$\boxed{\textit{CCP 2013. Option MP. Mathématiques 1.}}$

Corrigé pour serveur UPS par JL. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)

Exercice 1 : une série de Fourier.

1) • f est une fonction en escalier (périodique) donc continue par morceaux et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. En outre f est sa propre régularisée de Dirichlet i.e. $2f(x) = f(x^+) + f(x^-)$ pour tout réel x. Donc, d'après le théorème de Dirichlet de convergence simple, la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $f(x)$.

• Comme f est impaire sa série de Fourier s'écrit $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx$

avec $b_n = 2 \times \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)f(t)\,\mathrm{d}\,t = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nt\,\mathrm{d}\,t = \dfrac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)$ de sorte que $b_{2n} = 0$ et $b_{2n+1} = \dfrac{4}{(2n+1)\pi}$

• Ainsi $\boxed{\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\sin(2n+1)x}{2n+1} = f(x) \text{ pour tout réel } x}$

2. En particulier pour $x = \dfrac{\pi}{2}$ il vient $\boxed{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1} = \dfrac{\pi}{4}}$

Par ailleurs l'égalité de Parseval fournit $\|f\|_2^2 = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_{2n+1}^2$ avec $\|f\|_2^2 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2\,\mathrm{d}\,t = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\,t = 1$

Ainsi $\boxed{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}}$

Exercice 2 : un système différentiel.

1. Il vient $\chi_A(X) = (X-2)^2$ de sorte que $B = A - 2I_2$ est nilpotente par le théorème de Cayley-Hamilton. $\square$

Il en découle que $\exp(tB) = I_2 + tB = (1-2t)I_2 + tA$ puique $B^2 = 0$ de sorte que $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{t^n B^n}{n!} = 0$.

Il en résulte que $\boxed{\exp(tA) = e^{2t}\Big((1-2t)I_2 + tA\Big)}$

2. Par résultat de cours, la solution du problème de Cauchy du système différentiel linéaire à coefficients constants proposé est $X(t) = \exp(tA)X_0$.

On obtient ainsi $\boxed{X(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1-3t \\ 2+3t \end{pmatrix}}$

Problème : séries de Taylor et développements en série entière.

1. On a $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$ pour $x \in]-1,1[$ et, par dérivation terme à terme d'une série entière dans l'intervalle ouvert de convergence, on obtient $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ pour tout $x \in]-1,1[$. $\square$

2. Une intégration par parties (bien licite) fournit $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{A} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{x}\left[e^{-t}t^x\right]_{\varepsilon}^{A} + \frac{1}{x}\int_{\varepsilon}^{A} e^{-t}t^x\,\mathrm{d}\,t \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Pour $x > 0$, lorsque $(\varepsilon, A) \to (0, +\infty)$ les deux intégrales tendent respectivement vers $\Gamma(x)$ et $\Gamma(x+1)$ et, par croissances comparées, le terme tout intégré tend vers 0.
Il en découle que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$. $\square$
Comme $\Gamma(1) = 1$, une itération claire montre que $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout entier n non nul. $\square$

3. Fixons $x \in I$ ainsi que $n \in \mathbb{N}$ et considérons la fonction φ définie sur I par $\varphi(t) = f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(x-t)^k}{k!} f^{(k)}(t)$.
φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc en particulier $\mathcal{C}^1$ et le théorème de représentation intégrale des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ fournit $\varphi(x) - \varphi(a) = \displaystyle\int_a^x \varphi'(t)\,\mathrm{d}\,t$.
Or $\varphi(x) = 0$, $\varphi(a) = f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$ et $\varphi'(t) = -\dfrac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)$ d'où la formule. $\square$

4. Pour $x \neq 0$ il vient $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$ de par le développement en série entière de sin. Or cette égalité est encore vraie en 0. Ainsi f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ donc a fortiori de classe $\mathcal{C}^\infty$. $\square$

5. D'après la question 1, on a $g(x) \underset{\text{DEF}}{=} \dfrac{x}{(1-x)^2} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} nx^n$ pour tout $x \in]-1,1[$.
Ainsi g est développable en série entière sur $]-1,1[$ et vérifie $g^{(n)}(0) = n.n!$ $\square$

6. **(a)** Notons $u_n(x) = f(x)\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$. Il vient $|u_n(x)| \leqslant M\dfrac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \underset{\text{DEF}}{=} a_n$ en notant $M = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$ qui existe bien puisque f est $\mathcal{C}^\infty$ donc en particulier continue sur $]-R,R[$ donc sur le compact $[0,1]$ puisque $R > 1$.
Or la série $\sum \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ converge absolument dans l'intervalle ouvert de convergence $]-R,R[$ donc en particulier en 1 puisque $R > 1$ ce qui prouve que la série $\sum a_n$ converge.
Ainsi $\sum u_n(x)$ converge bien normalement sur $[0,1]$ $\square$

(b) Pour tout x de $]-R,R[$ donc de $[0,1]$ on a $f^2(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ et comme la série converge normalement (donc a fortiori uniformément) sur $[0,1]$ on peut intégrer terme à terme entre 0 et 1. Il en résulte que $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}\,x = 0$.
Or f^2 est positive et continue sur $[0,1]$. Il en résulte que f^2 donc f est nulle sur $[0,1]$. $\square$

(c) Il en découle, pour tout entier n, $\lim\limits_{x\to 0^+} f^{(n)}(x) = 0$.
Or, comme f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$, $f^{(n)}$ est en particulier continue en 0.
De sorte que $f^{(n)}(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f^{(n)}(x) = 0$ pour tout entier n et ainsi f est bien nulle sur $]-R,R[$. $\square$

7. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ mais son développement en série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$ ne converge que sur $]-1,1[$. $\square$

8. **(b)** Soit le prédicat $\mathcal{P}_n$: « $\exists P_n \in \mathbb{R}[X]$ t.q. $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}}\exp\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)$ $\forall x \in]0,+\infty[$ »
$\mathcal{P}_0$ est vrai et en supposant $\mathcal{P}_k$ vrai jusqu'au rang n, il vient pour $x > 0$:
$f^{(n+1)}(x) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\dfrac{P_n(x)}{x^{3n}}\exp\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)\right) = \dfrac{P_{n+1}(x)}{x^{3n+3}}\exp\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)$ avec $P_{n+1} = X^3P_n' + (2-3nX^2)P_n \in \mathbb{R}[X]$
ce qui établit bien la validité de $\mathcal{P}_{n+1}$. $\square$

c) f est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. Pour prouver que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout n, il suffit d'après le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ itéré de prouver (compte-tenu en outre de la parité) que $\lim\limits_{x\to 0^+} f^{(n)}(x) = 0$ pour tout entier n.
Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{u\to+\infty} u^{3n}e^{-u^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^{3n}}\exp\left(\dfrac{-1}{x^2}\right) = 0$.
Par ailleurs $\lim\limits_{x\to 0^+} P_n(x) = P_n(0) \in \mathbb{R}$ et ainsi on a bien $\lim\limits_{x\to 0^+} f^{(n)}(x) = 0$ pour tout entier n. $\square$

d) S'il existait un réel $r > 0$ tel que f soit développable en série entière sur $]-r,r[$, la fonction f serait nulle sur $]-r,r[$ d'après la question précédente. Ce qui n'est pas puisque $f(\dfrac{r}{2}) > 0$. $\square$

9. **a)** Notons $g(x,t) = \dfrac{e^{-t}}{1+x^2t}$.
$t \longmapsto g(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$ pour tout réel x donc localement intégrable et $|g(x,t)| \leqslant e^{-t}$ intégrable sur $[0,+\infty[$. Il en découle que $t \longmapsto g(x,t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ pour tout réel x.
Ainsi f est bien définie sur $\mathbb{R}$. $\square$

Pour établir que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, il suffit de prouver que :
(1) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad t \longmapsto g(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$
(2) $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ est définie sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$
(3) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad t \longmapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$
(4) $\forall \in]0,+\infty[$ $\quad x \longmapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
(5) $\forall a > 0$ $\quad \exists \varphi_a$ intégrable sur $]0,+\infty[$ telle que $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi_a(t)$ $\quad \forall x \in [-a,a]$ $\quad \forall t \in]0,+\infty[$

Or (1) vient d'être établi, (2), (3) et (4) sont clairs avec $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \dfrac{-2xte^{-t}}{(1+x^2t)^2}$ et pour (5) la fonction $\varphi_a(t) = 2ate^{-t}$ convient (bien intégrable sur $]0,+\infty[$ car continue sur $[0,+\infty[$ et $o(\dfrac{1}{t^2})$ au voisinage de $+\infty$ par croissances comparées). Ainsi f est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. $\square$

b) Pour $t > 0$ fixé il vient $g_t(x) \underset{\text{DEF}}{=} \dfrac{e^{-t}}{1+tx^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n e^{-t} x^{2n}$ pour $|x| < \dfrac{1}{\sqrt{t}}$.

Il en découle par unicité de développement en série entière (celui de Taylor) que :

$\dfrac{\partial^{2n+1} g}{\partial x^{2n+1}}(0,t) = g_t^{(2n+1)}(0) = 0$ et $\dfrac{\partial^{2n} g}{\partial x^{2n}}(0,t) = g_t^{(2n)}(0) = (-1)^n (2n)! t^n e^{-t}$. □

Il en résulte (dérivations successives sous le signe intégral admises) que $f^{(2n+1)}(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial^{2n+1} g}{\partial x^{2n+1}}(0,t) = 0$ et

$f^{(2n)}(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial^{2n} g}{\partial x^{2n}}(0,t) = (-1)^n (2n)! \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \,\mathrm{d}\, t = (-1)^n (2n)! \Gamma(n+1) = (-1)^n (2n)! n!$ □

c) La série de Taylor en 0 de f est donc $\sum (-1)^n n! x^{2n}$ dont le rayon de convergence est 0 par la règle de D'Alembert.

En effet en notant $u_n(x) = (-1)^n n! x^{2n}$, il vient que $\dfrac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = (n+1)x^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ si $x \neq 0$ donc $\sum u_n(x)$ diverge pour $x \neq 0$.

Ainsi f n'est pas développable en série entière à l'origine. □

10. a) Soit $x \in]-a, a[$. Pour prouver que f développable en série entière sur $]-a, a[$, il suffit de prouver que $|R_n(x)| \underset{\text{DEF}}{=} |f(x) - S_n(x)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ avec $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$.

Or $R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \,\mathrm{d}\, t$ par la formule de Taylor de sorte que

$|R_n(x)| \leqslant \left| \displaystyle\int_0^x \frac{|x-t|^n}{n!} |f^{(n+1)}(t)| \,\mathrm{d}\, t \right| \leqslant M \left| \int_0^x \frac{|x-t|^n}{n!} \,\mathrm{d}\, t \right| = M \left| \int_0^x \frac{|u|^n}{n!} \,\mathrm{d}\, u \right| = M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ □

b) Ce résultat s'applique sur $\mathbb{R}$ pour les fonctions sin et cos par exemple. □

FIN