

E3A – PC – Mathématiques A

Corrigé

Auteur : S. Laurent (sergelaurent@sergial.org)

Preliminaires

1 – Pour $i \in \mathbb{N}$, on a :

$$\alpha_{i+2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 u) \sin^i(u) du = \alpha_i - \frac{1}{(i+1)\pi} \left[\cos u \sin^{i+1} u \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{i+1} \alpha_{i+2}.$$

Et finalement : $\boxed{\alpha_{i+2} = \frac{i+1}{i+2} \alpha_i}.$

2 – On remarque que $\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} du = 1$ et $\alpha_1 = 0$.

De là, pour i impair, on a clairement $\alpha_i = 0$.

Enfin, on a successivement : $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\alpha_4 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}$, $\alpha_6 = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}$... et donc, pour i entier

naturel pair ≥ 2 , on a : $\alpha_i = \frac{(i-1)(i-3)\dots 1}{i(i-2)\dots 2}.$

Partie I

1 – Le théorème utilisé est le suivant :

Soient a, b, c trois fonctions continues sur I , et telles que a ne s'annule pas sur I . Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Alors l'équation différentielle $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ a une unique solution sur I vérifiant $y(x_0) = y_0$.

On applique ici ce théorème avec $a(x) = 1 - x^2$ (continue et non nulle sur $] -1, 1[= I$), $b(x) = -x$ et $c(x) = f(x)$ (toutes deux continues sur I) et $x_0 = 0$.

On a alors bien le résultat voulu.

2 – Soit φ une solution de $(\mathcal{E}_f)$. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, HR_n : « φ est n fois dérivable sur I ».

- HR_1 est vraie par définition même d'une solution.

- Soit $n \geq 1$ tel que HR_n soit vraie. On a alors, pour $x \in I$: $\varphi'(x) = \frac{1}{1-x^2} (x\varphi(x) + f(x))$,
 et $x \rightarrow \frac{1}{1-x^2} (x\varphi(x) + f(x))$ est d'après HR_n n fois dérivable sur I . Donc HR_{n+1} est bien vraie.

On a donc montré que φ est dérivable à tout ordre, en d'autres termes que φ est C^∞ sur I .

3.a – $(\mathcal{E}_0)$ s'écrit : $y' = \frac{x}{1-x^2} y$. On sait d'après le cours que sa solution générale s'écrit :

$$y = \lambda \exp\left(\int \frac{x}{1-x^2} dx\right) \text{ avec } \lambda \text{ décrivant } \mathbb{R}.$$

Ainsi, la solution générale de $(\mathcal{E}_0)$ est : $y = \lambda \exp\left(-\frac{1}{2} \ln(1-x^2)\right) = \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}}$

3.b – On peut faire la recherche d'une solution particulière par la variation de la constante, mais ça ne s'impose pas dans la mesure où une solution particulière nous est suggérée : on

pose $\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$. Comme f est continue, φ est dérivable sur I et on a :

$$\varphi_0'(x) = \frac{f(x)}{1-x^2} + \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Donc :

$$(1-x^2)\varphi_0'(x) - x\varphi_0(x) = f(x).$$

Ce qui montre bien que φ_0 est solution de $(\mathcal{E}_f)$ sur I .

Par suite la solution générale de $(\mathcal{E}_f)$ sur I est $y = \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$. La solution φ vérifiant $\varphi(0)=y_0$ est alors obtenue pour $\lambda=y_0$, ce qui donne finalement :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(y_0 + \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \right).$$

3.c – On reprend la forme générale des solutions de $(\mathcal{E}_f)$ avec $f(t)=1$:

$$y = \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Donc, la solution générale de $(\mathcal{E}_1)$ est :

$$y = \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Partie II

1 – Sachant la structure d'algèbre de $\mathbb{R}[X]$ et que la dérivée d'un polynôme est un polynôme, on en déduit que pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on a $\Delta(P) \in \mathbb{R}[X]$.

Soit n le degré du polynôme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. Alors, si $n \geq 1$, on a $d^\circ(P') = n-1$ et donc $(1-X^2)P'$ est de degré $n+1$, tout comme XP . Donc $\Delta(P)$ est de degré au plus $n+1$. Le coefficient du terme de degré $n+1$ est $-na_n - a_n \neq 0$. Donc, dans ce cas, on a $d^\circ(\Delta(P)) = n+1$. Si $n=0$, ie si P est une constante non nulle k , alors $\Delta(P) = -kX$ et le résultat reste vrai. Enfin $\Delta(0)=0$, donc quitte à poser la convention $-\infty+1=-\infty$, on peut dire que dans tous les cas : $d^\circ(\Delta(P)) = 1 + d^\circ(P)$.

2 – Soit Δ_m la restriction à $\mathbb{R}_m[X]$ de Δ . Alors pour $P \in \mathbb{R}_m[X]$, on a $d^\circ(P) \leq m$, et donc $d^\circ(\Delta(P)) = 1 + d^\circ(P) \leq m+1$, donc Δ_m est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_{m+1}[X]$. La linéarité est immédiate. Donc, Δ_m est bien une application linéaire de $\mathbb{R}_m[X]$ dans $\mathbb{R}_{m+1}[X]$.

3 – Il résulte de la question 1 sur les degrés que si $P \neq 0$, alors $\Delta(P) \neq 0$. Donc $\text{Ker}(\Delta_m) = \{0\}$ et Δ_m est injective.

4 – Par application du théorème du rang, on a : $\text{rg}(\Delta_m) = \dim(\mathbb{R}_m[X]) = m+1$, et par suite $\text{Im}(\Delta_{m+1}) \neq \mathbb{R}_{m+1}[X]$ et $\dim(\text{Im}(\Delta_{m+1})) = m+1$ (En d'autres termes $\text{Im}(\Delta_{m+1})$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_{m+1}[X]$).

5 – Pour k entier entre 0 et m , on calcule $\Delta_m(X^k)$:

$$\Delta_m(X^k) = (1 - X^2)kX^{k-1} - X^{k+1} = -(k+1)X^{k+1} + kX^{k-1} \text{ si } k \neq 0,$$

$$\text{et } \Delta_m(1) = -X.$$

Donc la matrice A_m s'écrit :

$$A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & 2 & & \\ & -2 & \ddots & m & \\ & & \ddots & 0 & \\ & & & -m-1 & \end{bmatrix}.$$

6 – Si P est une solution polynomiale de $(\mathcal{E}_f)$, on a alors $\Delta(P) = f$, et on a vu que pour un tout polynôme P , $\Delta(P)$ est aussi un polynôme. Donc : f est le polynôme $\Delta(P)$.

7.a – Dire que le polynôme P est solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_Q)$ revient à dire :

$$\Delta_{n-1}(P) = Q,$$

ce qui s'exprime matriciellement par : $A_{n-1}U = V$.

7.b – On le montre par implications circulaires :

i $\Rightarrow$ ii : Si $(\mathcal{E}_Q)$ admet une solution polynomiale P , alors $\Delta(P)=Q$ et donc, d'après II.1 $d^\circ(Q)=d^\circ(P)+1$, et donc $d^\circ(P)=n-1$. Donc $\Delta_{n-1}(P)=Q$, et ii est établi.

ii $\Rightarrow$ iii : immédiat avec le II.7.a.

iii $\Rightarrow$ i : Si S est solution de $A_{n-1}S=V$ avec S de coordonnées $s_0, \dots, s_{n-1}$, alors (d'après le II.7.a) le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n-1} s_k X^k$ est solution de $(\mathcal{E}_Q)$, ce qui prouve i.

Donc l'équivalence de ces trois propositions est bien établie.

$$7.c.i - A_3 S = V \text{ s'écrit : } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}, \text{ ce qui s'écrit aussi :}$$

$$\begin{cases} s_1 = q_0 \\ -s_0 + 2s_2 = q_1 \\ -2s_1 + 3s_3 = q_2 \\ -3s_2 = q_3 \\ -4s_3 = q_4 \end{cases}$$

Une résolution par substitution conduit au système équivalent suivant :

$$\begin{cases} s_1 = q_0 \\ s_2 = -\frac{1}{3}q_3 \\ s_0 = -\frac{2}{3}q_3 - q_1 \\ s_3 = \frac{1}{3}q_2 + \frac{2}{3}q_0 \\ \frac{-4}{3}q_2 - \frac{8}{3}q_0 = q_4 \end{cases}$$

Ainsi ce système admet une solution si, et seulement si $3q_4 + 4q_2 + 8q_0 = 0$, et dans ce cas, cette solution est unique et est : $(s_0, \dots, s_3) = \left(-\frac{2}{3}q_3 - q_1, q_0, -\frac{1}{3}q_3, \frac{1}{3}q_2 + \frac{2}{3}q_0 \right)$.

7.c.iii – On a donc, lorsque $3q_4 + 4q_2 + 8q_0 = 0$, l'unique solution P de $(\mathcal{E}_Q)$ est :

$$P = \left(-\frac{2}{3}q_3 - q_1 \right) + q_0 X - \frac{1}{3}q_3 X^2 + \left(\frac{1}{3}q_2 + \frac{2}{3}q_0 \right) X^3$$

ou encore, compte tenu de $q_2 = -\frac{3}{4}q_4 - 2q_0$:

$$P = \left(-\frac{2}{3}q_3 - q_1 \right) + q_0 X - \frac{1}{3}q_3 X^2 - \frac{1}{4}q_4 X^3.$$

7.c.iv – $3q_4+4q_2+8q_0=0$ est une CNS pour que $Q \in \mathbb{R}_4[X]$ ait un antécédent par Δ_3 . En d'autres termes, $3q_4+4q_2+8q_0=0$ est une équation de $\mathbf{Im}(\Delta_3)$.

7.d.i – L'existence de l'intégrale et la linéarité de λ_n sont immédiates.

De plus, en prenant pour R le polynôme 1 (constant), on a : $\lambda_n(1) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} du = \pi$, donc λ_n est une forme linéaire non nulle.

7.d.ii – Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

$$\begin{aligned}\lambda_n(\Delta_n(P)) &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[(1 - \sin^2 u) P'(\sin u) - \sin u \cdot P(\sin u) \right] \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\cos^2 u \cdot P'(\sin u) - \sin u \cdot P(\sin u) \right] du\end{aligned}$$

or :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin u \cdot P(\sin u) du = \left[-\cos u \cdot P(\sin u) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u \cdot P'(\sin u) du = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u \cdot P'(\sin u) du.$$

Finalement, on obtient bien : $\lambda_n(\Delta_n(P))=0$.

7.d.iii – Ceci montre donc que $\mathbf{Im}(\Delta_n) \subset \mathbf{Ker}(\lambda_n)$. Or il a été établi que $\mathbf{Im}(\Delta_n)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$, et c'est aussi le cas du noyau de la forme linéaire non nulle λ_n . Ces deux ensembles sont donc de même dimension (finie), et donc $\mathbf{Im}(\Delta_n) = \mathbf{Ker}(\lambda_n)$.

7.d.iv – On va en fait chercher à déterminer $\mathbf{Ker}(\lambda_n)$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, avec $P = \sum_{k=0}^n p_k X^k$. Alors

$$\lambda_n(P) = \sum_{k=0}^n \pi p_k \alpha_k = \pi \left(p_0 + \sum_{\substack{k=2 \\ k \text{ pair}}}^n p_k \frac{(k-1)(k-3)\dots 1}{k(k-2)\dots 2} \right). \text{ Une équation de } \mathbf{Im}(\Delta_n) \text{ est donc :}$$

$$\boxed{p_0 + \sum_{\substack{k=2 \\ k \text{ pair}}}^n p_k \frac{(k-1)(k-3)\dots 1}{k(k-2)\dots 2} = 0 \text{ ou de façon équivalente : } \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n p_k \alpha_k = 0.}$$

7.e – D'après l'équivalence entre les propriétés i et ii du II.7.b, on peut dire qu'une CNS pour que $(\mathcal{E}_Q)$ admette une solution polynomiale est que $Q \in \mathbf{Im}(\Delta_n)$, c'est-à-dire :

$$\boxed{q_0 + \sum_{\substack{k=2 \\ k \text{ pair}}}^n q_k \frac{(k-1)(k-3)\dots 1}{k(k-2)\dots 2} = 0}$$

7.f – Pour $n=4$, cette condition s'écrit donc :

$$q_0 + q_2 \frac{1}{2} + q_4 \frac{3}{8} = 0, \text{ ou encore : } 8q_0 + 4q_2 + 3q_4 = 0 : \text{ on retrouve bien l'expression du 7.c.ii.}$$

Partie III

1.a – Soit φ une solution de $(\mathcal{E}_f)$, et soit $y_0 = \varphi(0)$. On a alors :

$$\forall x \in I, \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(y_0 + \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \right).$$

Or, f est développable en série entière (DSE en abrégé pour la suite) de rayon de convergence >1 . Or, $t \rightarrow (1+t)^{-\frac{1}{2}}$ est, d'après le cours DSE de rayon 1. Donc, en substituant $-t^2$ à t , on en déduit que $t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est DES de rayon $\sqrt{1}=1$, et donc par utilisation de la série produit, $t \rightarrow \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est DSE de rayon ≥ 1 . Enfin, par primitivation de série entière, $x \rightarrow \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ est DES de rayon ≥ 1 . Puis on applique à nouveau le théorème sur la série produit, et finalement φ est DES de rayon ≥ 1 .

1.b.i – On a alors, pour tout $x \in I$: $(1-x^2) \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$. Donc, en réindiciant, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k - \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) a_{k-1} x^k - \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k.$$

On met tout sous une même somme :

$$a_1 + (2a_2 - a_0)x + \sum_{k=2}^{\infty} ((k+1)a_{k+1} - ka_{k-1})x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k.$$

Ce qui, d'après l'unicité du DES équivaut à :

$$\begin{cases} a_1 = b_0 \\ 2a_2 - a_0 = b_1 \\ \forall k \geq 2, (k+1)a_{k+1} - ka_{k-1} = b_k \end{cases},$$

donc (la deuxième relation rentre dans le cas général) :

$$\forall k \geq 1, (k+1)a_{k+1} - ka_{k-1} = b_k, \text{ ou encore : } \boxed{\forall k \geq 1, a_{k+1} = \frac{k}{k+1} a_{k-1} + \frac{1}{k+1} b_k}.$$

1.b.ii – On rappelle d'abord que, pour $i \in \mathbb{N}$, on a : $\alpha_{i+2} = \frac{i+1}{i+2} \alpha_i$ et que $\alpha_i \neq 0$ pour i pair.

Donc, pour $k \geq 1$: $a_{2k} = \frac{2k-1}{2k} a_{2(k-1)} + \frac{1}{2k} b_{2k-1}$ et $\alpha_{2k} = \frac{2k-1}{2k} \alpha_{2(k-1)}$; donc :

$$\boxed{\frac{a_{2k}}{\alpha_{2k}} = \frac{a_{2(k-1)}}{\alpha_{2(k-1)}} + \frac{1}{2k-1} \frac{b_{2k-1}}{\alpha_{2(k-1)}}}.$$

1.b.iii – Il s'en suit que pour $p \in \mathbb{N}$, on a : $\frac{a_{2p}}{\alpha_{2p}} = \sum_{k=1}^p \frac{1}{2k-1} \frac{b_{2k-1}}{\alpha_{2(k-1)}} + \frac{a_0}{\alpha_0}$, ou encore :

$$a_{2p} = \alpha_{2p} \left(\sum_{k=1}^p \frac{1}{2k-1} \frac{b_{2k-1}}{\alpha_{2(k-1)}} + \frac{a_0}{\alpha_0} \right)$$

1.b.iv – On a, pour $k \geq 1$: $(2k+1)a_{2k+1} = 2ka_{2k-1} + b_{2k}$, puis on multiplie par $\alpha_{2k} = \frac{2k-1}{2k} \alpha_{2(k-1)}$:

$$(2k+1)a_{2k+1}\alpha_{2k} = (2k-1)a_{2k-1}\alpha_{2(k-1)} + b_{2k}\alpha_{2k}.$$

1.b.v – Ainsi, si on pose $u_k = (2k+1)a_{2k+1}\alpha_{2k}$, on a alors $u_k = u_{k-1} + b_{2k}\alpha_{2k}$, et par suite $u_p = u_0 + \sum_{k=1}^p b_{2k}\alpha_{2k}$, soit : $(2p+1)a_{2p+1}\alpha_{2p} = a_1\alpha_0 + \sum_{k=1}^p b_{2k}\alpha_{2k}$, et finalement (sachant $a_1=b_0$) :

$$a_{2p+1} = \frac{1}{(2p+1)\alpha_{2p}} \left(b_0\alpha_0 + \sum_{k=1}^p b_{2k}\alpha_{2k} \right) = \frac{1}{(2p+1)\alpha_{2p}} \sum_{k=0}^p b_{2k}\alpha_{2k}.$$

NB : Sauf erreur de ma part, il semblerait qu'il y ait une petite erreur dans l'énoncé (k entre 1 et p).

2.a – Le seul problème réside dans l'existence de l'intégrale. Pour $x \in]-1, 1[$, $t \rightarrow \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]x, 1[$ et f est continue en 1 (car DSE de rayon $R > 1$). Donc $f(t) =_{t \rightarrow 1} O(1)$, et $\left| \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} \right| =_{t \rightarrow 1} O\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$ (écrire $\sqrt{1-t^2} = \sqrt{(1-t)(1+t)} \sim_{t \rightarrow 1} \sqrt{2(1-t)}$), or $t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ est intégrable sur $]x, 1[$ pour $x < 1$, et donc φ est bien définie sur $]-1, 1[$.

2.b – Posons $y_0 = \varphi(0) = -\int_0^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$, de sorte $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt + y_0 \right)$, et donc d'après I.3.a : φ est la solution de $(\mathcal{E}_f)$ qui vérifie $\varphi(0) = y_0$.

2.c.i – On a ainsi :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 \theta}} \left(\int_1^{\cos \theta} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt + y_0 \right) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 \theta}} \left(\int_{1-\varepsilon}^{\cos \theta} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt + y_0 \right)$$

Puis on fait le changement de variable $t = \cos u$:

$$\int_{1-\varepsilon}^{\cos \theta} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_{\arccos(1-\varepsilon)}^{\theta} \frac{f(\cos u)}{\sqrt{\sin^2 u}} (-\sin u) du. \text{ Or, sur l'intervalle considéré, on a } \sin u > 0, \text{ et}$$

donc à la limite quand ε tend vers 0 on obtient :

$$\varphi(x) = \frac{-1}{\sin \theta} \int_0^{\theta} f(\cos u) du.$$

2.c.ii – La fonction $u \rightarrow \cos u$ est continue sur $]-\pi, \pi[$, et à valeurs dans $]-1, 1[$, et f est continue sur $]-1, 1[$. Donc $u \rightarrow f(\cos u)$ est continue sur $]-\pi, \pi[$, et donc :

$$F \text{ est dérivable sur }]-\pi, \pi[\text{ et pour } \theta \in]-\pi, \pi[, \text{ on a } F'(\theta) = f(\cos \theta).$$

Le théorème utilisé est le suivant : si g est une fonction continue sur un intervalle I contenant au moins deux points, et si $a \in I$, alors $G : x \rightarrow \int_a^x g(t) dt$ est une primitive de g sur I .

2.c.iii – Par suite, $-\frac{F(\theta)}{\sin \theta} \sim_{\theta \rightarrow 0^+} -\frac{F(\theta) - F(0)}{\theta} \xrightarrow{\theta \rightarrow 0^+} -F'(0) = -f(1)$. Donc :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x) = -f(1)}.$$

2.d.i – On fait un calcul direct :

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} [\arcsin t]_1^x = \frac{\arcsin x - \frac{\pi}{2}}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \int_1^x \frac{t dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} [\sqrt{1-t^2}]_1^x = 1.$$

2.d.ii – Soit $k \geq 2$ et $x \in I$. Pour $0 < \varepsilon \leq 2$:

$$\int_{1-\varepsilon}^x \frac{t^k dt}{\sqrt{1-t^2}} = \left[-t^{k-1} \sqrt{1-t^2} \right]_{1-\varepsilon}^x + (k-1) \int_{1-\varepsilon}^x t^{k-2} \sqrt{1-t^2} dt, \text{ puis, en faisant tendre } \varepsilon \text{ vers } 0 :$$

$$\varphi_k(x) = -x^{k-1} + \frac{k-1}{\sqrt{1-x^2}} \int_1^x t^{k-2} \sqrt{1-t^2} dt = -x^{k-1} + \frac{k-1}{\sqrt{1-x^2}} \int_1^x \frac{t^{k-2} (1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Donc : $\varphi_k(x) = -x^{k-1} + (k-1)(\varphi_{k-2}(x) - \varphi_k(x))$, et finalement :

$$\boxed{\varphi_k(x) = \frac{-x^{k-1}}{k} + \frac{k-1}{k} \varphi_{k-2}(x)}.$$

2.d.iii – Sachant $\varphi_1(x)=1$ et la formule de récurrence ci-dessus, il est immédiat (avec une récurrence) que pour $p \in \mathbb{N}$: φ_{2p+1} est une fonction polynomiale de degré $2p$.

2.d.iv – Posons HR_p la propriété à montrer : ‘ $\exists P_{2p} \in \mathbb{R}[X]$, ($d^\circ(P_{2p})=2p-1$ et $\forall x \in I$, $\varphi_{2p}(x) = P_{2p}(x) + \alpha_{2p} \varphi_0(x)$)’.

• HR_0 pose problème, dans la mesure où aucun polynôme n’est de degré -1. On est obligé ici d’adopter la convention que le polynôme nul est de degré -1. Il s’agit alors d’établir que $\varphi_0 = \alpha_0 \varphi_0$, ce qui est vrai car $\alpha_0 = 1$. Donc HR_0 est vraie avec $P_0 = 0$.

• Soit $p \geq 0$ tel que HR_p soit vraie. Alors (pour $x \in I$), on a :

$$\varphi_{2p+2}(x) = \frac{-x^{2p+1}}{2p+2} + \frac{2p+1}{2p+2} (P_{2p}(x) + \alpha_{2p} \varphi_0(x)).$$

On pose alors $P_{2p+2} = -\frac{x^{2p+1}}{2p+2} + \frac{2p+1}{2p+2} P_{2p}$: P_{2p+2} est bien un polynôme de degré $2p+1$ (car P_{2p} est de degré $2p-1 < 2p+1$), de sorte que :

$$\varphi_{2p+2}(x) = P_{2p+2}(x) + \frac{2p+1}{2p+2} \alpha_{2p} \varphi_0(x) = P_{2p+2}(x) + \alpha_{2p+2} \varphi_0(x)$$

Ce qui prouve HR_{p+1} et achève la démonstration.

2.d.v – D’après 2.d.iii, si k est impair alors φ_k est polynomiale et a donc par continuité une limite finie en -1.

Si k est pair, le résultat de la question précédente assure que φ_k a une limite finie en 1 si, et seulement si c’est le cas de φ_0 . Or $\varphi_0(x) = \frac{-\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\arccos x \sim_{x \rightarrow 1} \sqrt{2(1-x)}$ et donc φ_0

tend vers -1 en 1.

Finalement $\boxed{\varphi_k \text{ a une limite finie en } 1 \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}}$.

On pouvait répondre plus rapidement en remarquant que φ_k n’est autre que φ lorsqu’on prend $f(x)=x^k$, en remarquant qu’une telle fonction f est bien somme d’une série entière de rayon >1 ($R=\infty$), et le 2.c.iii assure alors le résultat.

2.e – Soit $x \in]-1, 1[$. On regarde les sommes partielles : $\sum_{k=0}^n b_k \varphi_k(x)$:

$$\sum_{k=0}^n b_k \varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \int_1^x \sum_{k=0}^n \frac{b_k t^k}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Posons, pour $t \in [x, 1[$: $g_k(t) = \frac{b_k t^k}{\sqrt{1-t^2}}$.

Les g_k sont continues et intégrables sur $[x, 1[$, et $\sum g_k$ converge simplement sur $[x, 1[$ vers g

définie par : $g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ (car $\sum b_k t^k$ est une série entière de rayon >1 , de somme f).

Enfin, $\int_x^1 \left| \frac{b_k t^k}{\sqrt{1-t^2}} \right| dt \leq |b_k| \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \pi |b_k|$, et de la convergence absolue en $t=1$ de $\sum b_k t^k$,

on déduit que $\sum \pi |b_k|$ converge, et donc $\sum \int_{[x, 1[} |g_k|$ converge.

Donc, d’après le théorème d’intégration terme à terme, on en déduit que $\sum \int_x^1 g_k$ converge et

que : $\sum_{k=0}^{\infty} \int_x^1 g_k = \int_x^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$, et par suite $\sum_{k=0}^{\infty} b_k \varphi_k(x) = \varphi(x)$:

$$\boxed{\sum b_k \varphi_k \text{ converge simplement vers } \varphi \text{ sur }]-1, 1[}$$