deuxième épreuve de mathématiques **Durée : 6 heures**

Le problème est consacré à l'étude d'arcs paramétrés plans semblables à leur développée. La partie I met en place des conditions assurant cette propriété; les trois parties suivantes exploitent ces conditions, **elles sont indépendantes de la partie I. Les parties III et IV sont indépendantes de la partie II .**

On note $\mathbb{C}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes, de degré au plus n . $C^\infty(\mathbf{R},\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions infiniment dérivables de $\mathbf{R}$ dans $\mathbb{C}$. $\mathbf{N}_n$ l'ensemble des entiers naturels compris entre 1 et n. cotan la fonction cotangente .

On identifie tout complexe z avec son image (également notée z) dans le plan complexe considéré comme plan affine euclidien orienté rapporté à un repère orthonormal direct.

On considère alors une application $\varphi \longmapsto z(\varphi)$ de classe C^3 de $\mathbf{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui, en vertu de ce qui précède, s'identifie à un arc paramétré γ du plan complexe.

On suppose de plus vérifiées les conditions suivantes :

1. Sur tout intervalle fermé borné de $\mathbf{R}$, le nombre de points où $z'(\varphi)$ s'annule est fini.
2. Tout point régulier de γ (c'est-à-dire tout $z(\varphi)$ tel que $z'(\varphi) \neq 0$) est bi-régulier.
3. Pour tout φ de $\mathbf{R}$, $\tau(\varphi) = e^{i\varphi}$ définit le vecteur unitaire de la tangente orientée à γ au point $z(\varphi)$.
4. L'application $\varphi \longmapsto R(\varphi)$, où $R(\varphi)$ désigne le rayon de courbure de γ au point $z(\varphi)$, est définie et de classe C^1 sur $\mathbf{R}$.

On rappelle que $z'(\varphi) = R(\varphi)\,\tau(\varphi)$.

Partie I

A) On considère σ une similitude directe du plan. On cherche à déterminer σ et γ pour que $\sigma(\gamma)$ soit la développée de γ. Soit m le point de γ de paramètre φ . Soit m_1 son image par σ . On admettra que m_1 est le centre de courbure de γ au point de paramètre φ_1 et que l'application : $\varphi \longmapsto \varphi_1$ est dérivable.

1. Quelle relation y a-t-il entre φ et φ_1 ?
2. Montrer que le rayon de courbure $R(\varphi)$ doit vérifier une relation du type $R'(\varphi) = a\,R(\varphi + \beta)$ où a est une constante réelle non nulle et β est un réel.
3. Montrer que si le rayon de courbure $R(\varphi)$ vérifie une relation du type $R'(\varphi) = a\,R(\varphi + \beta)$ où a est une constante réelle non nulle et β est un réel, alors il existe une similitude directe σ du plan telle que $\sigma(\gamma)$ soit la développée de γ.
4. En posant $a\varphi = t$, $a\beta = \lambda$ et $f(t) = R(\varphi)$, vérifier que la condition cherchée est équivalente à :

$$\exists\ \lambda \in \mathbf{R}, \forall t \in \mathbf{R},\ f'(t) = f(t+\lambda)$$

B) On considère σ une similitude indirecte du plan. On cherche à déterminer σ et γ pour que $\sigma(\gamma)$ soit la développée de γ. Soit m le point de γ de paramètre φ . Soit m_1 son image par σ . On admettra que m_1 est le centre de courbure de γ au point de paramètre φ_1 et que l'application : $\varphi \longmapsto \varphi_1$ est dérivable.

1. Quelle relation y a-t-il entre φ et φ_1 ?
2. Montrer que le rayon de courbure $R(\varphi)$ doit vérifier une relation du type $R'(\varphi) = a\,R(-\varphi + \beta)$ où a est une constante réelle non nulle et β est un réel.
3. Montrer que si le rayon de courbure $R(\varphi)$ vérifie une relation du type $R'(\varphi) = a\,R(-\varphi + \beta)$ où a est une constante réelle non nulle et β est un réel, alors il existe une similitude indirecte σ du plan telle que $\sigma(\gamma)$ soit la développée de γ.
4. En posant $a\varphi = t$, $a\beta = \lambda$ et $f(t) = R(\varphi)$, vérifier que la condition cherchée est équivalente à : $\exists\, \lambda \in \mathbf{R}, \forall\, t \in \mathbf{R},\ f'(t) = f(-t + \lambda)$

Partie II

1. Soit f une application de classe C^1 définie de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, vérifiant :

$$\exists\, \lambda \in \mathbf{R}, \forall\, t \in \mathbf{R},\ f'(t) = f(-t + \lambda)$$

a) Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre.

b) En déduire que, dans les conditions de la question I-B, $R(\varphi) = A\cos(k\varphi - c)$ où A et k sont des constantes réelles non nulles et c une constante réelle.

c) Montrer qu'à une similitude près, les arcs répondant à la question I-B) sont définis lorsque $|k| \neq 1$ par la paramétrisation :

$$\begin{cases} x = (1-k)\cos[(1+k)t] + (1+k)\cos[(1-k)t] \\ y = (1-k)\sin[(1+k)t] + (1+k)\sin[(1-k)t] \end{cases},\ t \in \mathbf{R}$$

et lorsque $|k|$ est égal à 1 par la paramétrisation :

$$x = \cos t\ ,\ y = \sin t + t\ ,\ t \in \mathbf{R}$$

2. Soit f une application de classe C^1 définie de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, vérifiant :

$$\exists \lambda \in \mathbf{R},\ \forall t \in \mathbf{R}\ .\ f'(t) = f(t + \lambda) \qquad (1)$$

On suppose f T-périodique, $T > 0$

a) **Montrer que f et f' sont développables en série de Fourier .**

b) **On appelle pour tout $n \in \mathbf{Z}$, c_n le coefficient de Fourier exponentiel de la fonction f. Montrer que f est solution de (1) si et seulement si les coefficients de Fourier vérifient la relation :**

$$(2i\pi n - T\,e^{in\frac{2\pi}{T}\lambda})c_n = 0$$

c) Déterminer les fonctions f solutions de (1).

d) Déterminer dans ces conditions, c'est-à-dire lorsque R est périodique, les arcs paramétrés correspondants, répondant à la question I-A)

Partie III Soit f une application continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbb{C}$. Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ on note f_λ l'application:

$$t \in \mathbf{R} \longmapsto f(t+\lambda) \in \mathbb{C}$$

On appelle E_f le $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré par les applications f_λ , $\lambda \in \mathbf{R}$.
Soit G le $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré par les fonctions $t \longmapsto e^{\alpha t}P(t)$ où α est un nombre complexe et P une fonction polynomiale complexe.

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ avec deg $P = n \in N$. Soient $b_0, \ldots, b_n$ $n+1$ nombres réels distincts deux à deux. Pour $k \in \{0,\ldots,n\}$, on pose :

$$P_k(X)=P(X+b_k)$$

Soit $(u_i)_{i\in \mathbf{N}_n}$ une famille de nombres complexes. Soit V la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont le coefficient d'indice (i,j) est $(u_i)^{j-1}$.

On admet que le déterminant de la matrice V est : $\prod\limits_{1\leq i<j\leq n}(u_j-u_i)$.

a) Ecrire $P_k(X)$ dans la base $(\frac{1}{i!}P^{(i)}(X))_{i\in\{0,\ldots,n\}}$
b) En déduire que $(P_k)_{k\in\{0,\ldots,n\}}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

2. Soit $(f_i)_{i\in \mathbf{N}_n}$ une famille de fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbb{C}$, non toutes nulles. Soit F l'espace vectoriel engendré par $(f_i)_{i\in \mathbf{N}_n}$. On considère pour chaque $x \in \mathbf{R}$, l'application ϕ_x de F dans $\mathbb{C}$ définie par:

$$\phi_x(g) = g(x)$$

a) Montrer qu'il existe p réels $x_1, x_2, \ldots, x_p$ tels que la famille $(\phi_{x_i})_{i\in \mathbf{N}_p}$ soit une base de F^*, dual de F.
b) Montrer qu'il existe une famille $(g_i)_{i\in \mathbf{N}_p}$ de fonctions appartenant à F telles que la famille $(\phi_{x_i})_{i\in \mathbf{N}_p}$ soit la base duale de $(g_i)_{i\in \mathbf{N}_p}$.
c) Vérifier la relation :

$$f_i = \sum_{k=1}^{p} f_i(x_k)g_k$$

d) Montrer que la famille $(f_i)_{i\in \mathbf{N}_n}$ est une famille libre de F si et seulement si il existe une famille $(x_i)_{i\in \mathbf{N}_n}$ de réels tels que la matrice A de terme général $f_i(x_j)$ soit de déterminant non nul.

3. Soit $f \in G$. Montrer , en utilisant la question III-1, que E_f est de dimension finie.

4. On suppose que E_f est de dimension finie. Soit $(f_{\lambda_i})_{i\in \mathbf{N}_n}$ une base de E_f. On pose :

$$f_\lambda = \sum_{i=1}^{n} a_i(\lambda) f_{\lambda_i}$$ On définit ainsi n fonctions a_i de $\mathbf{R}$ dans $\mathbb{C}$.

a) En utilisant la question III-2-, montrer qu'il existe une famille $(t_i)_{i\in\mathbf{N}_n}$ de réels tels que le système :

$$f_\lambda(t_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\lambda) f_{\lambda_i}(t_j)\ ,\ j \in \mathbf{N}_n$$

possède une solution et une seule, $(a_1(\lambda), \dots, a_n(\lambda)) \in \mathbb{C}^n$

b) En déduire qu'il existe des nombres complexes $\mu_{i,j}$ tels que pour tout $i \in \mathbf{N}_n$, $a_i(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} \mu_{i,j} f_{t_j}(\lambda)$ et que les fonctions a_i sont continues sur $\mathbf{R}$.

5. On pose pour t réel $F_{\lambda_i}(t) = \int_0^t f_{\lambda_i}(u)du$. Les fonctions f_{λ_i} sont celles définies en 4. E_f est toujours supposé de dimension finie.

a) Vérifier que la famille $(F_{\lambda_i})_{i\in\mathbf{N}_n}$ est libre.

b) En remarquant que : $\int_0^t f(\lambda + u)du = \sum_{i=1}^{n} a_i(\lambda) F_{\lambda_i}(t)$, et en refaisant le même raisonnement que précédemment, vérifier qu'il existe une famille $(t'_i)_{i\in\mathbf{N}_n}$ de nombres réels et une famille $\left(\mu'_{i,j}\right)_{(i,j)\in\mathbf{N}_n^2}$ de nombres complexes telles que pour tout $i \in \mathbf{N}_n$ on ait :

$$a_i(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} \mu'_{i,j} \int_0^{t'_j} f(\lambda + u)du = \sum_{j=1}^{n} \mu'_{i,j} \int_\lambda^{\lambda+t'_j} f(u)du$$

c) Montrer que a_i est dérivable puis que, pour tout λ réel, l'application $t \in \mathbf{R} \longmapsto f(t + \lambda)$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ avec :

$$\forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad \forall\, t \in \mathbf{R} \quad f'(t + \lambda) = \sum_{i=1}^{n} a'_i(\lambda) f_{\lambda_i}(t)$$

En déduire $f'(t)$.

d) Montrer que $f' \in E_f$ puis que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbb{C})$.
Conclure en considérant la famille : $(f, f', \dots, f^{(n)})$ qu'il existe des nombres complexes $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ tels que : $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i f^{(i)} = 0$
En déduire alors que E_f est de dimension finie si et seulement si $f \in G$.

Partie IV On cherche à déterminer des éléments de G (c'est-à-dire des éléments du $\mathbb{C}$-espace vectoriel défini en **III** engendré par les fonctions $t \longmapsto e^{\alpha t}P(t)$ où α est un nombre complexe et P une fonction polynomiale complexe) vérifiant :

$$\exists\, \lambda \in \mathbf{R} \text{ tel que } \forall t \in \mathbf{R} : f'(t) = f(t + \lambda) \qquad (2)$$

A) 1. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$ donné. Etudier l'existence et le nombre de solutions x réelles de l'équation :

$$e^{\lambda x} = x$$

2. a) Etudier les variations de la fonction g définie par :

$$g(u) = \frac{\sin u}{u} \exp(u \operatorname{cotan} u)$$

b) Etudier l'existence et le nombre de solutions x complexes de l'équation :

$$e^{\lambda x} = x$$

B) Soit $(\alpha_i)_{i \in \mathbf{N}_n}$ une famille de nombres complexes deux à deux distincts. Soit $(P_i)_{i \in \mathbf{N}_n}$ une famille de polynômes complexes non nuls.

1. Pour tout $i \in \mathbf{N}_n$, on appelle f_i la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $f_i(t) = P_i(t)\, e^{\alpha_i t}$. Montrer que la famille $(f_i)_{i \in \mathbf{N}_n}$ est une famille libre.

2. Soit $f \in G$, $f(t) = \sum_{i=1}^{n} P_i(t) e^{\alpha_i t}$

   a) Calculer $f(t+\lambda)$ et $f'(t)$ en fonction des dérivées des fonctions P_i

   b) Soit d_i le degré du polynôme P_i. Montrer que f est solution de (2) si et seulement si :

$$\forall i \in \mathbf{N}_n,\, e^{\alpha_i \lambda} \sum_{j=0}^{d_i} \frac{\lambda^j P_i^{(j)}(t)}{j!} = P_i'(t) + \alpha_i P_i(t)$$

   c) En déduire que f est solution de (2) si et seulement si :

$$\forall i \in \mathbf{N}_n \qquad \begin{cases} \alpha_i = e^{\alpha_i \lambda} \\ (\lambda\, e^{\alpha_i \lambda} - 1) P_i'(t) = 0 \\ \deg P_i \leq 1 \end{cases}$$

3. Montrer que les solutions de (2) appartenant à G sont du type :

$$f(t) = (at+b)\, e^{\alpha t} + \sum_{i=1}^{n} a_i e^{\alpha_i t}$$

   On distinguera divers cas selon les valeurs de λ, les coefficients α et α_i devant être précisés.

4. Quelles sont les solutions réelles de (2) appartenant à G ?.

C) Déterminer les arcs obtenus dans les divers cas suivants :

$f(t) = a\, e^{\alpha t} \cos \alpha t \quad a,\ \alpha$ réels $\neq 0$

$f(t) = (at+b) e^{\alpha t} \quad a,\ b,\ \alpha$ réels; $f \neq 0$