N\to+\infty}{\to} 0$ et $z^N \underset{N\to+\infty}{\to} 0$ pour tout $z\in\mathbb{C}, |z|<1$, ce qui prouve la convergence de $\sum R_n z^n$ pour $|z|<1$ et par passage à la limite sur N on obtient

$$\boxed{f(z)-S=(z-1)\sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n}$$

d) Soit $\varepsilon>0$.

Puisque $R_n\to 0$, on peut fixer $N_0>0$ assez grand tel que $|R_k|<\varepsilon$ pour tout $k>N_0$, on a pour tout $z\in\mathbb{C}, |z|<1$,

$$\begin{aligned}|f(z)-S| &\leq |z-1|\sum_{k=0}^{N_0}|R_k z^k| + |z-1|\sum_{k=N_0+1}^{+\infty}|R_k z|^k\\ &\leq |z-1|\sum_{k=0}^{N_0}|R_k| + |z-1|\varepsilon\sum_{k=N_0+1}^{+\infty}|z|^k\\ &\leq |z-1|\sum_{k=0}^{N_0}|R_k| + |z-1|\varepsilon\sum_{k=0}^{+\infty}|z|^k\\ &\leq |z-1|\sum_{k=0}^{N_0}|R_k|^k + \varepsilon\frac{|z-1|}{1-|z|} \qquad (*)\end{aligned}$$

e)

- Pour $z\in\Delta_{\theta_0}$ on écrit $z=1-\rho e^{i\theta}$.

On a $|z-1|=\rho$ et $|z|^2=z\bar{z}=1-2\rho\cos(\theta)+\rho^2$, donc

$$\begin{aligned}\frac{|z-1|}{1-|z|} &= \rho\frac{1+|z|}{1-|z|^2}\\ &\leq \frac{2\rho}{2\rho\cos(\theta)-\rho^2}\\ &\leq \frac{2}{2\cos(\theta_0)-\rho}\end{aligned}$$

comme $\theta_0\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ alors $\cos(\theta_0)>0$, prenons $\rho(\theta_0)\in\,]0,\cos(\theta_0)[$, on a pour tout $z\in\Delta_{\theta_0}$ de la forme $z=1-\rho e^{i\theta}$ avec $0<\rho\leqslant\rho(\theta_0)$

$$\frac{|z-1|}{1-|z|}\leqslant\frac{2}{\cos(\theta_0)}$$

- Preuve du théorème d'Abel :

Soit $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{1+\frac{2}{\cos(\theta_0)}}$, on définie N_0 pour ε' comme dans la question d) et prenons $\alpha > 0$ assez petit pour que $|z-1|\sum\limits_{k=0}^{N_0}|R_k| \leq \varepsilon'$ pour tout $|z-1| < \alpha$.
De la relation (*) , pour ε', on obtient alors la majoration suivante pour tout $z \in \Delta_{\theta_0}$ tel que $|z-1| < \alpha$:

$$|f(z) - S| \leq \varepsilon' + \varepsilon' \frac{|z-1|}{1-|z|} \leq \varepsilon'(1 + \frac{2}{\cos(\theta_0)}) = \varepsilon$$

Ainsi on a

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \exists \alpha > 0 \ / \ \forall z \in \Delta_{\theta_0} \ , \ |z-1| < \alpha \Rightarrow |f(z) - S| \leq \varepsilon$$

d'où $\boxed{\lim\limits_{\substack{z\to 1\\ z\in\Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n}$.

12 ▷ La série entière $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1} z^n$ est de rayon de convergence 1 et $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ (par le CSSA) , d'apres (Abel) pour $\theta_0 = 0$ on a

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in\Delta_0}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^n = \lim_{\substack{x\to 1\\ x\in]0,1[}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

par dérivation intégration on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^n = \arctan(x)$ pour tout $x\,]-1,1[$, d'où $\boxed{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}}$.

13 ▷ La série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n z^n$ est de rayon de convergence 1, de somme $f(z) = \dfrac{1}{1+z}$, on a $\lim\limits_{\substack{z\to 1\\ |z|<1}} f(z) = \frac{1}{2}$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ ne converge pas.

14 ▷ Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 et de somme f. On suppose que $\lim\limits_{\substack{x\to 1^-\\ x\in\mathbb{R}}} f(x) = S \in \mathbb{C}$ et $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

a) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1[$,on a

$$|S_n - f(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k| (1-x^k) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k| x^k$$

remarquons que $(1-x^k) = (1-x)(1+x+..+x^{k-1}) \leq k(1-x)$, de plus $na_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ donc la suite $(na_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée , ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k| x^k &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} |ka_k| \frac{1}{k} x^k \\ &\leq \sup_{k>n} (k|a_k|) \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k \\ &\leq \frac{\sup\limits_{k>n} (k|a_k|)}{n(1-x)} \end{aligned}$$

Ainsi on a

$$\boxed{|S_n - f(x)| \leqslant (1-x) \sum_{k=1}^{n} k|a_k| + \frac{\sup\limits_{k>n} (k|a_k|)}{n(1-x)}}$$

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, choisissons $x = x_n = 1 - \frac{1}{n}$ et posons $M_n = \sup\limits_{k>n} (k|a_k|)$.
On a $na_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ donc

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \geq 0 \ / \ \forall n \geq N \Rightarrow |na_n| \leq \varepsilon$$

par suite

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \geq 0 \ / \ \forall n \geq N \Rightarrow \sup_{k>n} (k|a_k|) \leq \varepsilon$$

d'où $M_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

Pour $x = x_n$ on a $\dfrac{M_n}{n(1-x)} = M_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. De plus, par le théorème de Cosàro,

$$\left(\sum_{k=0}^{n} |a_k| k\right) \times (1-x_n) = \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k| k\right) \times \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

On a donc prouvé que

$$\lim_{n\to+\infty} (f(x_n) - S_n) = 0.$$

Par ailleurs,

$$S_n - f(x_n) + f(x_n) - S = S_n - S.$$

on a par hypothèse $\lim\limits_{\substack{x\to1^-\\x\in\mathbb{R}}} f(x) = S$, la caractérisation séquentielle de la limite donne $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) - S = 0$, ainsi la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers S .

On en déduit que la série $\sum a_n$ converge et $\boxed{\lim\limits_{x\to1-} f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n}$.

15 ▷

a) Quitte à remplacer a_0 par $a_0 - S$ on peut supposer $\lim_{\substack{x\to1^-\\x\in\mathbb{R}}} f(x) = 0$ sans perte de généralité .

On suppose désormais que $\lim\limits_{\substack{x\to1^-\\x\in\mathbb{R}}} f(x) = S$ et que $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, avec $S = 0$.

b) On a : $\Theta \subset \mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$, Θ contient la fonction nulle et évidement stable par combinaison linéaire , donc c'est un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$.

c) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(0) = 0$, pour montrer que $P \in \Theta$, il suffit de montrer que $X^k \in \Theta$ pout tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, si $x \in [0,1[$ alors $x^k \in [0,1[$ et $\sum\limits_{n\geqslant0} a_n \left(x^k\right)^n$ converge et par composition

$$\lim_{x\to1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(x^k\right)^n = \lim_{x\to1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

donc $X^k \in \Theta$. Par suite $X\mathbb{R}[X] \subset \Theta$.

d) Par linéarité, il suffit d'établir le résultat pour $P = X^k$, avec $k \in \mathbb{N}$, on a alors

$$\begin{aligned}(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^n P(x^n) &= (1-x)\times\sum_{n=0}^{+\infty}\left(x^{1+k}\right)^n\\ &= (1-x)\times\frac{1}{1-x^{1+k}}\\ &= \frac{1}{1+x+\cdots+x^k}\end{aligned}$$

donc $(1-x)\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n P(x^n) \underset{x\to1^-}{\to} \dfrac{1}{1+k} = \displaystyle\int_0^1 P(t)dt$.

Ainsi on a

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}[X], \lim_{\substack{x\to1^-\\x\in\mathbb{R}}} (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^n P(x^n) = \int_0^1 P(t)dt}$$

e) Remarquons que $g \in \Theta$ si et seulement si $\forall x \in [0,1[$, $\sum\limits_{\substack{n\geqslant0\\x^n\geq\frac12}} a_n$ converge et $\lim\limits_{x\to1^-} \sum\limits_{\substack{n=0\\x^n\geq\frac12}}^{+\infty} a_n = 0$

On a $x^n \geq \frac{1}{2}$ dès que $n \leq -\frac{\ln(2)}{\ln(x)}$, posons $N_x = \left[-\frac{\ln(2)}{\ln(x)}\right]$, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) = \sum_{n=0}^{N_x} a_n.$$

Supposons que $g \in \Theta$, dans ce cas $\lim\limits_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{N_x} a_n = 0$. Soit $m \in \mathbb{N}^\star$ et posons $\alpha_m = \exp\left(-\frac{\ln(2)}{m}\right)$, on a $N_{\alpha_m} = m$ et $\lim\limits_{m\to+\infty} \alpha_m = 1$. Alors, par caractérisation séquentielle de la limite, nous obtenons

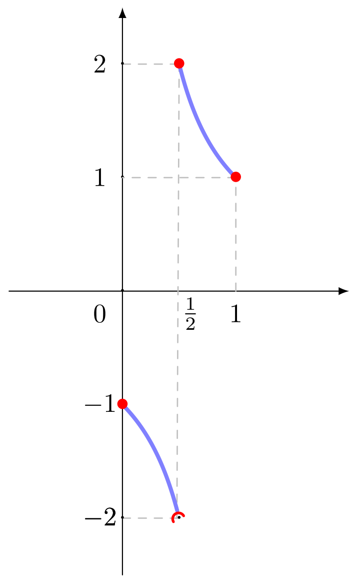
$$\sum_{n=0}^{m} a_n = \sum_{n=0}^{N_{\alpha_m}} a_n \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

ainsi, la série $\sum a_n$ converge vers 0.

f) On a

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

dont la représentation graphique



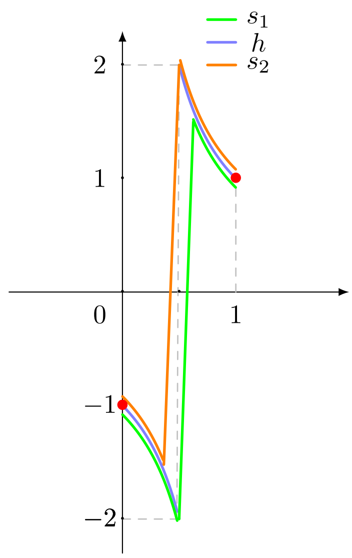
Étant donné $\varepsilon > 0$, on choisit α , a et b tels que les fonctions s_1 et s_2 définies sur $[0,1]$ par

$$s_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ a(x-\frac{1}{2}) - 2 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\alpha\right] \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}+\alpha, 1\right] \end{cases}$$

$$s_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}-\alpha\right] \\ b(x-\frac{1}{2}) + 2 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}-\alpha, \frac{1}{2}\right] \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

vérifient : $s_1(\frac{1}{2}+\alpha) = h(\frac{1}{2}+\alpha)$, $s_2(\frac{1}{2}-\alpha) = h(\frac{1}{2}-\alpha)$ et $\displaystyle\int_0^1 (s_2(x) - s_1(x))\,dx \leqslant \varepsilon$.

on obtient $a = \frac{1}{\alpha}\left(h(\frac{1}{2}+\alpha)+2\right)$ et $b = \frac{1}{\alpha}\left(2-h(\frac{1}{2}-\alpha)\right)$.



Les fonction s_1 et s_2 coïncident sur $\left[0, \frac{1}{2}-\alpha\right] \cup \left[\frac{1}{2}+\alpha, 1\right]$ donc

$$\int_0^1 (s_2(x)-s_1(x))\,dx = \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} (s_2(x)-s_1(x))\,dx$$

remarquons que $-2 \leq s_1(x) \leq 2$ et $-2 \leq s_2(x) \leq 2 \quad \forall x \in [0,1]$, donc $\int_0^1 (s_2(x)-s_1(x))\,dx \leq 8\alpha$, il suffit de prendre $\alpha = \frac{\varepsilon}{8}$. D'où l'existence de $s_1, s_2 \in \mathcal{C}^0([0,1])$ vérifiant

$$s_1 \leqslant h \leqslant s_2 \text{ et } \int_0^1 (s_2(x)-s_1(x))\,dx \leqslant \varepsilon$$

g) Soit $\varepsilon > 0, s_1$ et s_2 sont fixés. D'après le théorème de Stone et Weierstrass s_1 et s_2 sont limites uniforme de suites de polynôme sur $[0,1]$,
donc il existe $T_1, T_2 \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$\sup_{x\in[0,1]} |T_1(x)-s_1(x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{ et } \quad \sup_{x\in[0,1]} |T_2(x)-s_2(x)| \leqslant \varepsilon$$

h) Pour tout $x \in [0,1]$,

$$P_1(x) = x + x(1-x)\,(T_1(x)-\varepsilon)\,,\ P_2(x) = x + x(1-x)\,(T_2(x)+\varepsilon) \text{ et } Q(x) = \frac{P_2(x)-P_1(x)}{x(1-x)}$$

On a :

- $P_1(0) = P_2(0) = 0$ et $P_1(1) = P_2(1) = 1$.
- $T_1 - \varepsilon \leq s_1 \leq T_1 + \varepsilon$ et $T_2 - \varepsilon \leq s_2 \leq T_2 + \varepsilon$ donc $T_1 - \varepsilon \leqslant h \leqslant T_2 + \varepsilon$. Sur $]0,1[$, $h(x) = \dfrac{g(x)-x}{x(1-x)}$ donc $P_1 \leqslant g \leqslant P_2$, qui est aussi vérifiée pour 0 et 1.
- $Q(x) = \frac{P_2(x)-P_1(x)}{x(1-x)} = T_2(x) - T_1(x) + 2\varepsilon$, or $T_2 \leq s_2 + \varepsilon$ et $-T_1 \leq -s_1 + \varepsilon$, donc $0 \leq Q \leq s_2 - s_1 + 4\varepsilon$ ce qui donne

$$0 \leqslant \int_0^1 Q(x)dx \leqslant \int_0^1 s_2(x) - s_1(x)dx + 4\varepsilon \leqslant 5\varepsilon$$

i) Soit $x \in]0,1[$. Par hypothèse, il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}, |a_n| \leqslant \frac{M}{n}$ et on a $P_1 \leqslant g \leqslant P_2$ donc

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_1(x^n)\right| &\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \left(g(x^n) - P_1(x^n)\right) \\ &\leqslant M \times \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(P_2(x^n) - P_1(x^n)\right) \quad (g(1) = P_1(1)) \\ &\leqslant M \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n (1 - x^n) Q(x^n).\end{aligned}$$

Or $1 - x^n \leqslant n(1-x)$ donc

$$\boxed{\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g\left(x^n\right) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_1\left(x^n\right)\right| \leqslant M(1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} x^n Q\left(x^n\right)}$$

j) Soit $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{1+6M}$ reprenons les étapes de la question 5 avec ε' .
La question **i)** donne

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g\left(x^n\right)\right| \leqslant \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_1\left(x^n\right)\right| + M(1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} x^n Q\left(x^n\right) \quad (1)$$

D'après la question **d)**

$$\lim_{z \to 1^-} (1-z) \times \sum_{n=0}^{+\infty} z^n Q(z^n) = \int_0^1 Q(t) dt$$

et la question **h)** donne $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 Q(t) \leqslant 5\varepsilon'$,donc il existe $0 < \alpha < 1$ tel que

$$\forall x \in [1-\alpha, 1[\,, \ \left|(1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n Q(x^n) - \int_0^1 Q(t) dt\right| \leqslant \varepsilon'.$$

par suite

$$\forall x \in [1-\alpha, 1[\,, \ M(1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n Q(x^n) \leqslant 6M\varepsilon' \ (2)$$

De plus, $P_1 \in X\mathbb{R}[X]$ ainsi, d'après **c)** ,

$$\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_1(x^n) = 0$$

Donc, il existe $0 < \beta < 1$ tel que

$$\forall x \in [1-\beta, 1[\,, \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_1(x^n)\right| \leqslant \varepsilon' \ (3)$$

Soit $\eta = \min(\alpha, \beta)$ les relations $(1), (2)$ et (3) donne

$$\forall x \in [1-\eta, 1[\,, \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g\left(x^n\right)\right| \leqslant \varepsilon' \ (1+6M) = \varepsilon$$

Ainsi $g \in \Theta$ ce qui prouve le théorème Taubérien fort .

III - Variantes continues du lemme de Cesàro et du théorème d'Abel

16 ▷ Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, +\infty\,[)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que , pour tout $x > A$ on a $|f(x) - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Donc

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt - \ell\right| &\leq \frac{1}{x}\int_0^A |f(t)-\ell|\, dt + \frac{1}{x}\int_A^x |f(t)-\ell|\, dt \\ &\leq \frac{x-A}{x}\frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{x}\int_0^A |f(t)-\ell|\, dt \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{x}\int_0^A |f(t)-\ell|\, dt\end{aligned}$$

comme $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^A |f(t)-\ell|\,dt \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ alors il existe $B>0$ tel que , pour tout $x>A$ on a $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^A |f(t)-\ell|\,dt \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Ainsi pour pout $x>\max(A,B)$ on a $\left|\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt-\ell\right| \leq \varepsilon$ d'où $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt=\ell}$.

17 ▷ $f: x \mapsto \cos(x)$ est un contre-exemple que la réciproque du résultat de la question 16 est fausse.

18 ▷ Tout d'abord, on peut se ramener au cas où $\ell=0$ en changeant f par la fonction $x\mapsto f(x)-\ell x$, posons $q(x)=f(x+1)-f(x)$.

On a pour $x>0$

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{f(x-[x])}{x}+\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{[x]-1} q(x-[x]+k)$$

q est continue soit $A_k=\sup\limits_{x\in[k,k+1]}|q(x)|$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} q(x)=0$ alors pour $\varepsilon>0$ il existe $A>0$ tel que $x>A \Rightarrow |q(x)|<\varepsilon$, ainsi pour tout $k>A$ on a $\forall x\in[k,k+1] \quad |q(x)|<\varepsilon$ donc $A_k<\varepsilon$ d'où $A_k \underset{k\to+\infty}{\to} 0$.

Pour tout $k\in[0,[x]-1]$ on a $x-[x]+k\in[k,k+1]$ donc

$$\left|\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{[x]-1} q(x-[x]+k)\right| \leq \frac{1}{[x]-1}\sum_{k=0}^{[x]-1} A_k$$

d'après Cesàro, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{[x]-1}\displaystyle\sum_{k=0}^{[x]-1} A_k=0$ de plus $\left|\dfrac{f(x-[x])}{x}\right| \leq \dfrac{A_0}{x}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x-[x])}{x}=0$ ce qui donne $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

Ainsi

$$\boxed{\left(\lim_{x\to+\infty} f(x+1)-f(x)=\ell\right) \Rightarrow \left(\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\ell\right)}$$

19 ▷ Soit $f\in\mathcal{C}_b^0([0,+\infty[)$ et $M>0$ telle que $|f(x)|\leq M$ pour tout $x\in[0,+\infty[$.

On a pour tout $(x,t)\in t\in(]0,+\infty[)^2 \quad |e^{-tx}f(x)|\leq Me^{-tx}$, la fonction $t\mapsto e^{-tx}$ est intégrable $]0,+\infty[$ donc la fonction $t\mapsto e^{-tx}f(x)$ est intégrable $]0,+\infty[$ et $\mathcal{L}(f)$ est bien définie sur $]0,+\infty[$.

Soit $[a,b]\subset]0,+\infty[$, on a $\left|\dfrac{\partial}{\partial t}\left(e^{-tx}f(x)\right)\right| = |-xe^{-tx}f(x)| \leq bMe^{-at}$, donc $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, ceci est vrai pour tout $[a,b]\subset]0,+\infty[$ donc $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et

$$\boxed{\forall t\in]0,+\infty[\quad \mathcal{L}(f)'(t)=\int_0^{+\infty} -xe^{-tx}f(x)dx}$$

20 ▷ Soit $f\in\mathcal{C}_b^0([0,+\infty[)$.

a) Pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a $F(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx-\int_0^x f(x)dx$, f est continue donc $x\mapsto\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ de dérivée f , par suite F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et $F'=-f$.

$$F: x\in[0,+\infty[\mapsto \int_x^{+\infty} f(t)dt$$

Puisque F est continue et tend vers 0 en $+\infty$ elle est donc bornée sur $[0,+\infty[$.

b) Soit $A>0$. Les fonctions $u: x\mapsto -F(x)$ et $v: x\mapsto e^{-tx}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0,A]$ donc, par intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_0^A e^{-tx}f(x)dx &= \left[-e^{-tx}F(x)\right]_0^A - t\int_0^A e^{-tx}F(x)dx\\ &= F(0)-e^{-tA}F(A)-t\int_0^A e^{-tx}F(x)dx.\end{aligned}$$

La fonction F est bornée sur $[0,+\infty[$ donc $e^{-tA}F(A) \underset{A\to+\infty}{\to} 0$ ainsi par passage à la limite quand A tend vers $+\infty$ on obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx}f(x)dx = \int_0^{+\infty} f(x)dx - t\int_0^{+\infty} e^{-tx}F(x)dx.$$

Soit $\varepsilon > 0$, comme $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$ alors

$$\exists B > 0 \ / \ \forall x \in [0,+\infty[\,,\ x \geqslant B \ \Rightarrow\ |F(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

ainsi

$$\begin{aligned}
\left| t\int_0^{+\infty} e^{-tx}F(x)\ dx \right| &\leqslant t\int_0^{B} e^{-tx}|F(x)|\ dx + t\int_B^{+\infty} e^{-tx}|F(x)|\ dx \\
&\leqslant tB\left(\sup_{x\in[0,+\infty\ [} |F(x)|\right) + \frac{\varepsilon}{2}e^{-Bt} \\
&\leqslant tB\left(\sup_{x\in[0,+\infty\ [} |F(x)|\right) + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Or $\lim_{t\to 0}\left(tB\sup_{x\in[0,+\infty\ [} |F(x)|\right) = 0$ donc $\exists \alpha > 0 \ / \ \forall t \in\ ]0,\alpha[\ , tB\sup_{x\in[0,+\infty\ [} |F(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ par suite

$$\forall t \in\ ]0,\alpha[\ ,\ \left| t\int_0^{+\infty} e^{-tx}F(x)\ dx \right| \leqslant \varepsilon\ .$$

ainsi $\lim_{t\to0^+} t\int_0^{+\infty} e^{-tx}F(x)\ dx = 0$ et $\boxed{\lim_{t\to0^+} \mathcal{L}(f)(t) = \int_0^{+\infty} f(x)\ dx}$.

21 ▷ La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ est prolongeable par continuité en 0 donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}dx$ existe .

Soit $A > 0$ on a

$$\int_1^A \frac{\sin(x)}{x}dx = \cos(1) - \frac{\cos(A)}{A} - \int_1^A \frac{\cos(x)}{x^2}dx$$

la fonction $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{x^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_1^A \frac{\cos(x)}{x^2}dx$ existe d'où la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$.

Par ailleurs, la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et y est bornée.

Le question précédente permet d'affirmer que $\displaystyle\lim_{t\to0^+} \mathcal{L}(f)(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$.

La fonction $\mathcal{L}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ donc pour tout $t \in]0,+\infty[$ on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f)'(t) &= -\int_0^{+\infty} \sin(x)e^{-xt}dx \\
&= -\operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-t+i)x}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\frac{1}{-t+i}\right) \\
&= -\frac{1}{1+t^2}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t > 0$, $\mathcal{L}(f)(t) = -\arctan(t) + C$.

f est majorée par 1 sur $[0,+\infty[$ par suite $|\mathcal{L}(f)(t)| \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx}dx = \frac{1}{t}$ donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathcal{L}(f)(t) = 0$ ce qui donne $C = \dfrac{\pi}{2}$.

Par conséquent, pour tout $t > 0$, $\boxed{\mathcal{L}(f)(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan(t)}$.

On en déduit que $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx = \frac{\pi}{2}}$.

22 ▷ Soit $f \in \mathcal{C}_b^0([0,+\infty[)$ et $S \in \mathbb{R}$.

- On a $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}(\frac{1}{x})$ donc qu'il existe $A > 0, M > 0$ tels que $|f(x)| \leq \dfrac{M}{x}$ pour $x \geq A$. Alors F est bien définie pour $t > 0$, et on suppose que F a une limite en 0^+.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé, et les polynômes P_1, P_2 et Q de la question 15 , on a

$$\begin{aligned}
\left|\int_A^{+\infty} f(x)g(e^{-tx})dx - \int_A^{+\infty} f(x)P_1(e^{-tx})dx\right| &\leq \int_A^{+\infty} |f(x)|\left(g(e^{-tx}) - P_1(e^{-tx})\right)dx \\
&\leq M\int_A^{+\infty} \frac{1}{x}\left(P_2(e^{-tx}) - P_1(e^{-tx})\right)dx \\
&\leq M\int_A^{+\infty} Q(e^{-tx})e^{-tx}\frac{1-e^{-tx}}{x}dx \\
&\leq M\int_0^{e^{-tA}} Q(u)\frac{u-1}{\ln(u)}du \quad (u = e^{-tx} \ , du = -tdx)
\end{aligned}$$

on a $0 \leq \dfrac{u-1}{\ln(u)} \leq 1 \ \forall u \in]0,1[$ donc

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x)g(e^{-tx})dx - \int_A^{+\infty} f(x)P_1(e^{-tx})dx\right| \leq M\int_0^1 Q(u)du \leq 5M\varepsilon$$

D'autre part on a

$$\int_0^A f(x)g(e^{-tx})dx - \int_0^A f(x)P_1(e^{-tx})dx = \int_0^A f(x)\left(g(e^{-tx}) - P_1(e^{-tx})\right)dx$$

la fonction $g - P_1$ est bornée sur $[0,1]$ donc la $(x,t) \mapsto f(x)\left(g(e^{-tx}) - P_1(e^{-tx})\right)$ est majorée sur $[0,A]\times[0,+\infty[$,le théorème de la convergence dominée donne

$$\lim_{t\to 0^+}\int_0^A f(x)g(e^{-tx})dx - \int_0^A f(x)P_1(e^{-tx})dx = \int_0^A f(x)\lim_{t\to0^+}\left(g(e^{-tx}) - P_1(e^{-tx})\right)dx = 0$$

il existe donc $\alpha \in]0,1[$ telle que

$$\forall t \in]0,\alpha[\quad , \quad \left|\int_0^A f(x)g(e^{-tx})dx - \int_0^A f(x)P_1(e^{-tx})dx\right| \leq \varepsilon$$

par conséquent

$$\forall t \in]0,\alpha[\ , \ \left|\int_0^{+\infty} f(x)g(e^{-tx})dx - \int_0^{+\infty} f(x)P_1(e^{-tx})dx\right| \leq (1+5M)\varepsilon \qquad (1)$$

- Posons $P_1(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n_1} a_k x^k$, $(P_1(0) = 0)$ donc

$$\int_0^{+\infty} f(x)P_1(e^{-tx})dx = \sum_{k=1}^{n_1} a_k\int_0^{+\infty} f(x)e^{-ktx}dx = \sum_{k=1}^{n_1} a_k\mathcal{L}(f)(kt)$$

par conséquent

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to0^+}\int_0^{+\infty} f(x)P_1(e^{-tx})dx &= \sum_{k=1}^{n_1} a_k \lim_{t\to0^+}\mathcal{L}(f)(kt) \\
&= S\sum_{k=1}^{n_1} a_k \\
&= SP_1(1) \\
& S
\end{aligned}$$

il existe donc $\beta \in]0,1[$ telle que

$$\forall t \in]0,\beta[\quad , \quad \left| \int_0^{+\infty} f(x) P_1(e^{-tx}) dx - S \right| \leq \varepsilon \quad (2)$$

Soit $\eta = \min(\alpha, \beta)$, les (1) et (2) donnent

$$\forall t \in]0,\eta[\quad , \quad \left| \int_0^{+\infty} f(x) g(e^{-tx}) dx - S \right| \leq (2+5M)\varepsilon \qquad (3)$$

donc

$$\lim_{t \to 0^+} \int_0^{+\infty} f(x) g(e^{-tx}) dx = S$$

- On a $g(e^{-tx}) = 1$ si et seulement si $x \leq \frac{\ln 2}{t}$ donc

$$\lim_{t \to 0^+} \int_0^{+\infty} f(x) g(e^{-tx}) dx = \lim_{t \to 0^+} \int_0^{\frac{\ln 2}{t}} f(x) dx = S$$

ce qui prouve $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \int_0^{A} f(x) dx = S$, ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x) dx = S$.