 Corrigé de M. Quercia (michel.quercia@prepas.org)

1 Séries de Laurent formelles

1.1.1) Immédiat.

1.1.2) $a_j b_k$ n'est à priori non nul que si $j \geqslant \mathrm{val}(a)$ et $k \geqslant \mathrm{val}(b)$, soit $j \leqslant i - \mathrm{val}(b)$. L'ensemble des valeurs de j étant borné, la somme définissant c_i est bien finie. Il y a au plus $i - \mathrm{val}(b) - \mathrm{val}(a) + 1$ termes non nuls dans la somme ; et il n'y en a aucun si $i < \mathrm{val}(a) + \mathrm{val}(b)$, donc on a bien une série de Laurent.

1.1.3) Mettre en facteur le monôme de plus bas degré.

1.2) Vérifications sans difficultés. L'associativité de la multiplication résulte de la formule : $(abc)_n = \sum_{i+j+k=n} a_i b_j c_k$.

1.3) Si $a = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ est une série de Laurent de valuation nulle ($a_0 \neq 0$), alors on peut définir une série de Laurent $b = \sum_{n \geqslant 0} b_n z^n$ telle que $ab = 1$. les coefficients b_n sont définis par les relations de récurrence :

$$a_0 b_0 = 1, \qquad a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 = 0 \text{ si } n \geqslant 1.$$

Ainsi toute série de Laurent de valuation nulle est inversible. Il en va de même pour une série de Laurent arbitraire non nulle par mise en facteur du monôme de plus bas degré. La relation sur les valuations est immédiate.

1.4) $b_0 \longleftarrow 1/a_0$
Pour $i = 1 \ldots k$ *faire*
 $s \longleftarrow 0$
 Pour $j = 1 \ldots i$ *faire* $s \longleftarrow s + a_j b_{i-j}$ *finpour*
 $b_i \longleftarrow -s/a_0$
finpour

1.5) On raisonne par récurrence sur j. $B_0 = 1$ est de valuation nulle et $E_0 = 1 - a/z^{2k} = \alpha_1 z + \ldots$ est de valuation au moins $1 = 2^0$. Si B_j et E_j sont définis avec $\mathrm{val}(B_j) = 0$ et $\mathrm{val}(E_j) \geqslant 2^j$ alors $B_j \neq 0$ donc B_{j+1} est bien défini, de valuation nulle car $\mathrm{val}(E_j/2B_j) = \mathrm{val}(E_j) - \mathrm{val}(B_j) > 0$. Ensuite, $a/2^{2k} = B_j^2 - E_j = B_{j+1}^2 - E_{j+1}$, donc $E_{j+1} = E_j + (B_j - B_{j+1})(B_j + B_{j+1}) = E_j^2(B_j + B_{j+1})/(2B_j)$, d'où $\mathrm{val}(E_{j+1}) \geqslant 2\,\mathrm{val}(E_j) \geqslant 2^{j+1}$.

1.6) $\mathrm{val}(B_{j+1} - B_j) = \mathrm{val}(E_j) \geqslant 2^j$ donc tous les coefficients de $B_{j+1} - B_j$ d'indice inférieur à 2^j sont nuls. En particulier le coefficient de z^n dans B_j est constant dès que $2^j \geqslant n$. Notons b_n cette constante, et soit $b = \sum_{n \in \mathbf{Z}} b_n z^n$. C'est une série de Laurent car $b_n = 0$ pour tout $n < 0$, de valuation nulle car $b_0 = 1$.
De plus, $b^2 - a/z^{2k} = (b^2 - B_j^2) + (B_j^2 - a/z^{2k})$ a une valuation au moins égale à 2^j et ce, pour tout j, donc $b^2 = a/z^{2k}$. On en déduit que $z^k b$ est une racine carrée de a dans le corps des séries formelles.

Remarques :
– La méthode de calcul de $\sqrt{a}$ illustrée dans cette question est une adaptation au cadre des séries formelles de la méthode de Héron.
– Plus généralement, une série formelle non nulle admet une racine carrée dans le corps des séries formelles si et seulement si sa valuation est paire et son coefficient de plus bas degré admet une racine carrée dans K (avec $\mathrm{car}(K) \neq 2$). C'est faux en caractéristique 2 où l'élévation au carré d'une série formelle se réduit à l'élévation au carré de chaque monôme.

2 Fractions continues

2.1) On se place dans le corps $L(X)$ des fractions rationnelles en une indéterminée X, à coefficients dans L. Soit $F_k(X) = [a_0, \ldots, a_k, X] \in L(X)$. On démontre aisément par récurence sur k que $F_k(X) = (p_k X + p_{k-1})/(q_k X + q_{k-1})$ où (pk) et (q_k) sont les suites données dans l'énoncé prolongées par $p_{-1} = 1$, $q_{-1} = 0$. Il en résulte, si $q_k \neq 0$, que $[a_0, \ldots, a_k] = F_{k-1}(a_k) = p_k/q_k$. Par contre si $q_k = 0$, $[a_0, \ldots, a_k]$ n'est pas défini (oubli de l'énoncé ?)

2.2) $p_{-1} \longleftarrow 1$; $p_0 \longleftarrow a_0$; $q_{-1} \longleftarrow 0$; $q_0 \longleftarrow 1$
pour $i = 1 \ldots k$ *faire*
$x \longleftarrow p_0$; $p_0 \longleftarrow a_i p_0 + p_{-1}$; $p_{-1} \longleftarrow x$
$x \longleftarrow q_0$; $q_0 \longleftarrow a_i q_0 + q_{-1}$; $q_{-1} \longleftarrow x$
finpour
retourner p_0/q_0 *(si* $q_0 \neq 0$*)*

Nombre d'opérations : $2k$ additions, $2k$ multiplications et une division.

2.3) Calcul immédiat.

2.4) La suite (q_k) est strictement croissante, donc $q_k \geqslant k+1$ et $|C_k - C_{k-1}| \leqslant 1/(k(k+1))$. Ainsi la série télescopique associée à la suite (C_k) est convergente et cela implique la convergence de la suite (C_k).

3 Fractions continues de polynômes

Remarque : φ est bien définie. En effet, si $U/V = U_1/V_1$ alors $UV_1 = U_1V$ donc $\varphi(U)\varphi(V_1) = \varphi(U_1)\varphi(V)$ et $\varphi(U)/\varphi(V) = \varphi(U_1)/\varphi(V_1)$. Le caractère « morphisme d'anneau » de φ est immédiat.

3.1.1) $\mathrm{val}(\varphi(1/U)) = -\mathrm{val}(\varphi(U)) = \deg(U)$.

3.1.2) La relation $\psi(a+b) = \psi(a) + \psi(b)$ est évidente. Avec $a = z$ et $b = z^{-1}$ on a $\psi(ab) = 1 \neq 0 = \psi(a)\psi(b)$.

3.1.3) $f = \varphi(\psi(f)) \iff \forall\, n \in \mathbf{N}^*,\ f_n = 0 \iff f \in K[z^{-1}]$.

3.2) Soient (p_k) et (q_k) les suites de polynômes associés à la suite (a_k) comme dans **2.1**. On montre par récurence que la suite $(\deg(q_k))$ est strictement croissante, en particulier $\deg(q_k) \geqslant k$ et donc C_k est bien défini. Par ailleurs, $\mathrm{val}(\varphi(C_k) - \varphi(C_{k-1})) = \mathrm{val}(\varphi(C_k - C_{k-1})) = \deg(q_k q_{k-1}) \geqslant k(k-1)$ donc les séries $\varphi(C_k)$ et $\varphi(C_{k-1})$ ont mêmes coefficients de z^n pour tout $n < k(k-1)$. On construit alors, comme au **1.6**, une série de Laurent F telle que $\varphi(C_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} F$ au sens donné en **1.6**.

3.3) On montre aisément par récurrence sur k que α_k et a_k sont bien définis et que $\alpha_k \notin \mathrm{Im}\,\varphi$. Par ailleurs, par définition de φ et ψ, on a $\mathrm{val}(\alpha_k - \varphi(\psi(\alpha_k))) > 0$, donc $\deg(a_{k+1}) = -\mathrm{val}(\alpha_{k+1}) > 0$. Ensuite,

$$(\alpha_k - \varphi(a_k)) \times (\alpha_{k+1}\varphi(p_k) + \varphi(p_{k-1})) = \alpha_k\varphi(p_{k-1}) + \varphi(p_k) - \varphi(p_{k-1})\varphi(a_k) = \alpha_k\varphi(p_{k-1}) + \varphi(p_{k-2}),$$

et de même avec la suite (q_i), d'où l'on déduit que le quotient $\dfrac{\alpha_{k+1}\varphi(p_k) + \varphi(p_{k-1})}{\alpha_{k+1}\varphi(q_k) + \varphi(q_{k-1})}$ est indépendant de k. Pour $k = 0$ il vaut $\varphi(a_0) + 1/\alpha_1 = \alpha_0 = F$. Enfin,

$$F - \varphi(C_k) = F - \frac{\varphi(p_k)}{\varphi(q_k)} = \frac{\varphi(p_{k-1}q_k - p_k q_{k-1})}{\varphi(q_k)(\alpha_{k+1}\varphi(q_k) + \varphi(q_{k-1}))} = \frac{(-1)^k}{\varphi(q_k)(\alpha_{k+1}\varphi(q_k) + \varphi(q_{k-1}))}$$

d'où $\mathrm{val}(F - \varphi(C_k)) = \deg(q_k) - \mathrm{val}(\alpha_{k+1}\varphi(q_k) + \varphi(q_{k-1})) > \deg(q_k)^2 \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty$, et donc $\varphi(C_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} F$.

3.4.1) On sait déjà que la suite $(\deg(\varphi(q_k)))$ est strictement croissante. Par ailleurs, pour $k < \ell$ on a :

$$\varphi(C_k) - F = \varphi(C_k - C_{k+1}) + \ldots + \varphi(C_{\ell-1} - C_\ell) + (\varphi(C_\ell) - F).$$

Dans cette somme, les valuations de tous les termes, sauf peut-être le dernier, croissent strictement. On en déduit $\mathrm{val}(\varphi(C_k) - F) \geqslant \min(\mathrm{val}(\varphi(C_k - C_{k+1})), \mathrm{val}(\varphi(C_\ell) - F))$, avec égalité si les deux termes du min sont différents. C'est le cas si ℓ est choisi sufisament grand, puisque $\mathrm{val}(\varphi(C_\ell) - F) \xrightarrow[\ell\to+\infty]{} +\infty$.
Ainsi, $\mathrm{val}(\varphi(C_k) - F) = \mathrm{val}(\varphi(C_k - C_{k+1})) = \deg(q_k) + \deg(q_{k+1})$, ce qui entraîne $\mathrm{val}(\varphi(p_k) - F\varphi(q_k)) = \deg(q_{k+1})$.

3.4.2) On résoud le système proposé par rapport à a et b. Le déterminant est $\Delta = q_{k-1}p_k - q_k p_{k-1} = (-1)^{k-1}$, d'où $a = (qp_k - pq_k)/\Delta$ et $b = (q_{k-1}p - p_{k-1}q)/\Delta$ sont bien des polynômes.

3.4.3) Si $a = 0$ alors $q = bq_k$ avec $\deg(q) < \deg(q_k)$, ce qui implique $b = 0$ puis $p = q = 0$, en contradiction avec l'hypothèse $p \wedge q = 1$. De même, si $b = 0$, alors a est diviseur commun de p et q, ce qui implique a constant, et ce cas est exclus par l'énoncé. Ensuite,

$$\varphi(p/q) - F = (\varphi(p_k/q_k) - F) + \varphi(p/q - p_k/q_k) = (\varphi(p_k/q_k) - F) + \varphi((-1)^{k-1}a/(qq_k)).$$

Les deux derniers termes on pour valuations respectivement $\deg(q_k) + \deg(q_{k+1})$ et $\deg(q_k) + \deg(q) - \deg(a)$. On en déduit $\mathrm{val}(\varphi(p/q) - F) = \deg(q_k) + \deg(q) - \deg(a)$, puis $\mathrm{val}(\varphi(p) - F\varphi(q)) = \deg(q_k) - \deg(a)$.

3.4.4) On choisit k tel que $\deg(q_k) \leqslant \deg(q) < \deg(q_{k+1})$ et on décompose p et q comme en **3.4.2**. On a toujours

$$(\varphi(p/q) - F) = (\varphi(p_k/q_k) - F) + \varphi((-1)^{k-1}a/(qq_k)),$$

et si l'on suppose $a \neq 0$:

$$\mathrm{val}(\varphi(p_k/q_k) - F) = \deg(q_k) + \deg(q_{k+1}) < \deg(q_k) + \deg(q) - \deg(a) = \mathrm{val}(\varphi((-1)^{k-1}a/(qq_k))).$$

Ainsi, pour $a \neq 0$, on obtient $\mathrm{val}(\varphi(p) - F\varphi(q)) = \deg(q_k) - \deg(a) < \deg(q)$, ce qui est contraire à l'hypothèse de l'énoncé. Par conséquent $a = 0$, d'où $q = bq_k$ et $p = bp_k$, et enfin $p/q = p_k/q_k$.

3.5) On note $\deg(D) = 2d$ et soit $a = \varphi(D)$, série formelle de valuation $-2d$. En reprenant les notations de **1.4**, soient $C_j = z^{-d}B_j$, série formelle convergeant vers $\sqrt{a}$, et $F_j = C_j - C_{j+1}$, série formelle convergeant vers la série nulle. On a les relations de récurrence :

$$C_0 = z^{-d}, \qquad F_j = \frac{C_j^2 - a}{2C_j}, \qquad C_{j+1} = C_j - F_j, \qquad F_{j+1} = \frac{F_j^2}{2C_{j+1}}.$$

Par ailleurs, $\mathrm{val}(C_j) = -d$ et $\mathrm{val}(F_j) = -d + \mathrm{val}(E_j) \geqslant -d + 2^j$. On décompose :

$$\begin{aligned} C_j &= \sum_{n \leqslant 0} c_{jn} z^n + \sum_{n \geqslant 1} c_{jn} z^n = \varphi \circ \psi(C_j) + C'_j \\ F_j &= \sum_{n \leqslant 0} f_{jn} z^n + \sum_{n \geqslant 1} f_{jn} z^n = \varphi \circ \psi(F_j) + F'_j. \end{aligned}$$

Lemme : $\psi(F_{j+1})$ *est le quotient de la division euclidienne de* $\psi(F_j)^2$ *par* $2\psi(C_{j+1})$.
Démonstration : $\deg(\psi(C_{j+1})) = d$ donc la division précédente est bien définie. Soit $\psi(F_j)^2 = Q\psi(2C_{j+1}) + R$ avec $Q, R \in \mathbf{K}[x]$ et $\deg(R) < d$. Comme $\deg(\psi(F_j)) \leqslant d - 2^j$, on a $\deg(Q) \leqslant d - 2^{j+1}$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} 2C_{j+1}(F_{j+1} - \varphi(Q)) &= F_j^2 - \varphi \circ \psi(2C_{j+1})\varphi(Q) - 2C'_{j+1}\varphi(Q) \\ &= F_j^2 - \varphi \circ \psi(F_j)^2 + \varphi(R) - 2C'_{j+1}\varphi(Q) \\ &= 2F_jF'_j - F'^2_j + \varphi(R) - 2C'_{j+1}\varphi(Q). \end{aligned}$$

On en déduit $\mathrm{val}(2C_{j+1}(F_{j+1} - \varphi(Q))) \geqslant \min(2^j + 1 - d, 2, 1 - d, 2^{j+1} + 1 - d) > -d = \mathrm{val}(2C_{j+1})$. Ainsi, $\mathrm{val}(F_{j+1} - \varphi(Q))) > 0$, d'où $\psi(F_{j+1}) = \psi \circ \varphi(Q) = Q$.

Il résulte de ce lemme que l'on peut calculer les polynômes $\psi(C_j)$ et $\psi(D_j)$ par les relations de récurrence :

$$\psi(C_0) = x^d, \quad \psi(F_0) = \mathrm{quo}(x^{2d} - D, 2x^d), \quad \psi(C_{j+1}) = \psi(C_j) - \psi(F_j), \quad \psi(F_{j+1}) = \mathrm{quo}(\psi(F_j)^2, 2\psi(C_{j+1})),$$

où l'on a noté $\mathrm{quo}(u, v)$ le quotient de la division euclidienne du polynôme u par le polynôme v. On en déduit l'algorithme suivant :

$d \longleftarrow \deg(D)$; $C \longleftarrow x^d$; $F \longleftarrow \mathrm{quo}(x^{2d} - D, 2x^d)$
tant que $F \neq 0$ *faire*
  $C \longleftarrow C - F$; $F \longleftarrow \mathrm{quo}(F^2, 2C)$
fin tant que
retourner C.

Le degré maximal des polynômes manipulés est $2d = \deg(D)$.

3.6.1) On démontre par récurrence sur k que P_k et Q_k sont bien définis dans $K[x]$, que $Q_k \neq 0$ et que $P_k^2 \equiv D \bmod Q_k$. C'est immédiat pour $k = 0$. Ensuite, si P_k et Q_k vérifient les propriétés indiquées alors P_{k+1} est un polynôme congru à $-P_k$ modulo Q_k, donc $P_{k+1}^2 \equiv P_k^2 \equiv D \bmod Q_k$, ce qui prouve que $Q_{k+1} \in K[x]$ et on a $Q_{k+1} \neq 0$ car D n'est pas le carré d'un polynôme. Enfin, $D - P_{k+1}^2 = Q_k Q_{k+1}$ donc $P_{k+1}^2 \equiv D \bmod Q_{k+1}$.

3.6.2) La relation $\psi(F/\varphi(Q)) = \mathrm{quo}(\psi(F), \varphi(Q))$ s'établit comme en **3.5**. L'expression donnée pour a'_k s'en déduit immédiatement.

3.6.3) Pour $k = 0$ on a $\alpha_0 = \sqrt{D} = \dfrac{\varphi(P_0) + \sqrt{D}}{\varphi(Q_0)}$. Si l'on suppose $\alpha_k = \dfrac{\varphi(P_k) + \sqrt{D}}{\varphi(Q_k)}$ alors $a_k = \psi(\alpha_k) = a'_k$ d'après la question précédente, et l'on a :

$$\frac{\varphi(P_{k+1}) + \sqrt{D}}{\varphi(Q_k)}(\alpha_k - \varphi(a_k) = \frac{(\varphi(P_{k+1}) + \sqrt{D})(\varphi(P_k - a'_k Q_k) + \sqrt{D})}{\varphi(Q_k Q_{k+1})} = \frac{(\sqrt{D} + \varphi(P_{k+1}))(\sqrt{D} - \varphi(P_{k+1}))}{\varphi(D) - \varphi(P_{k+1})^2} = 1,$$

ce qui prouve que $\alpha_{k+1} = \dfrac{\varphi(P_{k+1}) + \sqrt{D}}{\varphi(Q_{k+1})}$.

4 Application aux intégrales pseudo-hyperelliptiques

4.1) $\log(a + b\sqrt{D})' = \dfrac{2a'\sqrt{D} + 2b'D + bD'}{2(a + b\sqrt{D})\sqrt{D}} = \dfrac{(2a'\sqrt{D} + 2b'D + bD')(a - b\sqrt{D})}{2(a^2 - Db^2)\sqrt{D}} = \dfrac{u + v\sqrt{D}}{2(a^2 - Db^2)\sqrt{D}}$
avec $u = 2(ab' - a'b)D + 2abD'$ et $v = 2aa' - 2bb'D - b^2D' = (a^2 - Db^2)'$. Donc $\log(a + b\sqrt{D})'$ est de la forme $h/\sqrt{D}$ avec h polynôme si est seulement si $v = 0$ et $a^2 - Db^2$ divise u, ce qui équivaut à $a^2 - Db^2$ constant.

4.2) On a $\varphi(\mu) = \varphi(a)^2 - \varphi(D)\varphi(b)^2 = (\varphi(a) - \varphi(b)\sqrt{D})(\varphi(a) + \varphi(b)\sqrt{D})$, donc l'une des deux séries formelles $\varphi(a) \pm \varphi(b)\sqrt{D}$ a une valuation positive ou nulle. Soit $\varepsilon = \pm 1$ tel que $\mathrm{val}(\varphi(a) - \varepsilon\varphi(b)\sqrt{D}) \geqslant 0$. Si cette valuation est strictement plus grande que $\mathrm{val}(\varphi(b)) = -\deg(b)$, on conclut avec **3.4.4** que $\varepsilon a/b$ est un convergent de $\sqrt{D}$. Sinon, on a soit $b = 0$, soit b est constant non nul et $\mathrm{val}(\varphi(a) - \varphi(b)\sqrt{D}) = \mathrm{val}(\varphi(a) - \varphi(b)\sqrt{D}) = 0$.

Le cas $b = 0$ est impossible car h est supposé non nul.
Le cas $b \in \mathbf{R}^*$ et $\mathrm{val}(\varphi(a) \pm \varphi(b)\sqrt{D}) = 0$ mène aussi à une contradiction : $\mathrm{val}(2\varphi(b)\sqrt{D}) \geqslant 0$.

4.3) On a $\sqrt{D} = \dfrac{\alpha_k\varphi(p_{k-1}) + \varphi(p_{k-2})}{\alpha_k\varphi(q_{k-1}) + \varphi(q_{k-2})}$, d'où

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= -\frac{\varphi(p_{k-2}) - \varphi(q_{k-2})\sqrt{D}}{\varphi(p_{k-1}) - \varphi(q_{k-1})\sqrt{D}} \\
&= \frac{\varphi(Dq_{k-1}q_{k-2} - p_{k-1}p_{k-2}) + \varphi(p_{k-1}q_{k-2} - p_{k-2}q_{k-1})\sqrt{D}}{\varphi(p_{k-1}^2 - Dq_{k-1}^2)} \\
&= \varphi\Big(\frac{Dq_{k-1}q_{k-2} - p_{k-1}p_{k-2}}{p_{k-1}^2 - Dq_{k-1}^2}\Big) + \varphi\Big(\frac{(-1)^k}{p_{k-1}^2 - Dq_{k-1}^2}\Big)\sqrt{D} \\
&= \varphi\Big(\frac{P_k}{Q_k}\Big) + \varphi\Big(\frac{1}{Q_k}\Big)\sqrt{D}.
\end{aligned}$$

Comme $\sqrt{D} \notin \mathrm{Im}(\varphi)$, on peut identifier les parties rationnelles et irrationnelles, d'où $p_{k-1}^2 - Dq_{k-1}^2 = (-1)^k Q_k$.

Puisque a/b est l'un des convergent de $\sqrt{D}$, il existe $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $a/b = p_{k-1}/q_{k-1}$. Les relations $a^2 - Db^2 = \mu$ et $p_k q_{k-1} - p_{k-1}q_k = (-1)^{k-1}$ impliquent que $a \wedge b = p_{k-1} \wedge q_{k-1} = 1$, donc il existe $\lambda \in \mathbf{R}^*$ tel que $p_{k-1} = \lambda a$ et $q_{k-1} = \lambda b$. Alors $Q_k = (-1)^k(p_{k-1}^2 - Dq_{k-1}^2) = \lambda^2\mu = 1/\nu$ est constant.

Enfin, $\alpha_k = \nu(\varphi(P_k) + \sqrt{D}) = \nu(\varphi(P_k) + \alpha_0)$ donc $a_k = \nu(P_k + a_0)$, puis $\alpha_{k+1} = 1/(\nu(\alpha_0 - a_0)) = \alpha_1/\nu$. On montre alors par récurrence sur $p \in \mathbf{N}^*$ que $\alpha_{k+p} = \nu^{(-1)^p}\alpha_p$ et $a_{k+p} = \nu^{(-1)^p}a_p$, ce qui prouve que le développement en fraction continue de $\sqrt{D}$ est quasi-périodique à partir du rang 1.

4.4) *Calculer $\psi(\sqrt{D})$ à l'aide de l'algorithme de la question* **3.5**
Calculer les polynômes a_k, P_k et Q_k définis en **3.6** *ainsi que les polynômes p_{k-1} et q_{k-1} (question* **2.1***)*
... jusqu'à trouver un indice k tel que Q_k est constant. Cette étape peut ne pas terminer.
Poser $a = p_{k-1}$, $b = q_{k-1}$ et déterminer si le polynôme u défini en **4.1** *est proportionnel à h.*
Si oui, retourner a, b et le coefficient de proportionnalité approprié.
Si non, répondre qu'il n'y a pas de solution.

Exemple : programme en MuPAD et calcul sur l'exemple de l'énoncé

```
 // Calcul de psi(racine(D))
psi_rac := proc(d)
  local c,f;
  begin
  c := x^(degree(d)/2);
  repeat
    f := divide(c^2-d,2*c,Quo);
    c := c-f;
  until f=0 end;
  return(c)
 end;


 // Décomposition en fraction continue
dfc := proc(d)
  local psi,P,Q,p0,q0,p1,q1,a,temp;
  begin
    psi := psi_rac(d);
    P := 0; Q := 1;
    a := psi;
    p0 := 1; q0 := 0;
    p1 := a; q1 := 1;
    repeat
      P := expand(a*Q-P);
      Q := divide(d-P^2,Q,Exact);
      a := divide(P+psi,Q,Quo);
      temp := p1; p1 := expand(a*p1+p0); p0 := temp;
      temp := q1; q1 := expand(a*q1+q0); q0 := temp;
    until degree(Q) = 0 end;
    return([p0,q0]);
  end;


 // essai
d := x^4+4*x^3-6*x^2+4*x+1;
```

$$x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x + 1$$

```
[a,b] := dfc(d);
```

$$\left[\frac{x^6}{4} + 3x^5 + \frac{45x^4}{4} + 11x^3 - \frac{33x^2}{4} + \frac{43}{4}, \frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{2} + \frac{15x^2}{2} + \frac{11x}{2} - \frac{11}{4}\right]$$

```
f := ln(a+b*sqrt(d));
```

$$\ln\left(11x^3 - \frac{33x^2}{4} + \frac{45x^4}{4} + 3x^5 + \frac{x^6}{4} + \left(\frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{2} + \frac{15x^2}{2} + \frac{11x}{2} - \frac{11}{4}\right)\sqrt{x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x + 1} + \frac{43}{4}\right)$$

```
simplify(diff(f,x));
```

$$\frac{6x}{\sqrt{x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x + 1}}$$