

Première partie. ..

1. ..

- (a) C'est une question de cours.
(b) Soit $y > 0$. D'après ce qui précède,

$$y\Gamma(y) = \Gamma(y+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot t^y \cdot dt$$

D'où l'égalité

$$\Gamma(y) = y^{-1} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot t^y \cdot dt$$

D'autre part, en effectuant successivement les changements de variables, $x = 1 + s$, puis $t = yx$, on obtient :

$$\int_{-1}^{+\infty} e^{-y\Phi(s)} ds = e^y \cdot \int_0^{+\infty} e^{-yx} \cdot e^{y \ln x} dx = \frac{e^y}{y^y} \cdot y^{-1} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot t^y \cdot dt$$

ou encore en tenant compte de l'égalité précédente,

$$\int_{-1}^{+\infty} e^{-y\Phi(s)} ds = \frac{e^y}{y^y} \cdot \Gamma(y)$$

D'où l'égalité

$$\Gamma(y) = e^{-y} \cdot y^y \cdot \int_{-1}^{+\infty} e^{-y\Phi(s)} ds$$

2. ..

- (a) Soient $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$.

L'intégrabilité de la fonction $t \rightarrow e^{-\frac{t}{x}} \cdot t^\alpha$ sur $[\delta, +\infty[$ découle du fait que $e^{-\frac{t}{x}} \cdot t^\alpha \underset{t \rightarrow +\infty}{=} 0 \left(\frac{1}{t^2} \right)$.

D'autre part, après le changement de variables $u = \frac{t}{x}$, on obtient

$$\int_{\delta}^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} \cdot t^\alpha \cdot dt = x^{\alpha+1} \cdot \int_{\frac{\delta}{x}}^{+\infty} e^{-u} \cdot u^\alpha \cdot du \quad (1)$$

Mais

$$e^{-u} \cdot u^\alpha \underset{u \rightarrow +\infty}{=} 0 \left(e^{-\frac{u}{2}} \right),$$

et la fonction de droite est positive intégrable au voisinage de $+\infty$.

Donc par intégration des relations de comparaisons, on obtient

$$\int_{\frac{\delta}{x}}^{+\infty} e^{-u} \cdot u^\alpha \cdot du \underset{x \rightarrow 0^+}{=} 0 \left(\int_{\frac{\delta}{x}}^{+\infty} e^{-\frac{u}{2}} \cdot du \right)$$

ou encore après simplification du membre de droite, on obtient :

$$\int_{\frac{\delta}{x}}^{+\infty} e^{-u} \cdot u^\alpha \cdot du \underset{x \rightarrow 0^+}{=} 0 \left(2 \cdot e^{-\frac{\delta}{2x}} \right).$$

Et en tenant compte de l'égalité (1), on obtient :

$$\int_{\delta}^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} \cdot t^\alpha \cdot dt \underset{x \rightarrow 0^+}{=} 0 \left(2 \cdot x^{\alpha+1} \cdot e^{-\frac{\delta}{2x}} \right)$$

Mais

$$2 \cdot x^{\alpha+1} \cdot e^{-\frac{\delta}{2x}} \underset{x \rightarrow 0^+}{=} 0(x^n).$$

D'où

$$\int_{\delta}^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} \cdot t^\alpha \cdot dt \underset{x \rightarrow 0^+}{=} 0(x^n).$$

Montrons maintenant que

$$\int_{\delta}^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} \cdot \rho_N(t) \cdot dt \underset{x \rightarrow 0^+}{=} 0(x^n).$$

Par définition de ρ_N , il suffit de montrer que

$$\begin{cases} \int_{\delta}^{+\infty} \left(e^{-\frac{t}{x}} \sum_{k=0}^N a_k \cdot t^{\frac{k+\lambda-\mu}{\mu}} \right) dt \underset{x \rightarrow 0^+}{=} 0(x^n). \\ \int_{\delta}^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} \cdot f(t) \cdot dt \underset{x \rightarrow 0^+}{=} 0(x^n). \end{cases}$$

En effet, on a d'après ce qui précède, pour tout $k \in \{0, \dots, N\}$, $\int_{\delta}^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} \cdot t^{\frac{k+\lambda-\mu}{\mu}} \cdot dt \underset{x \rightarrow 0^+}{=} 0(x^n)$.

Donc

$$\sum_{k=0}^N \int_{\delta}^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} \cdot t^{\frac{k+\lambda-\mu}{\mu}} \cdot dt \underset{x \rightarrow 0^+}{=} 0(x^n),$$

donc par linéarité de l'intégrale,

$$\int_{\delta}^{+\infty} \left(e^{-\frac{t}{x}} \sum_{k=0}^N a_k \cdot t^{\frac{k+\lambda-\mu}{\mu}} \right) dt \underset{x \rightarrow 0^+}{=} 0(x^n).$$

Il reste à montrer que

$$\int_{\delta}^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} \cdot f(t) \cdot dt \underset{x \rightarrow 0^+}{=} 0(x^n).$$

Premier cas : $\delta \geq 1$.

Dans ce cas, par l'hypothèse (a) faite sur la fonction f et la croissance de l'intégrale, on obtient : $\forall x > 0$,

$$\left| \int_{\delta}^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} \cdot f(t) \cdot dt \right| \leq \int_{\delta}^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} \cdot |f(t)| \cdot dt \leq \int_{\delta}^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} \cdot C \cdot t^K \cdot dt$$

Mais d'après ce qui précède,

$$\int_{\delta}^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} \cdot C \cdot t^K \cdot dt \underset{x \rightarrow 0^+}{=} 0(x^n)$$

D'où

$$\int_{\delta}^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} \cdot f(t) \cdot dt \underset{x \rightarrow 0^+}{=} 0(x^n).$$

Supposons maintenant $\delta < 1$.

D'après ce qui précède,

$$\int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} \cdot f(t) \cdot dt \underset{x \rightarrow 0^+}{=} 0(x^n).$$

Reste à montrer que $\int_{\delta}^1 e^{-\frac{t}{x}} \cdot f(t) \cdot dt \underset{x \rightarrow 0^+}{=} 0(x^n)$ ou encore $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_{\delta}^1 x^n \cdot e^{-t/x} \cdot f(t) \cdot dt \right) = 0$.

En effet, on a

$$\begin{cases} \forall t \in [\delta, 1], \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^n \cdot e^{-t/x} \cdot f(t)) = 0 \\ \forall (x, t) \in \mathbb{R}_+^* \times [\delta, 1], \quad |x^n \cdot e^{-t/x} \cdot f(t)| \leq \left(\frac{n}{t}\right)^n \cdot e^{-n} \cdot |f(t)| \end{cases}$$

car pour $t \in [\delta, 1]$, $\max_{x>0} (x^n \cdot e^{-t/x}) = \left(\frac{n}{t}\right)^n \cdot e^{-n}$.

Et en notant $\varphi(t) = \left(\frac{n}{t}\right)^n \cdot e^{-n} \cdot |f(t)|$, alors φ est intégrable sur $[\delta, 1]$.

Donc d'après le théorème de convergence dominée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_{\delta}^1 x^n \cdot e^{-t/x} \cdot f(t) \cdot dt \right) = 0$.

D'où

$$\int_{\delta}^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} \cdot f(t) \cdot dt = \int_{\delta}^1 e^{-\frac{t}{x}} \cdot f(t) \cdot dt + \int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} \cdot f(t) \cdot dt \underset{x \rightarrow 0^+}{=} 0(x^n)$$

(b) Soit $\varepsilon > 0$.

Par l'hypothèse (b) faite sur la fonction f ,

$$\rho_N(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} 0 \left(t^{\frac{N+\lambda-\mu}{\mu}} \right).$$

Donc il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in]0, \delta]$, $|\rho_N(t)| \leq \varepsilon t^{\frac{N+\lambda-\mu}{\mu}}$.

Or la fonction $t \rightarrow t^{\frac{N+\lambda-\mu}{\mu}} = \frac{1}{t^{\frac{1-N-\lambda}{\mu}}}$ est intégrable et pour $x>0$,

$$e^{-\frac{t}{x}} \cdot \rho_N(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \rho_N(t).$$

Donc la fonction $t \rightarrow e^{-\frac{t}{x}} \cdot \rho_N(t)$ est intégrable sur $]0, \delta]$ et $\left| \int_0^\delta e^{-\frac{t}{x}} \cdot \rho_N(t) \cdot dt \right| \leq \varepsilon \int_0^\delta e^{-\frac{t}{x}} \cdot t^{\frac{N+\lambda-\mu}{\mu}} dt$.

Or en effectuant le changement de variables : $u = \frac{t}{x}$, on obtient :

$$\int_0^\delta e^{-\frac{t}{x}} \cdot t^{\frac{N+\lambda-\mu}{\mu}} dt = x^{\frac{N+\lambda}{\mu}} \cdot \int_0^{\frac{\delta}{x}} e^{-u} \cdot u^{\frac{N+\lambda-\mu}{\mu}} du$$

Donc

$$\left| \int_0^\delta e^{-\frac{t}{x}} \cdot \rho_N(t) \cdot dt \right| \leq \varepsilon \cdot x^{\frac{N+\lambda}{\mu}} \cdot \int_0^{\frac{\delta}{x}} e^{-u} \cdot u^{\frac{N+\lambda-\mu}{\mu}} du$$

ou encore

$$\left| \int_0^\delta e^{-\frac{t}{x}} \cdot \rho_N(t) \cdot dt \right| \leq \varepsilon \cdot x^{\frac{N+\lambda}{\mu}} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-u} \cdot u^{\frac{N+\lambda-\mu}{\mu}} du = \varepsilon \cdot x^{\frac{N+\lambda}{\mu}} \cdot \Gamma\left(\frac{N+\lambda}{\mu}\right)$$

Où encore

$$\left| \int_0^\delta e^{-\frac{t}{x}} \cdot \rho_N(t) \cdot dt \right| \leq C' \cdot \varepsilon \cdot x^{\frac{N+\lambda}{\mu}}$$

Où on a posé $C' = \Gamma\left(\frac{N+\lambda}{\mu}\right)$.

(c) Soit $\varepsilon>0$.

D'après le 2)b), il existent $\delta>0$ et $C' \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x>0, \left| \int_0^\delta e^{-\frac{t}{x}} \cdot \rho_N(t) \cdot dt \right| \leq C' \cdot \varepsilon \cdot x^{\frac{N+\lambda}{\mu}} \quad (1)$$

D'autre part si on note $n = \left\lfloor \frac{N+\lambda}{\mu} \right\rfloor + 1$, alors

$$x^n \underset{x \rightarrow 0^+}{=} 0 \left(x^{\frac{N+\lambda}{\mu}} \right).$$

Mais d'après le 2)a),

$$\int_\delta^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} \cdot \rho_N(t) \cdot dt \underset{x \rightarrow 0^+}{=} 0(x^n).$$

Donc par transitivité,

$$\int_\delta^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} \cdot \rho_N(t) \cdot dt \underset{x \rightarrow 0^+}{=} 0 \left(x^{\frac{N+\lambda}{\mu}} \right)$$

Donc il existe $\eta>0$ tel que pour tout $x \in]0, \eta]$,

$$\left| \int_\delta^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} \cdot \rho_N(t) \cdot dt \right| \leq \varepsilon \cdot x^{\frac{N+\lambda}{\mu}} \quad (2)$$

Donc compte tenues de (1) et (2) et la relation de Schasle, on obtient :

$$\forall x \in]0, \eta], \left| \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} \cdot \rho_N(t) \cdot dt \right| \leq C' \cdot \varepsilon \cdot x^{\frac{N+\lambda}{\mu}} + \varepsilon \cdot x^{\frac{N+\lambda}{\mu}}.$$

Et ceci pour tout $\varepsilon>0$, donc :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} \cdot \rho_N(t) \cdot dt \underset{x \rightarrow 0^+}{=} 0 \left(x^{\frac{N+\lambda}{\mu}} \right)$$

(d) Soit $x > 0$.

Par l'hypothèse (a) faite sur f , on a $\forall t \geq 1, \left| e^{-\frac{t}{x}} \cdot f(t) \right| \leq C \cdot e^{-\frac{t}{x}} \cdot t^K$, mais $C \cdot e^{-\frac{t}{x}} \cdot t^K \underset{t \rightarrow +\infty}{=} 0 \left(\frac{1}{t^2} \right)$.

D'où l'intégrabilité sur $[1, +\infty[$ de la fonction $t \rightarrow e^{-\frac{t}{x}} \cdot f(t)$.

D'autre part, pour tout $k \in \{0, \dots, N\}$, la fonction $t \rightarrow t^{\frac{k+\lambda-\mu}{\mu}} = \frac{1}{t^{\frac{1-k-\lambda}{\mu}}}$ est intégrable sur $]0, 1]$, donc

par l'hypothèse (b) faite sur la fonction f , f est intégrable sur $]0, 1]$ et comme $\left| e^{-\frac{t}{x}} \cdot f(t) \right| \underset{t \rightarrow 0}{\sim} |f(t)|$, donc $t \rightarrow e^{-\frac{t}{x}} \cdot f(t)$ aussi.

D'où l'intégrabilité sur $]0, +\infty[$ de la fonction $t \rightarrow e^{-\frac{t}{x}} \cdot f(t)$.

Par suite F est bien définie sur $]0, +\infty[$.

D'autre part si $x > 0$, alors on a successivement

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} \cdot f(t) \cdot dt = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} \left(\sum_{k=0}^N a_k \cdot t^{\frac{k+\lambda-\mu}{\mu}} + \rho_N(t) \right) dt = \sum_{k=0}^N a_k \left(\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} \cdot t^{\frac{k+\lambda-\mu}{\mu}} dt \right) + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} \cdot \rho_N(t) dt$$

Mais pour tout $k \in \{0, \dots, N\}$, $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} \cdot t^{\frac{k+\lambda-\mu}{\mu}} dt = \Gamma\left(\frac{k+\lambda}{\mu}\right) \cdot x^{\frac{k+\lambda}{\mu}}$. (Après le changement de variable $u = \frac{t}{x}$)

D'autre part, d'après le 2)c), $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} \cdot \rho_N(t) dt \underset{x \rightarrow 0^+}{=} 0 \left(x^{\frac{N+\lambda}{\mu}} \right)$.

D'où

$$F(x) = \sum_{k=0}^N a_k \cdot \Gamma\left(\frac{k+\lambda}{\mu}\right) \cdot x^{\frac{k+\lambda}{\mu}} + o\left(x^{\frac{N+\lambda}{\mu}}\right) \quad \text{quand } x \rightarrow 0^+.$$

3. ..

(a) On vérifie que Φ est strictement décroissante sur $] -1, 0[$ et $\begin{cases} \lim_{s \rightarrow -1^+} \Phi(s) = +\infty \\ \lim_{s \rightarrow 0^-} \Phi(s) = 0 \end{cases}$.

Donc Φ définit par restriction à l'intervalle $] -1, 0[$ une bijection de $] -1, 0[$ à $] 0, +\infty[$.

De même on vérifie que Φ est strictement croissante sur $] 0, +\infty[$ et $\begin{cases} \lim_{s \rightarrow 0^+} \Phi(s) = 0 \\ \lim_{s \rightarrow +\infty^-} \Phi(s) = +\infty \end{cases}$.

Donc Φ définit par restriction à l'intervalle $] 0, +\infty[$ une bijection de $] 0, +\infty[$ à $] 0, +\infty[$.

(b) On sait que la fonction $s \rightarrow \ln(1+s)$ est développable en série entière et

$$\forall s \in] -1, 1[, -\ln(1+s) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{s^k}{k}$$

Donc pour tout $s \in] -1, 1[,$ on a successivement :

$$\Phi(s) = s - \ln(1+s) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{s^k}{k} + s = \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{s^k}{k}$$

Mais après changement d'indice et simplification, $\sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{s^k}{k} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k+2} \frac{s^{k+2}}{k+2} = s^2 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{s^k}{k+2}$

D'où

$$\Phi(s) = s^2 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{s^k}{k+2}$$

(c) D'après ce qui précède, développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction Φ est

$$\Phi(s) = \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{3}s^3 + \frac{1}{4}s^4 + o(s^4)$$

Et celui de la fonction $q \rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \cdot q^k$ est donné par :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \cdot q^k = b_1 q + b_2 q^2 + b_3 q^3 + b_4 q^4 + 0 (q^4)$$

Donc par composition celui de $q \rightarrow \Phi \left(\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \cdot q^k \right)$ est donné par :,

$$\Phi \left(\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \cdot q^k \right) = \frac{1}{2} b_1^2 \cdot q^2 + \left(b_1 b_2 - \frac{1}{3} b_1^3 \right) \cdot q^3 + \left(b_1 b_3 + \frac{1}{2} b_2^2 - b_1^2 b_2 + \frac{1}{4} b_1^4 \right) \cdot q^4 + 0 (q^4)$$

Mais par hypothèse, nous avons

$$\Phi \left(\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \cdot q^k \right) = q^2 \quad (1)$$

au voisinage de 0 dans $[0, +\infty[$.

Donc par unicité du développement limité, on obtient le système :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} b_1^2 = 1 \\ b_1 b_2 - \frac{1}{3} b_1^3 = 0 \\ b_1 b_3 + \frac{1}{2} b_2^2 - b_1^2 b_2 + \frac{1}{4} b_1^4 = 0 \end{cases}$$

Et compte tenue de l'hypothèse $b_1 > 0$, on obtient

$$\begin{cases} b_1 = \sqrt{2} \\ b_2 = \frac{2}{3} \\ b_3 = \frac{1}{9\sqrt{2}} \end{cases}$$

D'autre part, comme

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \cdot q^k \underset{q \rightarrow 0}{\sim} b_1 q = \sqrt{2} \cdot q,$$

alors la fonction $q \rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \cdot q^k$ est strictement positive au voisinage à droite de 0.

Et donc la relation (1) ci-dessus devient

$$\Phi_+ \left(\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \cdot q^k \right) = q^2,$$

au voisinage à droite de 0.

Ou encore

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \cdot q^k = \Phi_+^{-1} (q^2) \quad (2)$$

au voisinage à droite de 0.

Donc

$$\Phi_+^{-1} (q^2) = b_1 q + b_2 q^2 + b_3 q^3 + 0 (q^3)$$

au voisinage à droite de 0.

Ou encore

$$\Phi_+^{-1} (q) = b_1 \sqrt{q} + b_2 q + b_3 q^{\frac{3}{2}} + 0 \left(q^{\frac{3}{2}} \right)$$

au voisinage à droite de 0.

Et en tenant compte des valeurs de b_1, b_2 et b_3 , on obtient :

$$\Phi_+^{-1} (q) = \sqrt{2} q + \frac{2}{3} q + \frac{1}{9\sqrt{2}} q^{\frac{3}{2}} + 0 \left(q^{\frac{3}{2}} \right)$$

au voisinage à droite de 0.

D'autre part, compte tenue de ce qui précède, on a successivement,

$$\begin{aligned}
(\Phi_+^{-1})'(q) &= \frac{1}{\Phi_+'(\Phi_+^{-1}(q))} \quad (\text{expression de la dérivée d'une réciproque}) \\
&= \frac{1}{\Phi_+'(\Phi_+^{-1}(q))} \\
&= \frac{1 + \Phi_+^{-1}(q)}{\Phi_+^{-1}(q)} \quad (\text{puisque } \Phi'(s) = \frac{s}{1+s}) \\
&= 1 + \frac{1}{\Phi_+^{-1}(q)} \\
&= 1 + \frac{1}{\sqrt{2q} + \frac{2}{3}q + \frac{1}{9\sqrt{2}}q^{\frac{3}{2}} + 0\left(q^{\frac{3}{2}}\right)} \quad \text{quand } q \rightarrow 0, q>0 \\
&= 1 + \frac{1}{\sqrt{2q}} \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{2}q}{3} + \frac{1}{18}q + 0(q)} \quad \text{quand } q \rightarrow 0, q>0 \\
&= 1 + \frac{1}{\sqrt{2q}} \left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}q}{3} + \frac{1}{18}q \right) + \left(\frac{\sqrt{2}q}{3} + \frac{1}{18}q \right)^2 + 0(q) \right) \quad \text{quand } q \rightarrow 0, q>0 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2q}} + \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{q}}{6\sqrt{2}} + 0(\sqrt{q}) \quad \text{quand } q \rightarrow 0, q>0
\end{aligned}$$

D'où

$$(\Phi_+^{-1})'(q) = \frac{1}{\sqrt{2q}} + \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{q}}{6\sqrt{2}} + 0(\sqrt{q}) \quad \text{quand } q \rightarrow 0, q>0$$

Ce développement peut-être obtenu en dérivant l'égalité (2).

On fait de même pour Φ_-^{-1} et $(\Phi_-^{-1})'$.

(d) Soit $y>0$.

En tenant compte du 1.b et en utilisant la relation de Schasle, on a successivement,

$$\begin{aligned}
\Gamma(y) &= e^{-y} \cdot y^y \cdot \int_{-1}^{+\infty} e^{-y \cdot \Phi(s)} \cdot ds \\
&= e^{-y} \cdot y^y \cdot \int_{-1}^0 e^{-y \cdot \Phi(s)} \cdot ds + e^{-y} \cdot y^y \cdot \int_0^{+\infty} e^{-y \cdot \Phi(s)} \cdot ds \\
&= e^{-y} \cdot y^y \cdot \int_{-1}^0 e^{-y \cdot \Phi_-(s)} \cdot ds + e^{-y} \cdot y^y \cdot \int_0^{+\infty} e^{-y \cdot \Phi_+(s)} \cdot ds
\end{aligned}$$

Mais Φ_- (resp Φ_+) est un C^1 difféomorphisme de $] -1, 0[$ dans $] 0, +\infty[$ (resp de $] 0, +\infty[$ dans lui même), donc par le changement de variables : $q = \Phi_-(s)$ dans la première intégrale et $q = \Phi_+(s)$ dans la deuxième, on obtient :

$$\Gamma(y) = -e^{-y} \cdot y^y \cdot \int_0^{+\infty} e^{-y \cdot q} \cdot (\Phi_-^{-1})'(q) \cdot dq + e^{-y} \cdot y^y \cdot \int_0^{+\infty} e^{-y \cdot q} \cdot (\Phi_+^{-1})'(q) \cdot dq$$

Enfin par la relation de Schasle, on obtient l'égalité :

$$\Gamma(y) = e^{-y} \cdot y^y \cdot \int_0^{+\infty} e^{-y \cdot q} \cdot \left((\Phi_+^{-1})'(q) - (\Phi_-^{-1})'(q) \right) \cdot dq$$

(e) Notons pour $t>0$, $f(t) = (\Phi_+^{-1})'(t) - (\Phi_-^{-1})'(t)$.

On a d'après ce qui précède,

$$\forall t \geq 1, \left| (\Phi_+^{-1})'(t) \right| = \left| 1 + \frac{1}{\Phi_+^{-1}(t)} \right|$$

Donc par croissance et positivité de Φ_+^{-1} , $\left| 1 + \frac{1}{\Phi_+^{-1}(t)} \right| = 1 + \frac{1}{\Phi_+^{-1}(t)} \leq 1 + \frac{1}{\Phi_+^{-1}(1)}$.

Donc

$$\forall t \geq 1, \left| (\Phi_+^{-1})'(t) \right| \leq 1 + \frac{1}{\Phi_+^{-1}(1)}.$$

De même, on vérifie que

$$\forall t \geq 1, \left| (\Phi_-^{-1})'(t) \right| \leq 1 - \frac{1}{\Phi_-^{-1}(1)}.$$

Par suite

$$\forall t \geq 1, |f(t)| \leq 2 + \frac{1}{\Phi_+^{-1}(1)} - \frac{1}{\Phi_-^{-1}(1)}.$$

Donc f vérifie l'hypothèse (a) du 2, avec $C = 2 + \frac{1}{\Phi_+^{-1}(1)} - \frac{1}{\Phi_-^{-1}(1)}$ et $K = 0$

D'autre part, d'après le 3c.,

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{t}} + \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot \sqrt{t} + 0(\sqrt{t}) \quad \text{quand } t \rightarrow 0^+$$

Donc f vérifie l'hypothèse (b) du 2, avec $N = 1$, $\mu = 1$ et $\lambda = \frac{1}{2}$.

On conclut alors par le 2.d que $F(x) = \sqrt{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot x^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \cdot x^{\frac{3}{2}} + 0\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$ quand $x \rightarrow 0^+$

Où

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} \cdot f(t) \cdot dt$$

Donc par composition :

$$\int_0^{+\infty} e^{-y \cdot t} \cdot f(t) \cdot dt = \sqrt{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{3}{2}} + 0\left(\left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{3}{2}}\right) \quad \text{quand } y \rightarrow +\infty$$

Donc compte tenue de la question précédente,

$$\Gamma(y) = e^{-y} \cdot y^y \cdot \int_0^{+\infty} e^{-y \cdot t} \cdot f(t) \cdot dt = e^{-y} \cdot y^y \cdot \sqrt{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{2}} + e^{-y} \cdot y^y \cdot \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{3}{2}} + 0\left(\left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{3}{2}}\right) \quad \text{quand } y \rightarrow +\infty$$

Mais $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ et compte tenue du 1a, $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

D'où

$$\Gamma(y) = e^{-y} \cdot y^y \left(\frac{2\pi}{y}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{12 \cdot y} + 0\left(\frac{1}{y}\right)\right) \quad \text{quand } y \rightarrow +\infty$$

4. Soit $x > 0$, alors $t \rightarrow e^{-\frac{t}{x}} \cdot t^{-1}$ est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$ et $e^{-\frac{t}{x}} \cdot t^{-1} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} 0\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $F(x)$ est bien définie et par le changement de variable : $u = \frac{t}{x}$,

$$F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} \cdot du.$$

En particulier F est C^1 sur $]0, +\infty[$ et $\forall x > 0$, $F'(x) = -\frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{1}{x}}$.

On conclut alors que F est C^∞ sur $]0, +\infty[$ puisque F' l'est.

Remarque : On pourra aussi utiliser le théorème de Leibniz

5. Procedons par récurrence.

Initialisation :

Soit $x > 0$, alors par intégration par parties,

$$F(x) = \int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} \cdot t^{-1} \cdot dt = \left[\left(-x \cdot e^{-\frac{t}{x}} \right) \cdot t^{-1} \right]_1^{+\infty} - x \cdot \int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} \cdot t^{-2} \cdot dt$$

Donc après simplification,

$$F(x) = S_1(x) + R_1(x)$$

D'où le résultat pour $N = 1$.

Hérédité :

Soit $N \geq 1$ et supposons pour tout $x > 0$, $F(x) = S_N(x) + R_N(x)$.

Pour tout $x > 0$, on a par intégration par parties,

$$R_N(x) = (-1)^N N! \cdot x^N \cdot \left(\left[\left(-x \cdot e^{-\frac{t}{x}} \right) \cdot t^{-(N+1)} \right]_1^{+\infty} - x(N+1) \cdot \int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} \cdot t^{-(N+2)} \cdot dt \right)$$

ou encore, après simplification,

$$R_N(x) = (-1)^N N! \cdot x^{N+1} \cdot e^{-\frac{1}{x}} + (-1)^{N+1} (N+1)! \cdot x^{N+1} \cdot \int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} \cdot t^{-(N+2)} \cdot dt$$

Donc

$$\begin{aligned} S_N(x) + R_N(x) &= \left(S_N(x) + (-1)^N N! \cdot x^{N+1} \cdot e^{-\frac{1}{x}} \right) + (-1)^{N+1} (N+1)! \cdot x^{N+1} \cdot \int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} \cdot t^{-(N+2)} \cdot dt \\ &= S_{N+1}(x) + (-1)^{N+1} (N+1)! \cdot x^{N+1} \cdot \int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} \cdot t^{-(N+2)} \cdot dt \\ &= S_{N+1}(x) + R_{N+1}(x) \end{aligned}$$

Donc

$$F(x) = S_{N+1}(x) + R_{N+1}(x).$$

D'où la récurrence.

6. ...

(a) Il s'agit d'une série entière dont le rayon de convergence est 0, par la règle de D'Alembert.

Par suite cette série converge uniquement pour $x = 0$.

Montrons maintenant par l'absurde et supposons que cette suite est bornée, alors d'après le 5., la suite $(S_N(x))_{N \geq 1}$ est bornée, donc la suite $(S_{2N}(x))_{N \geq 1}$ est aussi bornée; mais cette suite est décroissante à partir d'un certain rang, puisque

$$\forall N \geq 1, S_{2N+2}(x) - S_{2N}(x) = (2N)! \cdot x^{2N+1} \cdot e^{-\frac{1}{x}} \cdot (1 - (2N+1) \cdot x)$$

Donc la suite $(S_{2N}(x))_{N \geq 1}$ converge, donc la suite $(S_{2N+2}(x) - S_{2N}(x))_{N \geq 1}$ converge vers 0.

Mais d'après ce qui précède,

$$S_{2N+2}(x) - S_{2N}(x) \sim - (2N+1)! \cdot x^{2N+2} \cdot e^{-\frac{1}{x}}$$

Ce qui est impossible puisque la suite $((2N+1)! \cdot x^{2N+2})_{N \geq 1}$ diverge vers $+\infty$.

D'où la suite $(R_N(x))_{N \geq 1}$ est bornée.

(b) Si $N \geq 1$ et $x > 0$, alors

$$|R_N(x)| = N! \cdot x^N \cdot \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{t^{N+1}} \cdot dt \leq N! \cdot x^N \cdot \int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} \cdot dt = N! \cdot x^{N+1} \cdot e^{-\frac{1}{x}} = |r_N(x)|.$$

Et

$$|R_{N+1}(x)| \leq |r_{N+1}(x)|$$

Mais

$$|r_{N+1}(x)| = (N+1)! \cdot x^{N+2} \cdot e^{-\frac{1}{x}} \underset{x \rightarrow 0}{=} 0 \left(|r_N(x)| = N! \cdot x^{N+1} \cdot e^{-\frac{1}{x}} \right)$$

D'où

$$|R_{N+1}(x)| \underset{x \rightarrow 0}{=} 0 (|r_N(x)|)$$

(c) Soient $N \geq 1$ et $x > 0$.

Alors par intégration par parties,

$$R_N(x) = r_N(x) + R_{N+1}(x).$$

Donc

$$R_N(x) - r_N(x) = R_{N+1}(x).$$

Donc compte tenue de ce qui précède,

$$R_N(x) - r_N(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 0 (r_N(x))$$

D'où

$$R_N(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} r_N(x).$$

(d) Pour $N \geq 1$, on a $\frac{|r_{N+1}(x)|}{|r_N(x)|} = (N+1) \cdot x \leq 1$ ssi $N \leq \left\lceil \frac{1}{x} \right\rceil - 1$.

Donc la suite $(|r_N(x)|)_{N \geq 1}$ est décroissante jusqu'au rang $\left\lceil \frac{1}{x} \right\rceil$, puis croissante.

7. ...

(a) On a successivement :

$$\left\{ \begin{aligned} S_N(x) &= \sum_{k=1}^{2M} (-1)^{k-1} \cdot (k-1)! \cdot x^k \cdot e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \sum_{k=1}^{2M} (-1)^{k-1} \cdot |r_{k-1}(x)| \\ &= \sum_{k=0}^{2M-1} (-1)^k \cdot |r_k(x)| \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} (|r_{2k}(x)| - |r_{2k+1}(x)|) \end{aligned} \right.$$

Mais d'après ce qui précède, la suite $(|r_N(x)|)_{N \geq 1}$ est décroissante jusqu'au rang $\left\lceil \frac{1}{x} \right\rceil$, d'autre part $0 < x \leq \frac{1}{N}$, donc pour tout $k \in \{0, \dots, M-1\}$, $|r_{2k}(x)| \geq |r_{2k+1}(x)|$.
Par suite $S_N(x) \geq 0$.
D'autre part, on a successivement :

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{M-1} (1 - (2l+1)x) \cdot (2l)! \cdot x^{2l+1} &= \sum_{l=0}^{M-1} (2l)! \cdot x^{2l+1} - \sum_{l=0}^{M-1} (2l+1)! \cdot x^{2l+2} \\ &= \sum_{l=0}^{M-1} (-1)^{2l} \cdot (2l)! \cdot x^{2l+1} + \sum_{l=0}^{M-1} (-1)^{2l+1} \cdot (2l+1)! \cdot x^{2l+2} \\ &= \sum_{k=1}^{2M} (-1)^{k-1} \cdot (k-1)! \cdot x^k \\ &= \sum_{k=1}^N (-1)^{k-1} \cdot (k-1)! \cdot x^k \\ &= \frac{1}{S_N(x)} \cdot e^{-x}. \end{aligned}$$

Mais $F(x) = S_N(x) + R_N(x)$ et $R_N(x) = R_{2M}(x) \geq 0$, donc $F(x) \geq S_N(x)$ ou encore en tenant compte de l'égalité précédente,

$$F(x) \geq \left(\sum_{l=0}^{M-1} (1 - (2l+1)x) \cdot (2l)! \cdot x^{2l+1} \right) \cdot e^{-\frac{1}{x}}.$$

Par suite,

$$E_N(x) = \left| \frac{R_N(x)}{F(x)} \right| \leq \frac{|R_N(x)|}{\left(\sum_{l=0}^{M-1} (1 - (2l+1)x) \cdot (2l)! \cdot x^{2l+1} \right) \cdot e^{-\frac{1}{x}}}.$$

Mais

$$|R_N(x)| = N! \cdot x^N \cdot \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{t^{N+1}} \cdot dt \leq N! \cdot x^N \cdot \int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} \cdot dt = N! \cdot x^{N+1} \cdot e^{-\frac{1}{x}}.$$

D'où l'inégalité,

$$E_N(x) = \left| \frac{R_N(x)}{F(x)} \right| \leq \frac{N! \cdot x^{N+1}}{\sum_{l=0}^{M-1} (1 - (2l+1)x) \cdot (2l)! \cdot x^{2l+1}}.$$

(b) Simple vérification.

8. Soient f dans $C_{sep}(\mathbb{R}^2)$ et soit $\varepsilon > 0$.

Par définition de cet ensemble, ils existent $n \in \mathbb{N}^*$, $f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n \in C_{per}(\mathbb{R})$, tels que pour tout $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(\theta) = \sum_{i=1}^n f_i(\theta_1) \cdot g_i(\theta_2).$$

Mais l'ensemble des polynômes trigonométriques d'une variable réelle est dense dans $C_{per}(\mathbb{R})$.

Donc pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, ils existent P_i, Q_i des polynôme trigonométriques d'une variable réelle, tels que

$$\begin{cases} \|f_i - P_i\|_{\infty} \leq \frac{\varepsilon}{2n(\|g_i\|_{\infty} + 1)} \\ \|g_i - Q_i\|_{\infty} \leq \frac{\varepsilon}{2n(\|P_i\|_{\infty} + 1)} \end{cases}.$$

Par ailleurs, si on note R la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$, par $R(\theta_1, \theta_2) = \sum_{i=1}^n P_i(\theta_1) \cdot Q_i(\theta_2)$.

Alors d'une part, on vérifie qu'il s'agit d'un polynôme trigonométrique de deux variables et d'autre part, on a successivement :

$$\left\{ \begin{aligned} \forall \theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2, |f(\theta) - R(\theta)| &= \left| \sum_{i=1}^n f_i(\theta_1) \cdot g_i(\theta_2) - \sum_{i=1}^n P_i(\theta_1) \cdot Q_i(\theta_2) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n (f_i(\theta_1) \cdot g_i(\theta_2) - P_i(\theta_1) \cdot Q_i(\theta_2)) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n ((f_i(\theta_1) - P_i(\theta_1)) \cdot g_i(\theta_2) + (g_i(\theta_2) - Q_i(\theta_2)) \cdot P_i(\theta_1)) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n (|f_i(\theta_1) - P_i(\theta_1)| \cdot |g_i(\theta_2)| + |g_i(\theta_2) - Q_i(\theta_2)| \cdot |P_i(\theta_1)|) \\ &\leq \sum_{i=1}^n (\|f_i - P_i\|_{\infty} \cdot \|g_i\|_{\infty} + \|g_i - Q_i\|_{\infty} \cdot \|P_i\|_{\infty}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{\varepsilon}{2n(\|g_i\|_{\infty} + 1)} \cdot \|g_i\|_{\infty} + \frac{\varepsilon}{2n(\|P_i\|_{\infty} + 1)} \cdot \|P_i\|_{\infty} \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{\varepsilon}{2n} + \frac{\varepsilon}{2n} \right) = \varepsilon. \end{aligned} \right.$$

D'où

$$\|f - R\|_{\infty} \leq \varepsilon.$$

On conclue alors que l'ensemble des polynômes trigonométriques en deux variables est dense dans $C_{sep}(\mathbb{R}^2)$.

9. Comme Ψ_j est 1-périodique et continue sur un segment de longueur 1, à savoir $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, alors elle est continue sur $\mathbb{R}$, donc par composition, la fonction $\Psi_{j,k}$ aussi. Et sa 1-périodicité provient de la 1-périodicité de la fonction Ψ_j .

10. ..

- (a) D'après le 9., pour tout k_1, k_2 dans $\{0, \dots, j-1\}$, Ψ_{j,k_1} et Ψ_{j,k_2} sont dans $C_{per}(\mathbb{R})$, donc les applications $(\theta_1, \theta_2) \rightarrow \Psi_{j,k_1}(\theta_1) \cdot \Psi_{j,k_2}(\theta_2)$ sont dans $C_{sep}(\mathbb{R}^2)$ et ce dernier est un espace vectoriel.

Par suite, $S_j(f) \in C_{sep}(\mathbb{R}^2)$.

D'autre part, montrons le lemme : pour $k \in \{0, \dots, j-1\}$ et $l \in \mathbb{Z}$, $\Psi_{j,k}\left(\frac{l}{j}\right) = \Psi_j\left(\frac{l-k}{j}\right) = \delta_{l,k}$ (Symbole de Kroneker)

En effet, si $l = k$, alors $\Psi_j\left(\frac{l-k}{j}\right) = \Psi_j(0) = \max(0, 1) = 1$.

Supposons maintenant $l \neq k$, donc $|l - k| \geq 1$.

D'autre part, comme Ψ_j est 1-périodique, alors quitte à faire la division euclidienne de l par j , on peut supposer $l \in \{0, \dots, j-1\}$; par suite $|l - k| \leq j-1$.

On a donc $\frac{1}{j} \leq \left|\frac{l-k}{j}\right| \leq \frac{j-1}{j} = 1 - \frac{1}{j}$ et un petit calcul, montre que Ψ_j est nulle sur $\left[\frac{1}{j}, 1 - \frac{1}{j}\right]$ (ou dresser le graphe de Ψ_j). Donc $\Psi_j\left(\left|\frac{l-k}{j}\right|\right) = 0$. Mais Ψ_j est pair puisqu'elle est 1-périodique et pair sur un intervalle de longueur 1 à savoir $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$; donc $\Psi_j\left(\frac{l-k}{j}\right) = \Psi_j\left(\left|\frac{l-k}{j}\right|\right) = 0$. D'où le resultat.

Et si $(l_1, l_2) \in \mathbb{Z}^2$, alors via le lemme, on a successivement,

$$\begin{aligned} S_j(f)\left(\frac{l_1}{j}, \frac{l_2}{j}\right) &= \sum_{k_1=0}^{j-1} \cdot \sum_{k_2=0}^{j-1} f\left(\frac{k_1}{j}, \frac{k_2}{j}\right) \cdot \Psi_{j,k_1}\left(\frac{l_1}{j}\right) \cdot \Psi_{j,k_2}\left(\frac{l_2}{j}\right) \\ &= \sum_{k_1=0}^{j-1} \cdot \sum_{k_2=0}^{j-1} f\left(\frac{k_1}{j}, \frac{k_2}{j}\right) \cdot \Psi_j\left(\frac{l_1-k_1}{j}\right) \cdot \Psi_j\left(\frac{l_2-k_2}{j}\right) \\ &= \sum_{k_1=0}^{j-1} \cdot \sum_{k_2=0}^{j-1} f\left(\frac{k_1}{j}, \frac{k_2}{j}\right) \cdot \delta_{l_1,k_1} \cdot \delta_{l_2,k_2} \text{ (d'après lemme)} \\ &= f\left(\frac{l_1}{j}, \frac{l_2}{j}\right) \end{aligned}$$

D'où le résultat.

- (b) On montre que si $0 \leq k, l \leq j-1$ et $\theta \in \left[\frac{k}{j}, \frac{k+1}{j}\right]$, alors $\Psi_{j,l}(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } l \notin \{k, k+1\} \\ k+1-j\theta & \text{si } l = k \\ -k+j\theta & \text{si } l = k+1 \end{cases}$

Et comme $(\theta_1, \theta_2) \in \left[\frac{k_1}{j}, \frac{k_1+1}{j}\right] \times \left[\frac{k_2}{j}, \frac{k_2+1}{j}\right]$, alors on a successivement,

$$\left\{ \begin{aligned} S_j(f)(\theta_1, \theta_2) &= \sum_{l_1=0}^{j-1} \cdot \sum_{l_2=0}^{j-1} f\left(\frac{l_1}{j}, \frac{l_2}{j}\right) \cdot \Psi_{j,l_1}(\theta_1) \cdot \Psi_{j,l_2}(\theta_2) \\ &= \sum_{(l_1, l_2) \in \{k_1, k_1+1\} \times \{k_2, k_2+1\}} f\left(\frac{l_1}{j}, \frac{l_2}{j}\right) \cdot \Psi_{j,l_1}(\theta_1) \cdot \Psi_{j,l_2}(\theta_2) \\ &= f\left(\frac{k_1}{j}, \frac{k_2}{j}\right) \cdot (k_1+1-j\theta_1) \cdot (k_2+1-j\theta_2) + \\ &\quad f\left(\frac{k_1+1}{j}, \frac{k_2}{j}\right) \cdot (-k_1+j\theta_1) \cdot (k_2+1-j\theta_2) + \\ &\quad f\left(\frac{k_1}{j}, \frac{k_2+1}{j}\right) \cdot (k_1+1-j\theta_1) \cdot (-k_2+j\theta_2) + \\ &\quad f\left(\frac{k_1+1}{j}, \frac{k_2+1}{j}\right) \cdot (-k_1+j\theta_1) \cdot (-k_2+j\theta_2) \end{aligned} \right.$$

Et on vérifie que

$$(k_1+1-j\theta_1) \cdot (k_2+1-j\theta_2) + (-k_1+j\theta_1) \cdot (k_2+1-j\theta_2) + (k_1+1-j\theta_1) \cdot (-k_2+j\theta_2) + (-k_1+j\theta_1) \cdot (-k_2+j\theta_2) = 1$$

Donc $S_j(f)(\theta_1, \theta_2)$ est barycentre des points $f\left(\frac{l_1}{j}, \frac{l_2}{j}\right)$ où $(l_1, l_2) \in \{k_1, k_1+1\} \times \{k_2, k_2+1\}$.

Notons

$$\begin{cases} \alpha = (k_1+1-j\theta_1) \cdot (k_2+1-j\theta_2) \\ \beta = (-k_1+j\theta_1) \cdot (k_2+1-j\theta_2) \\ \gamma = (k_1+1-j\theta_1) \cdot (-k_2+j\theta_2) \\ \delta = (-k_1+j\theta_1) \cdot (-k_2+j\theta_2) \end{cases}$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$.

La continuité de f sur $\mathbb{R}^2$ donc sur le compact $[0, 1] \times [0, 1]$ assure l'uniforme continuité sur ce compact. Donc

$$\exists \alpha > 0, \forall ((x, y), (x', y')) \in [0, 1]^2 \times [0, 1]^2, \left(\left\{ \begin{array}{l} |x - x'| \leq \alpha \\ |y - y'| \leq \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow |f(x, y) - f(x', y')| \leq \varepsilon \right). (*)$$

D'autre part, soit $j_0 \geq 2$ tel que $\left(\forall j \geq j_0, \frac{1}{j} \leq \alpha \right) (**)$.

Et soit $j \geq j_0$, alors pour tout $(k_1, k_2) \in \{0, \dots, j-1\} \times \{0, \dots, j-1\}$ et pour tout $(\theta_1, \theta_2) \in \left[\frac{k_1}{j}, \frac{k_1+1}{j} \right] \times \left[\frac{k_2}{j}, \frac{k_2+1}{j} \right]$,

$$\left| S_j(f)(\theta_1, \theta_2) - f(\theta_1, \theta_2) \right| = \left| \alpha \left(f\left(\frac{k_1}{j}, \frac{k_2}{j}\right) - f(\theta_1, \theta_2) \right) + \beta \left(f\left(\frac{k_1+1}{j}, \frac{k_2}{j}\right) - f(\theta_1, \theta_2) \right) + \gamma \left(f\left(\frac{k_1}{j}, \frac{k_2+1}{j}\right) - f(\theta_1, \theta_2) \right) + \delta \left(f\left(\frac{k_1+1}{j}, \frac{k_2+1}{j}\right) - f(\theta_1, \theta_2) \right) \right|$$

Et compte tenue de (*) et (**), on obtient : $\left| S_j(f)(\theta_1, \theta_2) - f(\theta_1, \theta_2) \right| \leq \alpha\varepsilon + \beta\varepsilon + \gamma\varepsilon + \delta\varepsilon = \varepsilon$.

Donc $\forall j \geq j_0$ et $\forall (k_1, k_2) \in \{0, \dots, j-1\} \times \{0, \dots, j-1\}$

$$\sup_{(\theta_1, \theta_2) \in \left[\frac{k_1}{j}, \frac{k_1+1}{j} \right] \times \left[\frac{k_2}{j}, \frac{k_2+1}{j} \right]} \left| S_j(f)(\theta_1, \theta_2) - f(\theta_1, \theta_2) \right| \leq \varepsilon.$$

Donc $\forall j \geq j_0$,

$$\sup_{(\theta_1, \theta_2) \in \bigcup_{(k_1, k_2) \in \{0, \dots, j-1\} \times \{0, \dots, j-1\}} \left[\frac{k_1}{j}, \frac{k_1+1}{j} \right] \times \left[\frac{k_2}{j}, \frac{k_2+1}{j} \right]} \left| S_j(f)(\theta_1, \theta_2) - f(\theta_1, \theta_2) \right| \leq \varepsilon$$

Ou encore $\forall j \geq j_0$,

$$\sup_{(\theta_1, \theta_2) \in [0, 1] \times [0, 1]} \left| S_j(f)(\theta_1, \theta_2) - f(\theta_1, \theta_2) \right| \leq \varepsilon.$$

Mais les $S_j(f)$ et f sont 1-périodiques, donc

$$\sup_{(\theta_1, \theta_2) \in [0, 1] \times [0, 1]} \left| S_j(f)(\theta_1, \theta_2) - f(\theta_1, \theta_2) \right| = \sup_{(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2} \left| S_j(f)(\theta_1, \theta_2) - f(\theta_1, \theta_2) \right|$$

D'où

$$\forall j \geq j_0, \left\| S_j(f) - f \right\|_{\infty} = \sup_{(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2} \left| S_j(f)(\theta_1, \theta_2) - f(\theta_1, \theta_2) \right| \leq \varepsilon$$

Par suite

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \left\| S_j(f) - f \right\|_{\infty} = 0$$

11. D'après le 8., l'ensemble des polynômes trigonométriques en deux variables est dense dans $C_{sep}(\mathbb{R}^2)$ et d'après le 10., ce dernier est dense dans $C_{per}(\mathbb{R}^2)$, donc par transitivité l'ensemble des polynômes trigonométriques en deux variables est dense dans $C_{per}(\mathbb{R}^2)$.

12. Si (F, α) est solution de (3) alors $\forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{l} F'(t) = f(\alpha(t)) \\ \alpha'(t) = \omega \end{array} \right.$, donc $\forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{l} F(t) = \int_0^t f(\alpha(s)) . ds + F(0) \\ \alpha(t) = t.\omega + \alpha(0) \end{array} \right.$

Et si de plus $\left\{ \begin{array}{l} F(0) = 0 \\ \alpha(0) = (0, 0) \end{array} \right.$, alors $\forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{l} F(t) = \int_0^t f(\alpha(s)) . ds \\ \alpha(t) = t.\omega \end{array} \right.$. Réciproque immédiate.

13. Comme $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ est supposé résonnant, alors par définition, il existe $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tel que $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 = 0$. D'autre part si on pose $f(\theta_1, \theta_2) = e^{2i\pi(k_1.\theta_1 + k_2.\theta_2)}$ pour $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$, alors f est continue et 1-périodique en chacun de ses arguments et $\forall t \in \mathbb{R}, f(t.\omega) = e^{2i\pi(k_1.t.\omega_1 + k_2.t.\omega_2)} = e^{2i\pi.t(k_1.\omega_1 + k_2.\omega_2)} = e^0 = 1$.

Donc $\forall t \in \mathbb{R}, \int_0^t f(s.\omega) . ds = t$ ou encore d'après le 12., $\forall t \in \mathbb{R}, F(t) = t^{2i\pi.(l_1.\omega_1 + l_2.\omega_2)}$.

14. ...

(a) Il suffit de montrer ce résultat pour les polynômes trigonométriques de la forme $f(\theta_1, \theta_2) = e^{2i\pi(l_1.\theta_1 + l_2.\theta_2)}$, avec $(l_1, l_2) \in \mathbb{Z}^2$.

Dans ce cas, on a d'après le 12.,

$$\forall t \in \mathbb{R}, F(t) = \int_0^t f(s.\omega) . ds = \int_0^t e^{2i\pi(l_1.s.\omega_1 + l_2.s.\omega_2)} . ds = \int_0^t e^{2i\pi.s(l_1.\omega_1 + l_2.\omega_2)} . ds$$

Mais comme ω n'est pas résonnant, alors $l_1.\omega_1 + l_2.\omega_2 \neq 0$, donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \int_0^t e^{2i\pi.s(l_1.\omega_1 + l_2.\omega_2)} . ds = \left[\frac{1}{2i\pi.(l_1.\omega_1 + l_2.\omega_2)} . e^{2i\pi.s(l_1.\omega_1 + l_2.\omega_2)} \right]_0^t = \frac{1}{2i\pi.(l_1.\omega_1 + l_2.\omega_2)} \left(e^{2i\pi.t(l_1.\omega_1 + l_2.\omega_2)} - 1 \right)$$

Par suite

$$\forall t \in \mathbb{R}, |F(t)| \leq \frac{2}{2\pi.l_1.\omega_1 + l_2.\omega_2}$$

(b) Soit $\varepsilon > 0$.

Alors d'après le 11., il existe un polynôme trigonométrique Q à deux variables, tel que $\|f - Q\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Donc

$$\forall t \geq 0, \int_0^t |f(s, \omega) - Q(s, \omega)| . ds \leq t . \|f - Q\|_\infty \leq t . \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, d'après le 14.a, la fonction $t \rightarrow \int_0^t Q(s, \omega) . ds$ est bornée sur $\mathbb{R}$; donc il existe une constante réel positif C tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \left| \int_0^t Q(s, \omega) . ds \right| \leq C$$

$$\text{Donc on a successivement, } \forall t \geq \frac{2}{\varepsilon} . C, \left\{ \begin{array}{l} |F(t)| = \left| \int_0^t f(s, \omega) . ds \right| \\ = \left| \int_0^t (f(s, \omega) - Q(s, \omega)) . ds + \int_0^t Q(s, \omega) . ds \right| \\ \leq \int_0^t |f(s, \omega) - Q(s, \omega)| . ds + \left| \int_0^t Q(s, \omega) . ds \right| \\ \leq t . \frac{\varepsilon}{2} + C \\ \leq t . \frac{\varepsilon}{2} + t . \frac{\varepsilon}{2} = t . \varepsilon \end{array} \right.$$

En résumé,

$$\forall t \geq \frac{2}{\varepsilon} . C, |F(t)| \leq t . \varepsilon$$

Par suite, $F(t) = 0(t)$ quand $t \rightarrow +\infty$.

15. ..

(a) Commençons par montrer que $\int_0^1 \int_0^1 (dh(\theta) . \omega) . d\theta_1 d\theta_2 = 0$.

En effet, par définition de l'intégrale double on a :

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial \theta_1}(\theta_1, \theta_2) . d\theta_1 d\theta_2 = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\partial h}{\partial \theta_1}(\theta_1, \theta_2) . d\theta_1 \right) d\theta_2 = \int_0^1 (h(1, \theta_2) - h(0, \theta_2)) d\theta_2.$$

Mais h étant 1-périodique, donc $\forall \theta_2 \in \mathbb{R}, h(1, \theta_2) - h(0, \theta_2) = 0$.

D'où

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial \theta_1}(\theta_1, \theta_2) . d\theta_1 d\theta_2 = 0$$

De même, on a

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial \theta_2}(\theta_1, \theta_2) . d\theta_1 d\theta_2 = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\partial h}{\partial \theta_2}(\theta_1, \theta_2) . d\theta_2 \right) d\theta_1 = \int_0^1 (h(\theta_1, 1) - h(\theta_1, 0)) d\theta_1.$$

Et pour la même raison que tout à l'heure,

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial \theta_2}(\theta_1, \theta_2) . d\theta_1 d\theta_2 = 0$$

Or, pour tout $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$dh(\theta) . \omega = \omega_1 . \frac{\partial h}{\partial \theta_1}(\theta) + \omega_2 . \frac{\partial h}{\partial \theta_2}(\theta)$$

D'où

$$\int_0^1 \int_0^1 (dh(\theta) . \omega) . d\theta_1 d\theta_2 = 0.$$

Par ailleurs, comme on a pour tout $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2, dh(\theta) . \omega + g(\theta) = v$, alors

$$\int_0^1 \int_0^1 (dh(\theta) . \omega + g(\theta)) . d\theta_1 d\theta_2 = \int_0^1 \int_0^1 v . d\theta_1 d\theta_2$$

Mais on vérifie que

$$\int_0^1 \int_0^1 v . d\theta_1 d\theta_2 = v$$

Donc par linéarité de l'intégrale double et compte tenue de ce qui précède, on obtient :

$$v = \int_0^1 \int_0^1 g(\theta_1, \theta_2) . d\theta_1 d\theta_2$$

ou encore

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 = \int_0^1 \int_0^1 g_1(\theta_1, \theta_2) . d\theta_1 d\theta_2 \\ v_2 = \int_0^1 \int_0^1 g_2(\theta_1, \theta_2) . d\theta_1 d\theta_2 \end{array} \right.$$

où on a noté $v = (v_1, v_2)$ et g_1, g_2 les fonctions coordonnées de g

D'autre part, si on note h_1, h_2 les fonctions coordonnées de h alors l'équation (4) devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 . \frac{\partial h_1}{\partial \theta_1}(\theta) + \omega_2 . \frac{\partial h_1}{\partial \theta_2}(\theta) + g_1(\theta) = v_1 \quad (1) \\ \omega_1 . \frac{\partial h_2}{\partial \theta_1}(\theta) + \omega_2 . \frac{\partial h_2}{\partial \theta_2}(\theta) + g_2(\theta) = v_2 \quad (2) \end{array} \right.$$

Comme g_1 est un polynôme trigonométrique à valeurs réels, alors il est de la forme

$$g_1(\theta) = \sum_{k=(k_1, k_2) \in \{0, \dots, n\}^2} (\alpha_k \cdot \cos 2\pi(k \cdot \theta) + \beta_k \cdot \sin 2\pi(k \cdot \theta))$$

Dans ce cas,

$$v_1 = \int_0^1 \int_0^1 \left(\sum_{k=(k_1, k_2) \in \{0, \dots, n\}^2} (\alpha_k \cdot \cos 2\pi(k \cdot \theta) + \beta_k \cdot \sin 2\pi(k \cdot \theta)) \right) d\theta_1 d\theta_2$$

Mais un calcul simple montre que pour tout $(k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2$,

$$\begin{cases} \int_0^1 \int_0^1 \cos 2\pi(k \cdot \theta) d\theta_1 d\theta_2 = \delta_{k_1, 0} \cdot \delta_{k_2, 0} = \delta_{(k_1, k_2), (0, 0)} \\ \int_0^1 \int_0^1 \sin 2\pi(k \cdot \theta) d\theta_1 d\theta_2 = 0 \end{cases}$$

Donc par linéarité

$$v_1 = \sum_{k=(k_1, k_2) \in \{0, \dots, n\}^2} \alpha_k \cdot \delta_{(k_1, k_2), (0, 0)} = \alpha_{(0, 0)}.$$

Et l'équation au dérivée partielle (1) devient :

$$\omega_1 \cdot \frac{\partial h_1}{\partial \theta_1}(\theta) + \omega_2 \cdot \frac{\partial h_1}{\partial \theta_2}(\theta) = \alpha_{(0, 0)} - \sum_{k=(k_1, k_2) \in \{0, \dots, n\}^2} (\alpha_k \cdot \cos 2\pi(k \cdot \theta) + \beta_k \cdot \sin 2\pi(k \cdot \theta))$$

ou encore

$$\omega_1 \cdot \frac{\partial h_1}{\partial \theta_1}(\theta) + \omega_2 \cdot \frac{\partial h_1}{\partial \theta_2}(\theta) = \sum_{k=(k_1, k_2) \in \{0, \dots, n\}^2 \setminus \{(0, 0)\}} (\alpha_k \cdot \cos 2\pi(k \cdot \theta) + \beta_k \cdot \sin 2\pi(k \cdot \theta))$$

Alors en cherchant une solution de la forme

$$(\theta_1, \theta_2) \rightarrow \sum_{k=(k_1, k_2) \in \{0, \dots, n\}^2 \setminus \{(0, 0)\}} (\alpha'_k \cdot \cos 2\pi(k \cdot \theta) + \beta'_k \cdot \sin 2\pi(k \cdot \theta))$$

et en supposant ω non résonnant, on vérifie que l'application

$$(\theta_1, \theta_2) \rightarrow \sum_{k=(k_1, k_2) \in \{0, \dots, n\}^2 \setminus \{(0, 0)\}} \left(\frac{\beta_k}{2\pi(k_1\omega_1 + k_2\omega_2)} \cdot \cos 2\pi(k \cdot \theta) - \frac{\alpha_k}{2\pi(k_1\omega_1 + k_2\omega_2)} \cdot \sin 2\pi(k \cdot \theta) \right)$$

est une solution de (1). Et on fait de même pour l'équation (2).

(b) Comme α et h sont C^1 , alors par les opérations algébriques, la fonction $\tilde{\alpha}$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout t réel,

$$\tilde{\alpha}'(t) = \alpha'(t) + x \cdot dh(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t).$$

Mais α est solution du problème (3) et h solution de l'équation (4), alors on a successivement :

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}'(t) = (\omega + xg(\alpha(t))) + x \cdot dh(\alpha(t)) \cdot (\omega + xg(\alpha(t))) \\ = \omega + x(g(\alpha(t)) + dh(\alpha(t)) \cdot \omega) + x^2 dh(\alpha(t)) \cdot g(\alpha(t)) \\ = \omega + x \cdot v + x^2 dh(\alpha(t)) \cdot g(\alpha(t)) \\ = \omega + x \cdot v + x\varepsilon(x, t) \end{cases}$$

Où on a posé

$$\varepsilon(x, t) = x \cdot dh(\alpha(t)) \cdot g(\alpha(t))$$

Mais par hypothèse, h est 1-périodique donc dh aussi et étant continue par le fait que h est supposée C^1 , alors dh est bornée, de même pour g . Donc l'application $t \rightarrow dh(\alpha(t)) \cdot g(\alpha(t))$ est bornée sur $\mathbb{R}$; et si on note $M = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|dh(\alpha(t)) \cdot g(\alpha(t))\|$, alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $|\varepsilon(x, t)| \leq M|x|$ ou encore, $\sup_{t \in \mathbb{R}} |\varepsilon(x, t)| \leq M|x|$. En particulier

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} |\varepsilon(x, t)| \right) = 0.$$

(c) Notons $A = \sup_{t \in [0, T]} \|\alpha(t)\|$. L'existence est assuré par la continuité de l'application α sur le compact $[0, T]$.

D'autre part, on vérifie que pour tout $t \in [0, T]$, le segment $[t \cdot \omega, \alpha(t)]$ est contenu dans la boule $\bar{B}(0_{\mathbb{R}^2}, T \cdot \omega + A)$ de $\mathbb{R}^2$.

Notons enfin $K = \sup_{y \in \bar{B}(0_{\mathbb{R}^2}, T \cdot \omega + A)} \|dh(y)\|$, dont l'existence est assuré par la continuité de l'application dh et la

compacité de la boule $\bar{B}(0_{\mathbb{R}^2}, T \cdot \omega + A)$.

Par ailleurs, en intégrant l'égalité du 15b., on obtient pour tout t réel,

$$\tilde{\alpha}(t) = \tilde{\alpha}(0) + (\omega + xv)t + x \int_0^t \varepsilon(x, s) ds$$

ou encore, pour tout t réel,

$$\alpha(t) = xh(0,0) - xh(\alpha(t)) + (\omega + xv)t + x \int_0^t \varepsilon(x,s) ds$$

Par suite pour tout t réel,

$$\alpha(t) = (\omega + xv)t + x(h(0,0) - h(t,\omega)) + x\eta(x,t)$$

où on a posé

$$\eta(x,t) = h(t,\omega) - h(\alpha(t)) + \int_0^t \varepsilon(x,s) ds$$

ou encore en utilisant l'expression de la fonction ε ,

$$\eta(x,t) = h(t,\omega) - h(\alpha(t)) + x \int_0^t dh(\alpha(s)) \cdot g(\alpha(s)) ds$$

Mais

$$\sup_{t \in [0,T]} \left| x \int_0^t dh(\alpha(s)) \cdot g(\alpha(s)) ds \right| \leq |x| \int_0^T dh(\alpha(s)) \cdot g(\alpha(s))$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sup_{t \in [0,T]} \left| x \int_0^t dh(\alpha(s)) \cdot g(\alpha(s)) ds \right| \right) = 0$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité des accroissements finies, on a successivement :
pour tout $t \in [0, T]$,

$$\begin{cases} \|h(t,\omega) - h(\alpha(t))\| \leq \|\alpha(t) - t,\omega\| \sup_{y \in]t,\omega,\alpha(t)[} \|dh(y)\| \\ \leq \|\alpha(t) - t,\omega\| \sup_{y \in \overline{B}(0_{\mathbb{R}^2}, T,\omega+A)} \|dh(y)\| \\ \leq K \|\alpha(t) - t,\omega\| \end{cases}$$

Mais en intégrant la deuxième équation du problème (3), on obtient :
pour tout t réel,

$$\alpha(t) = t,\omega + x \int_0^t g(\alpha(s)) ds$$

Donc pour tout $t \in [0, T]$,

$$\|h(t,\omega) - h(\alpha(t))\| \leq K|x| \int_0^T \|g(\alpha(s))\| ds$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sup_{t \in [0,T]} \|h(t,\omega) - h(\alpha(t))\| \right) = 0$$

D'où

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sup_{t \in [0,T]} \|\eta(x,t)\| = 0$$