

Avertissement

Cette épreuve comporte malheureusement de nombreuses fautes de texte, ou maladresses d'écriture, en particulier dans les parties III et IV. Je les signalerai, le moment venu.

Partie I:

1) Notations:

Soit $m = (x_1, x_2, x_3)$ un élément de E , on appelle coordonnées sphériques de m le triplet $(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$, tel que: $x_1 = r \sin \theta \cos \varphi$, $x_2 = r \sin \theta \sin \varphi$, $x_3 = r \cos \theta$.

Soient alors les vecteurs: $\vec{e}_r = \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_2 + \cos \theta \vec{e}_3$.

$$\vec{e}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \vec{e}_1 + \cos \theta \sin \varphi \vec{e}_2 - \sin \theta \vec{e}_3.$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{e}_1 + \cos \varphi \vec{e}_2.$$

a) Pour montrer que $B = (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$, je montre que la matrice P

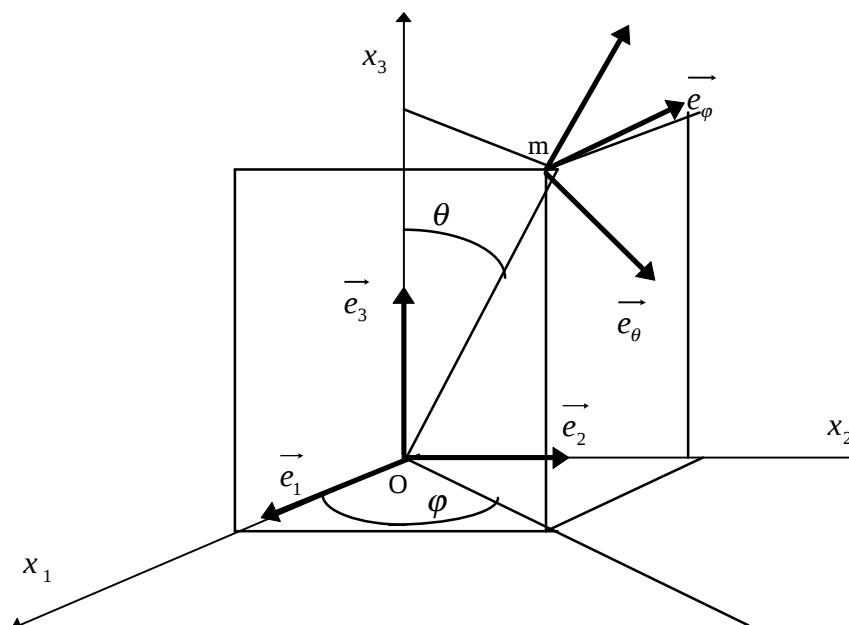
suivante appartient à $SO_3(\mathbb{R})$:

$$P = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie bien que la norme de chaque vecteur colonne vaut 1, que les produits scalaires 2 à 2 sont bien nuls et que $\det(P) = 1$. On aurait pu remplacer ces vérifications par:

$$\langle \vec{e}_r, \vec{e}_\theta \rangle = 0, \quad \|\vec{e}_r\| = \|\vec{e}_\theta\| = 1, \text{ et } \vec{e}_\varphi = \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta.$$

b)



2) Soit f l'application de E dans lui-même définie par $\overrightarrow{Of(m)} = \frac{\rho(r)}{r} \overrightarrow{Om}$ avec $\rho \in \mathbf{F}^+$.

Soit une application de R dans $R_+^* \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$, de classe C^1 qui à t associe $(r(t), \theta(t), \varphi(t))$, $m(t)$ le point de coordonnées sphériques $(r(t), \theta(t), \varphi(t))$, et $M(t) = f(m(t))$.

a) • Expression dans la base B de $\overrightarrow{v(t)} = \frac{d\overrightarrow{Om(t)}}{dt}$.

On a $\overrightarrow{Om(t)} = r(t) \overrightarrow{e_r(t)}$. D'où $\frac{d\overrightarrow{Om(t)}}{dt} = r'(t) \overrightarrow{e_r(t)} + r(t) \frac{d\overrightarrow{e_r(t)}}{dt}$. Or on a:

$$\frac{d\overrightarrow{e_r(t)}}{dt} = \frac{\partial \overrightarrow{e_r}}{\partial \theta} \theta'(t) + \frac{\partial \overrightarrow{e_r}}{\partial \varphi} \varphi'(t) = \theta'(t)(\cos \theta \cos \varphi \overrightarrow{e_1} + \cos \theta \sin \varphi \overrightarrow{e_2} - \sin \theta \overrightarrow{e_3})$$

$$+ \varphi'(t)(-\sin \theta \sin \varphi \overrightarrow{e_1} + \sin \theta \cos \varphi \overrightarrow{e_2}).$$

$$\frac{d\overrightarrow{e_r(t)}}{dt} = \theta'(t) \overrightarrow{e_\theta} + \varphi'(t) \sin \theta(t) \overrightarrow{e_\varphi} \quad \text{soit: } \overrightarrow{v(t)} = \frac{d\overrightarrow{Om(t)}}{dt} = r'(t) \overrightarrow{e_r} + r(t) \theta'(t) \overrightarrow{e_\theta} + r(t) \varphi'(t) \sin \theta(t) \overrightarrow{e_\varphi}$$

On a donc: $(v_1, v_2, v_3) = (r'(t), r(t)\theta'(t), r(t)\varphi'(t) \sin \theta(t))$.

• Expression dans la base B de $\overrightarrow{V(t)} = \frac{d\overrightarrow{OM(t)}}{dt}$.

On a $\overrightarrow{OM(t)} = \frac{\rho(r(t))}{r(t)} r(t) \overrightarrow{e_r(t)} = \rho(r(t)) \overrightarrow{e_r}$. soit

$$\overrightarrow{V(t)} = \frac{d\overrightarrow{OM(t)}}{dt} = \rho'(r(t)) r'(t) \overrightarrow{e_r} + \rho(r(t)) \theta'(t) \overrightarrow{e_\theta} + \rho(r(t)) \varphi'(t) \sin \theta(t) \overrightarrow{e_\varphi}.$$

On a donc: $(V_1, V_2, V_3) = (\rho'(r(t))r'(t), \rho(r(t))\theta'(t), \rho(r(t))\varphi'(t) \sin \theta(t))$.

b) On constate que:
$$\begin{cases} V_1 = \rho'(r(t))v_1 \\ V_2 = \frac{\rho(r(t))}{r(t)}v_2 \\ V_3 = \frac{\rho(r(t))}{r(t)}v_3 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho'(r(t)) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho(r(t))}{r(t)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho(r(t))}{r(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \text{et on a:}$$

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad J = \text{Diag}\left(\rho'(r(t)), \frac{\rho(r(t))}{r(t)}, \frac{\rho(r(t))}{r(t)}\right) \quad \text{qui me paraît quand même dépendre}$$

un peu de l'application $t \mapsto (r(t), \theta(t), \varphi(t))$, puisqu'elle fait intervenir $r(t)$!..Disons que J aurait dû

être notée $J(t)$ et que $J(t) = D(r(t))$ avec $D(u) = \text{Diag}\left(\rho'(u), \frac{\rho(u)}{u}, \frac{\rho(u)}{u}\right)$ et c'est cette matrice

$D(u)$ qui est indépendante de l'application $t \mapsto (r(t), \theta(t), \varphi(t))$.

3) $\det(J) = 1$ se traduit par: $\frac{\rho' \rho^2}{r^2} = 1$ soit: $\frac{1}{3} \frac{d}{dr}(\rho^3) = r^2$. On en déduit $\rho^3(r) = r^3 + K$.

Or pour que $\rho \in \mathbb{F}^+$, il faut que $\forall r \in R_+^*$, $r^3 + K \in R_+^*$ ce qui nécessite $K \geq 0$. On posera donc $K = a^3$, avec $a \geq 0$. Conclusion: $\det(J) = 1 \Leftrightarrow \rho^3(r) = r^3 + a^3$, avec $a \geq 0$.

4) Soit $\rho_a(r) = \sqrt[3]{r^3 + a^3}$ et f_a l'application associée.

- Montrons que f_a est injective.

Soit pour cela m et m' appartenant à E , tels que $f_a(m) = f_a(m')$. On a donc:

$$\frac{\sqrt[3]{r^3 + a^3}}{r} \overrightarrow{Om} = \frac{\sqrt[3]{r'^3 + a^3}}{r'} \overrightarrow{Om'} \text{ ce qui implique que } \overrightarrow{Om'} = \lambda \overrightarrow{Om} \text{ avec } \lambda > 0. \text{ Mais alors}$$

$$r' = \lambda r \text{ et la relation précédente s'écrit: } \frac{\sqrt[3]{r^3 + a^3}}{r} \overrightarrow{Om} = \frac{\sqrt[3]{\lambda^3 r^3 + a^3}}{\lambda r} \lambda \overrightarrow{Om} \text{ d'où}$$

$$\sqrt[3]{r^3 + a^3} = \sqrt[3]{\lambda^3 r^3 + a^3}, \text{ soit } \lambda = 1 \text{ et donc } \overrightarrow{Om} = \overrightarrow{Om'}, \text{ c'est à dire } m = m'. \text{ cqfd.}$$

- Surjectivité de f_a .

Soit $M \in E$, $\overrightarrow{OM} = R \overrightarrow{e_r}$ (M de coordonnées sphériques (R, θ, φ)).

On cherche si il existe un $m \in E$ tel que: $\overrightarrow{Om} = r \overrightarrow{e_r}$ et $f_a(m) = M$. Pour cela, il faut:

$$R \overrightarrow{e_r} = \frac{\sqrt[3]{r^3 + a^3}}{r} r \overrightarrow{e_r}, \text{ soit } \sqrt[3]{r^3 + a^3} = R, \text{ c'est à dire } r^3 = R^3 - a^3.$$

Pour qu'un tel r soit strictement positif, il est donc nécessaire et suffisant que $R > a$, d'où la discussion:

- $a = 0$ $r = R$ convient et f_0 est donc surjective. (Rq: f_0 est l'application identité)
- $a > 0$ Seuls les points $M; R > a$ appartiennent à l'image de f_a . f_a n'est pas surjective, le sous ensemble de E qui n'est pas dans l'image de f_a est la boule fermée de centre O et de rayon a , privée de O.

- Prolongement éventuel par continuité de f_a au point O.

Considérons les points m de coordonnées sphériques (r, θ, φ) où θ et φ sont fixés.

$$\lim_{r \rightarrow 0} \overrightarrow{Of_a(m)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{r^3 + a^3}}{r} r \overrightarrow{e_r} = a \overrightarrow{e_r}. \text{ Mais le vecteur } \overrightarrow{e_r} \text{ dépend de } \theta \text{ et } \varphi \text{ et peut donc}$$

prendre

toutes les directions quand on fait varier θ et φ .

Conclusion: f_a ne se prolonge pas par continuité au point O.

Partie II:

Notations: l'application f de E dans lui même: $m(x_1, x_2, x_3) \mapsto M(X_1, X_2, X_3)$ est définie par:

$$\forall i \in \{1, 2, 3\}, X_i = \psi_i(r) x_i \text{ où } r = \left\| \overrightarrow{Om} \right\| \text{ et où les fonctions } \psi_i \text{ appartiennent à } \mathbb{F}^+.$$

1)

- a) Matrice jacobienne de f .

Par définition $J_0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(\overrightarrow{Om}) & \frac{\partial}{\partial x_2}(\overrightarrow{Om}) & \frac{\partial}{\partial x_3}(\overrightarrow{Om}) \end{pmatrix}$ d'où on a:

$$J_0 = \begin{pmatrix} \psi_1'(r) \frac{x_1^2}{r} + \psi_1(r) & \psi_1'(r) \frac{x_2 x_1}{r} & \psi_1'(r) \frac{x_3 x_1}{r} \\ \psi_2'(r) \frac{x_1 x_2}{r} & \psi_2'(r) \frac{x_2^2}{r} + \psi_2(r) & \psi_2'(r) \frac{x_3 x_2}{r} \\ \psi_3'(r) \frac{x_1 x_3}{r} & \psi_3'(r) \frac{x_2 x_3}{r} & \psi_3'(r) \frac{x_3^2}{r} + \psi_3(r) \end{pmatrix}$$

b) On rappelle que le caractère n linéaire alterné d'un déterminant fait que l'on ne modifie pas la valeur d'un déterminant en ajoutant à l'un des vecteurs une combinaison linéaire des autres. Ainsi

$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{V_1}, \alpha \overrightarrow{V_2} - \beta \overrightarrow{V_1}, \alpha \overrightarrow{V_3} - \gamma \overrightarrow{V_1}) &= \det(\overrightarrow{V_1}, \alpha \overrightarrow{V_2} - \beta \overrightarrow{V_1} + \beta \overrightarrow{V_1}, \alpha \overrightarrow{V_3} - \gamma \overrightarrow{V_1}) = \det(\overrightarrow{V_1}, \alpha \overrightarrow{V_2}, \alpha \overrightarrow{V_3} - \gamma \overrightarrow{V_1}) \\ &= \det(\overrightarrow{V_1}, \alpha \overrightarrow{V_2}, \alpha \overrightarrow{V_3} - \gamma \overrightarrow{V_1} + \gamma \overrightarrow{V_1}) = \det(\overrightarrow{V_1}, \alpha \overrightarrow{V_2}, \alpha \overrightarrow{V_3}) = \alpha^2 \det(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3}) \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion: } \det(\overrightarrow{V_1}, \alpha \overrightarrow{V_2} - \beta \overrightarrow{V_1}, \alpha \overrightarrow{V_3} - \gamma \overrightarrow{V_1}) = \alpha^2 \det(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3})$$

Soit alors $x_1 \neq 0$, dans $\det(J_0)$, remplaçons la 2^{ème} colonne par: $x_1 \times (C_2) - x_2 \times (C_1)$ et la 3^{ème} colonne par: $x_1 \times (C_3) - x_3 \times (C_1)$, on obtient:

$$\begin{aligned} x_1^2 \det(J_0) &= \begin{vmatrix} \psi_1'(r) \frac{x_1^2}{r} + \psi_1(r) & -x_2 \psi_1(r) & -x_3 \psi_1(r) \\ \psi_2'(r) \frac{x_1 x_2}{r} & x_1 \psi_2(r) & 0 \\ \psi_3'(r) \frac{x_1 x_3}{r} & 0 & x_1 \psi_3(r) \end{vmatrix} & \text{c'est à dire:} \\ \det(J_0) &= \frac{1}{x_1^2} \begin{vmatrix} \psi_1'(r) \frac{x_1^2}{r} + \psi_1(r) & -x_2 \psi_1(r) & -x_3 \psi_1(r) \\ \psi_2'(r) \frac{x_1 x_2}{r} & x_1 \psi_2(r) & 0 \\ \psi_3'(r) \frac{x_1 x_3}{r} & 0 & x_1 \psi_3(r) \end{vmatrix} & \text{cqfd.} \end{aligned}$$

c) Pour un point m tel que $x_1 \neq 0$, on a donc:

$$\det(J_0) = \frac{1}{x_1^2} \left(\psi_3'(r) \frac{x_1 x_3}{r} x_1 x_3 \psi_2(r) \psi_1(r) + x_1 \psi_3(r) \left(\frac{x_1^3}{r} \psi_2(r) \psi_1'(r) + x_1 \psi_2(r) \psi_1(r) + \frac{x_1 x_2^2}{r} \psi_2'(r) \psi_1(r) \right) \right)$$

soit:

$$\det(J_0) = \psi_1(r) \psi_2(r) \psi_3(r) + \frac{1}{r} (x_1^2 \psi_1'(r) \psi_2(r) \psi_3(r) + x_2^2 \psi_1(r) \psi_2'(r) \psi_3(r) + x_3^2 \psi_1(r) \psi_2(r) \psi_3'(r))$$

Pour un point m tel que $x_1 = 0$, on revient à l'expression initiale:

$$\det(J_0) = \begin{vmatrix} \psi_1(r) & 0 & 0 \\ 0 & \psi_2'(r)\frac{x_2^2}{r} + \psi_2(r) & \psi_2'(r)\frac{x_3x_2}{r} \\ 0 & \psi_3'(r)\frac{x_2x_3}{r} & \psi_3'(r)\frac{x_3^2}{r} + \psi_3(r) \end{vmatrix} \quad \text{et on retrouve:}$$

$\det(J_0) = \psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3(r) + \frac{1}{r}(x_2^2\psi_1(r)\psi_2'(r)\psi_3(r) + x_3^2\psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3'(r))$ cette formule correspondant à la précédente en faisant directement $x_1 = 0$ dedans.

2) Condition d'incompressibilité: $\det(J_0) = 1$.

Conditions nécessaires:

Ecrivons que $\det(J_0) = 1$ dans les cas suivants: $x_1 = 0$ condition (α) .

$x_2 = 0$ condition (β) .

$x_3 = 0$ condition (γ) .

$$(\alpha): \psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3(r) + \frac{1}{r}(x_2^2\psi_1(r)\psi_2'(r)\psi_3(r) + x_3^2\psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3'(r)) = 1$$

$$(\beta): \psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3(r) + \frac{1}{r}(x_1^2\psi_1'(r)\psi_2(r)\psi_3(r) + x_3^2\psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3'(r)) = 1$$

$$(\gamma): \psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3(r) + \frac{1}{r}(x_1^2\psi_1'(r)\psi_2(r)\psi_3(r) + x_2^2\psi_1(r)\psi_2'(r)\psi_3(r)) = 1$$

Mais alors, -- en faisant $(\gamma) - (\alpha)$ on obtient:

$$\frac{1}{r}(x_1^2\psi_1'(r)\psi_2(r)\psi_3(r) - x_3^2\psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3'(r)) = 0 \text{ soit enfin en simplifiant par } \frac{\psi_2(r)}{r} \neq 0 \text{ et en}$$

faisant $x_1 = x_3 = 1$, $\psi_1'(r)\psi_3(r) - \psi_1(r)\psi_3'(r) = 0$ c'est la condition (C_1) .

-- en faisant $(\gamma) - (\alpha)$ on obtient:

$$\frac{1}{r}(x_2^2\psi_1(r)\psi_2'(r)\psi_3(r) - x_3^2\psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3'(r)) = 0 \text{ soit enfin en simplifiant par } \frac{\psi_1(r)}{r} \neq 0 \text{ et en}$$

faisant $x_2 = x_3 = 1$, $\psi_2'(r)\psi_3(r) - \psi_2(r)\psi_3'(r) = 0$ c'est la condition (C_2) .

-- en écrivant enfin que $\det(J_0) = 1$ pour $x_1 = x_2 = 0$ et $x_3 > 0$ on obtient:

$$\psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3(r) + \frac{1}{r}x_3^2\psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3'(r) = 1 \text{ soit, puisque } \frac{x_3^2}{r} = r \text{ dans ce cas,}$$

$$\psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3(r) + r\psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3'(r) = 1 \text{ c'est la condition } (C_3).$$

Conclusion: (C_1) , (C_2) , (C_3) sont donc des conditions nécessaires pour que $\forall m \in E$, $\det(J_0) = 1$.

Montrons que ces conditions sont suffisantes.

Supposons (C_1) , (C_2) , (C_3) vérifiées, alors:

$$\begin{aligned} \det(J_0) &= \psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3(r) + \frac{1}{r}(x_1^2\psi_1'(r)\psi_2(r)\psi_3(r) + x_2^2\psi_1(r)\psi_2'(r)\psi_3(r) + x_3^2\psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3'(r)) \\ &= \psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3(r) + \frac{1}{r}(x_1^2\psi_1'(r)\psi_2(r)\psi_3(r) + x_2^2\psi_1(r)\psi_2'(r)\psi_3(r) + x_3^2\psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3'(r)) \\ &\quad \uparrow cf(C_1) \quad \quad \quad \uparrow cf(C_2) \end{aligned}$$

$$\det(J_0) = \psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3(r) + \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{r} \psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3'(r) \text{ soit:}$$

$$\det(J_0) = \psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3(r) + r\psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3'(r) = 1$$

$\uparrow cf(C_3)$

3) On suppose (C_1) , (C_2) , (C_3) vérifiées.

a) Existence de λ et μ strictement positifs tels que: $\psi_1 = \lambda\psi_3$ et $\psi_2 = \mu\psi_3$.

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{\psi_1}{\psi_3} \right) (r) = \frac{\psi_1'(r)\psi_3(r) - \psi_1(r)\psi_3'(r)}{\psi_3^2(r)} = 0 \text{ d'après } (C_1). \text{ Donc sur l'intervalle }]0, +\infty[, \text{ la}$$

fonction $\frac{\psi_1}{\psi_3}$ est dérivable, de dérivée nulle, elle est donc constante sur cet intervalle.

$$\exists \lambda > 0 \text{ tel que } \psi_1 = \lambda\psi_3.$$

Un raisonnement analogue avec $\frac{\psi_2}{\psi_3}$ et la condition (C_2) , assure: $\exists \mu > 0$ tel que $\psi_2 = \mu\psi_3$.

b) Soit $Z(r) = \psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3(r)$, alors $Z \in \mathbf{F}^+$ comme produit d'éléments de $\mathbf{F}^+$. On a alors:

$$Z(r) = \lambda\mu\psi_3^3(r) \text{ et la condition } (C_3) \text{ s'écrit: } \lambda\mu\psi_3^3(r) + r\lambda\mu\psi_3^2(r)\psi_3'(r) = 1.$$

Dès lors, calculons $rZ'(r) + 3Z(r)$. On a: $Z'(r) = 3\lambda\mu\psi_3^2(r)\psi_3'(r)$ et par suite:

$$rZ'(r) + 3Z(r) = 3(\lambda\mu\psi_3^3(r) + r\lambda\mu\psi_3^2(r)\psi_3'(r)) = 3.$$

$$\text{Conclusion: } rZ'(r) + 3Z(r) = 3.$$

Une solution particulière de l'équation complète est la fonction constante égale à 1.

La solution générale de l'équation homogène est $\frac{K}{r^3}$, K constante réelle.

$$\text{Conclusion: } Z(r) = 1 + \frac{K}{r^3} \text{ avec } K \geq 0 \text{ pour que } Z \in \mathbf{F}^+.$$

4) D'après **3)** ψ_1, ψ_2, ψ_3 sont des éléments de $\mathbf{F}^+$ vérifiant (C_1) , (C_2) , (C_3) si et seulement si:

$$\exists \lambda, \mu \text{ strictement positifs tels que: } \begin{cases} \psi_1 = \lambda\psi_3 \\ \psi_2 = \mu\psi_3 \end{cases} \text{ et } K \geq 0 \text{ tel que } \lambda\mu\psi_3^3(r) = 1 + \frac{K}{r^3}.$$

D'où des onditions nécessaires:

On a donc $\psi_3^3(r) = \frac{r^3 + K}{\lambda\mu r^3}$ ce qui permet d'écrire en posant $K = a^3$ avec $a \geq 0$:

$$\text{-- } \psi_3(r) = \alpha_3 \frac{\sqrt[3]{r^3 + a^3}}{r} \text{ avec } \alpha_3 = \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda\mu}} > 0.$$

$$\text{-- } \psi_2(r) = \alpha_2 \frac{\sqrt[3]{r^3 + a^3}}{r} \text{ avec } \alpha_2 = \mu \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda\mu}} > 0.$$

-- $\psi_1(r) = \alpha_1 \frac{\sqrt[3]{r^3 + a^3}}{r}$ avec $\alpha_1 = \lambda \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda\mu}} > 0$. Et on a bien $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 1$.

Réciproquement montrons que ces conditions sont suffisantes:

Supposons $\psi_1(r) = \alpha_1 \frac{\sqrt[3]{r^3 + a^3}}{r}$, $\psi_2(r) = \alpha_2 \frac{\sqrt[3]{r^3 + a^3}}{r}$, $\psi_3(r) = \alpha_3 \frac{\sqrt[3]{r^3 + a^3}}{r}$,

avec les conditions: $\begin{cases} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0 & \text{et} & \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 1 \\ a \geq 0 \end{cases}$ alors, ψ_1, ψ_2, ψ_3 sont des éléments de $\mathbf{F}^+$,

$\frac{\psi_1}{\psi_3} = \frac{\alpha_1}{\alpha_3} = cte$ donc (C_1) est vérifiée, $\frac{\psi_2}{\psi_3} = \frac{\alpha_2}{\alpha_3} = cte$ donc (C_2) est vérifiée, et enfin

$$\psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3(r) + r\psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3'(r) = \frac{r^3 + a^3}{r^3} + r \frac{(r^3 + a^3)^{2/3}}{r^2} \frac{r^3(r^3 + a^3)^{-2/3} - (r^3 + a^3)^{1/3}}{r^2}$$

$$\psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3(r) + r\psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3'(r) = \frac{1}{r^3}(r^3 + a^3 + r^3 - r^3 - a^3) = 1 \text{ donc } (C_3) \text{ est vérifiée.}$$

Retour sur la fonction f_a de la partie I.

On a $\overrightarrow{OM} = \frac{\sqrt[3]{r^3 + a^3}}{r} \overrightarrow{Om}$ d'où $X_1 = \frac{\sqrt[3]{r^3 + a^3}}{r} x_1$, $X_2 = \frac{\sqrt[3]{r^3 + a^3}}{r} x_2$, $X_3 = \frac{\sqrt[3]{r^3 + a^3}}{r} x_3$

et on est donc dans le cas $\psi_1(r) = \psi_2(r) = \psi_3(r) = \frac{\sqrt[3]{r^3 + a^3}}{r}$, et $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$.

Partie III:

Notation: On pose $\psi(r) = \frac{\sqrt[3]{r^3 + a^3}}{r}$ où $a > 0$.

Soit $c > 0$, on définit $\psi_1 = \frac{1}{c^2} \psi$, et $\psi_2 = \psi_3 = c\psi$.

1) Soit Σ l'image par f de la sphère unité $\{m; \|\overrightarrow{Om}\| = 1\}$.

a) Equation cartésienne de Σ .

m de coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3) a sa coordonnée sphérique r égale à 1 et par conséquent

a

pour image le point M de coordonnées cartésiennes (X_1, X_2, X_3) telles que:

$$X_1 = \frac{1}{c^2} \sqrt[3]{1+a^3} x_1, \quad X_2 = c \sqrt[3]{1+a^3} x_2, \quad X_3 = c \sqrt[3]{1+a^3} x_3, \quad \text{et par suite:}$$

$$\frac{X_1^2}{(\frac{1}{c^2} \sqrt[3]{1+a^3})^2} + \frac{X_2^2}{(c \sqrt[3]{1+a^3})^2} + \frac{X_3^2}{(c \sqrt[3]{1+a^3})^2} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \quad \text{c'est à dire:}$$

$$\frac{X_1^2}{\left(\frac{1}{c^2}\sqrt[3]{1+a^3}\right)^2} + \frac{X_2^2 + X_3^2}{\left(c\sqrt[3]{1+a^3}\right)^2} = 1 \quad \text{On reconnaît l'ellipsoïde de révolution autour de l'axe } (O, \vec{e}_1)$$

$$\text{de demi-axes } \frac{1}{c^2}\sqrt[3]{1+a^3} \text{ et } c\sqrt[3]{1+a^3} . \quad \begin{cases} c < 1 & \text{ellipsoïde allongé} \\ c > 1 & \text{ellipsoïde aplati} \\ c = 1 & \text{sphère} \end{cases}$$

b) Attention ici, θ et φ n'ont plus la même signification qu'au I, ce qui est assez désagréable!

On peut écrire l'équation cartésienne de Σ sous la forme:

$$\frac{X_1^2}{\left(\frac{b}{c^2}\right)^2} + \frac{\rho^2}{(cb)^2} = 1 \quad \text{avec } b = \psi(1) \text{ et } \rho^2 = X_2^2 + X_3^2 . \text{ On peut donc paramétrer la demi}$$

$$\text{méridienne par } \begin{cases} X_1 = \frac{b}{c^2} \cos \varphi \\ \rho = cb \sin \varphi \end{cases} \quad \varphi \in [0, \pi] \quad \text{puis } \begin{cases} X_2 = \rho \cos \theta = cb \sin \varphi \cos \theta \\ X_3 = \rho \sin \theta = cb \sin \varphi \sin \theta \end{cases}$$

$$\theta \in [0, 2\pi]$$

et finalement:

$$X_1 = \frac{b}{c^2} \cos \varphi, \quad X_2 = cb \sin \varphi \cos \theta, \quad X_3 = cb \sin \varphi \sin \theta, \quad \varphi \in [0, \pi], \quad \theta \in [0, 2\pi] \text{ est bien une paramétrisation de } \Sigma .$$

c) Avec les notations précédentes, le point m a pour coordonnées cartésiennes $(\cos \varphi, \sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta)$.

Un vecteur normal en M à Σ est dirigé par exemple par $\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \varphi} \wedge \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta}$. On a:

$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \varphi} \wedge \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -\frac{b}{c^2} \sin \varphi \\ bc \cos \varphi \cos \theta \\ bc \cos \varphi \sin \theta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -bc \sin \varphi \sin \theta \\ bc \sin \varphi \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2 c^2 \sin \varphi \cos \varphi \\ \frac{b^2}{c} \sin^2 \varphi \cos \theta \\ \frac{b^2}{c} \sin^2 \varphi \sin \theta \end{pmatrix} \quad \text{vecteur qui est}$$

$$\text{parallèle à } \begin{pmatrix} c^2 \cos \varphi \\ \frac{1}{c} \sin \varphi \cos \theta \\ \frac{1}{c} \sin \varphi \sin \theta \end{pmatrix} \text{ et qui a pour norme } b^2 \sin \varphi \sqrt{c^4 \cos^2 \varphi + \frac{1}{c^2} \sin^2 \varphi} . \text{ Le produit}$$

scalaire de ce dernier vecteur avec $\vec{Om}$ est $c^2 \cos^2 \varphi + \frac{1}{c} \sin^2 \varphi > 0$. On prendra donc:

$$\vec{n}(M) = \frac{1}{\sqrt{c^4 \cos^2 \varphi + \frac{1}{c^2} \sin^2 \varphi}} \begin{pmatrix} c^2 \cos \varphi \\ \frac{1}{c} \sin \varphi \cos \theta \\ \frac{1}{c} \sin \varphi \sin \theta \end{pmatrix}_{B_0} .$$

Rq: ce vecteur convient encore aux 'sommets de l'ellipsoïde', lorsque $\varphi = 0(\pi)$ car alors, le vecteur normal à Σ est bien parallèle au vecteur $\vec{e}_1$.

2) Soient t_1 et t_2 deux réels. On définit en tout point de Σ le vecteur (Interprétation de celui-ci???)

$$\overrightarrow{g(M)} = \frac{t_2 - 2t_1}{3} (\overrightarrow{n(M)} \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_1 + \frac{t_1 + t_2}{3} (\overrightarrow{n(M)} \cdot \vec{e}_2) \vec{e}_2 + \overrightarrow{n(M)} \cdot \vec{e}_3 \vec{e}_3 \text{ ainsi que:}$$

$$\overrightarrow{V_1(M)} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial c}, \text{ et } \overrightarrow{V_2(M)} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial a} \quad \text{NB: Erreur d'énoncé, remplacer } m \text{ par } M \text{ sinon c'est ridicule!}$$

a) On a: $\overrightarrow{V_1(M)} = -\frac{2b}{c^3} \cos \varphi \vec{e}_1 + b \sin \varphi (\cos \theta \vec{e}_2 + \sin \theta \vec{e}_3).$

$$\overrightarrow{V_2(M)} = \frac{a^2}{b^2} \left(\frac{\cos \varphi}{c^2} \vec{e}_1 + c \sin \varphi (\cos \theta \vec{e}_2 + \sin \theta \vec{e}_3) \right).$$

b) • $\overrightarrow{g(M)} \cdot \overrightarrow{V_1(M)} = \frac{1}{\sqrt{c^4 \cos^2 \varphi + \frac{1}{c^2} \sin^2 \varphi}} \times A_1$ avec

$$A_1 = \frac{t_2 - 2t_1}{3} c^2 \cos \varphi \left(-\frac{2b}{c^3} \cos \varphi \right) + \frac{t_1 + t_2}{3} \frac{b}{c} (\sin^2 \varphi \cos^2 \theta + \sin^2 \varphi \sin^2 \theta) \text{ soit encore}$$

$$A_1 = \frac{b}{3c} (t_1 (4 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + t_2 (\sin^2 \varphi - 2 \cos^2 \varphi)) = \frac{b}{3c} (t_1 (3 \cos^2 \varphi + 1) + t_2 (1 - 3 \cos^2 \varphi))$$

On a donc: $\iint_{\Sigma} \overrightarrow{g(M)} \cdot \overrightarrow{V_1(M)} d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{b}{3c} (t_1 (3 \cos^2 \varphi + 1) + t_2 (1 - 3 \cos^2 \varphi)) b^2 \sin \varphi d\varphi d\theta$ soit

$$\iint_{\Sigma} \overrightarrow{g(M)} \cdot \overrightarrow{V_1(M)} d\sigma = \frac{2\pi b^3}{3c} (t_1 (-\cos^3 \varphi - \cos \varphi) + t_2 (-\cos \varphi + \cos^3 \varphi))_0^{\pi} = \frac{2\pi b^3}{3c} 4t_1 = \frac{8\pi b^3}{3c} t_1.$$

• $\overrightarrow{g(M)} \cdot \overrightarrow{V_2(M)} = \frac{1}{\sqrt{c^4 \cos^2 \varphi + \frac{1}{c^2} \sin^2 \varphi}} \times A_2$ avec

$$A_2 = \frac{t_2 - 2t_1}{3} c^2 \cos \varphi \left(\frac{a^2}{b^2} \frac{\cos \varphi}{c^2} \right) + \frac{t_1 + t_2}{3} \frac{1}{c} \frac{ca^2}{b^2} (\sin^2 \varphi \cos^2 \theta + \sin^2 \varphi \sin^2 \theta) \text{ soit encore}$$

$$A_2 = \frac{a^2}{3b^2} (t_1 (\sin^2 \varphi - 2 \cos^2 \varphi) + t_2) = \frac{a^2}{3b^2} (t_1 (1 - 3 \cos^2 \varphi) + t_2) \text{ et on a donc}$$

$$\iint_{\Sigma} \overrightarrow{g(M)} \cdot \overrightarrow{V_2(M)} d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{a^2}{3b^2} (t_1 (1 - 3 \cos^2 \varphi) + t_2) b^2 \sin \varphi d\varphi d\theta \text{ soit}$$

$$\iint_{\Sigma} \overrightarrow{g(M)} \cdot \overrightarrow{V_2(M)} d\sigma = \frac{2\pi a^2}{3} (t_1 (-\cos \varphi + \cos^3 \varphi) - t_2 \cos \varphi)_0^{\pi} = \frac{4\pi a^3}{3} t_2.$$

3) Soit W l'application de $R_+^* \times R_+^*$ dans R définie par:

$$W(c, a) = \frac{4\pi}{3} (2c^2 + c^{-4})(1 + 2a^3)(1 + a^3)^{-\frac{1}{3}}.$$

a) **NB:** Il y a sûrement une erreur de texte ici, il faut lire $\frac{\partial W}{\partial c}(c, a)$ et non $\frac{\partial W}{\partial c}(a, c)$ et cette écriture me paraît de toute façon plus correcte que celle du texte $\frac{\partial W(a, c)}{\partial c}$.

Même erreur pour $\frac{\partial W}{\partial a}(a, c)$ qu'il faut remplacer par $\frac{\partial W}{\partial a}(c, a)$. Bon!, sur ces bases on a donc:

$$\frac{\partial W}{\partial c}(c, a) = \frac{16\pi}{3} (c - c^{-5})(1 + 2a^3)(1 + a^3)^{-\frac{1}{3}} = \frac{8\pi b^3}{3c} t_1 \text{ ce qui fournit: } t_1 = 2(c^2 - c^{-4}) \frac{1 + 2a^3}{(1 + a^3)^{\frac{4}{3}}}.$$

$$\frac{\partial W}{\partial a}(c, a) = \frac{4\pi}{3} (2c^2 + c^{-4}) \left(6a^2(1 + a^3)^{-\frac{1}{3}} - a^2(1 + a^3)^{-\frac{4}{3}}(1 + 2a^3) \right) = \frac{4\pi}{3} (2c^2 + c^{-4}) a^2 \frac{5 + 4a^3}{(1 + a^3)^{\frac{4}{3}}}$$

$$\text{On a donc } \frac{4\pi}{3} (2c^2 + c^{-4}) a^2 \frac{5 + 4a^3}{(1 + a^3)^{\frac{4}{3}}} = \frac{4\pi a^2}{3} t_2 \text{ d'où } t_2 = (2c^2 + c^{-4}) \frac{5 + 4a^3}{(1 + a^3)^{\frac{4}{3}}}.$$

b) **NB:** Je donne les deux limites demandées, mais je me demande, compte tenu de la question 4), s'il ne s'agissait pas plutôt d'étudier les limites de t_1 et t_2 quand $a \rightarrow 0$, car celles-ci correspondent aux expressions $x(c)$ et $y(c)$ de 4).

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\partial W}{\partial c}(c, a) = \frac{16\pi}{3} (c - c^{-5}) \text{ alors que } \lim_{a \rightarrow 0} t_1 = 2(c^2 - c^{-4}).$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\partial W}{\partial a}(c, a) = 0 \text{ alors que } \lim_{a \rightarrow 0} t_2 = 5(2c^2 + c^{-4}).$$

4) Soit la courbe C paramétrée par: $\begin{cases} x(c) = 2(c^2 - c^{-4}) \\ y(c) = 5(2c^2 + c^{-4}) \end{cases}$ avec $c \in R_+^*$.

a) On étudie les variations de x et y . On pourrait faire le changement de paramètre $t = c^2$ ce qui donne:

$$\begin{cases} x(t) = 2(t - t^{-2}) \\ y(t) = 5(2t + t^{-2}) \end{cases} \text{ d'où: } \begin{cases} x'(t) = 2(1 + 2t^{-3}) > 0 \\ y'(t) = 5(2 - 2t^{-3}) = 10 \frac{t^3 - 1}{t^3} \end{cases}$$

Quand t croît de 0 à $+\infty$, x croît de $-\infty$ à $+\infty$, y décroît de $+\infty$ à 15 (pour $t = 1$), puis croît de 15 à $+\infty$. Ainsi C possède bien un point d'ordonnée minimale, c'est le point (0,15).

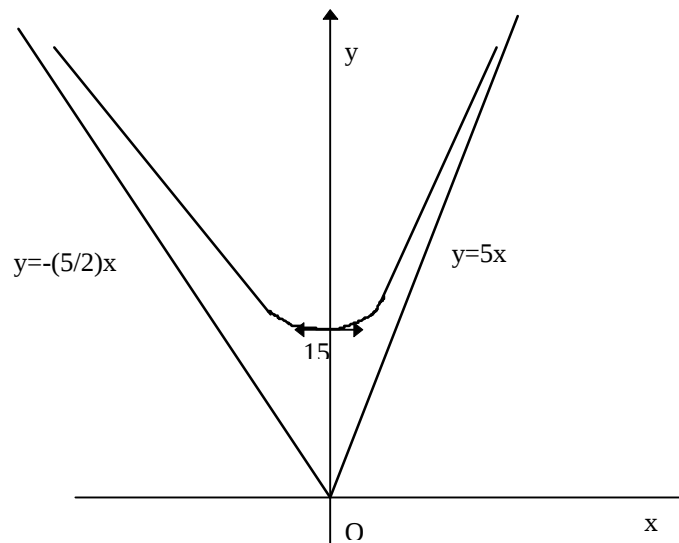
b) Etude aux bornes:

$$\bullet \text{ Voisinage de } t = 0^+, \text{ on a } \begin{cases} x(t) \approx -\frac{2}{t^2} \rightarrow -\infty \\ y(t) \approx \frac{5}{t^2} \rightarrow +\infty \end{cases}, \frac{y}{x} \rightarrow -\frac{5}{2}, y + \frac{5}{2}x = 15t \rightarrow 0^+.$$

Il y a asymptote d'équation $y = -\frac{5}{2}x$, la courbe est au dessus de son asymptote.

• Voisinage de $t = +\infty$, on a $\begin{cases} x(t) \approx 2t \rightarrow +\infty \\ y(t) \approx 10t \rightarrow +\infty \end{cases}$, $\frac{y}{x} \rightarrow 5$, $y - 5x = \frac{15}{t^2} \rightarrow 0^+$.

Il y a asymptote d'équation $y = 5x$, la courbe est au dessus de son asymptote.



c) **NB:** La courbe C n'est pas une conique et n'est pas non plus incluse dans une conique comme semble insidieusement vouloir le dire l'énoncé. J'en donne plusieurs justifications.

Preuve n°1 On a vu, lors de l'étude des asymptotes que: $\begin{cases} y + \frac{5}{2}x = 15t \\ y - 5x = \frac{15}{t^2} \end{cases}$ et par conséquent C est

incluse dans la courbe d'équation cartésienne $(y + \frac{5}{2}x)^2(y - 5x) = 15^3$, courbe algébrique du

troisième degré d'équation développée: $y^3 - \frac{75}{4}yx^2 - \frac{125}{4}x^3 - 3375 = 0$, expression que je

n'arrive pas à factoriser (Maple non plus) sous la forme $(1^{\text{er}} \text{ degré en } x, y)(2^{\text{ème}} \text{ degré en } x, y) = 0$ pour espérer que C soit incluse dans une conique. Ce qui n'est pas encore très concluant, certes.

Preuve n°2 Dans le même ordre d'idée, on peut rechercher l'équation cartésienne de C de façon plus classique en éliminant t entre les deux polynomes $P = 2t^3 - xt^2 - 2$ et $Q = 10t^3 - yt^2 + 5$

puisque ceci traduit la condition sur (x, y) pour que $\exists t$ tel que $\begin{cases} x(t) = 2(t - t^{-2}) \\ y(t) = 5(2t + t^{-2}) \end{cases}$. Je ne détaille

pas le calcul (abaissement du degré par exemple), mais j'utilise l'instruction de Maple, `resultant(P,Q,t)`,

qui fournit le résultat suivant: $27000 - 8y^3 + 150yx^2 + 250x^3 = 0$ qui n'est rien d'autre que 8

fois

l'expression trouvée dans la preuve n°1.

Preuve n°3 Recherche d'une conique d'équation générale $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$

qui

voudrait bien contenir C . Pour cela il faut que:

$$4A\left(t^2 - \frac{2}{t} + \frac{1}{t^4}\right) + 25B\left(4t^2 + \frac{4}{t} + \frac{1}{t^4}\right) + 10C\left(-\frac{1}{t} + 2t^2 - \frac{1}{t^4}\right) + 2D\left(t - \frac{1}{t^2}\right) + 5E\left(2t + \frac{1}{t^2}\right) + F = 0$$

et ce $\forall t > 0$. On multiplie l'expression par t^4 et le premier membre, devenu un polynôme en t de degré 6, doit être le polynôme nul, ce qui conduit au système suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} 4A + 100B + 20C = 0 \\ 2D + 10E = 0 \\ F = 0 \\ -8A + 100B - 10C = 0 \\ -2D + 5E = 0 \\ 4A + 25B - 10C = 0 \end{array} \right. \text{ soit: } \left\{ \begin{array}{l} F = 0 \\ D + 5E = 0 \\ -2D + 5E = 0 \\ 4A + 100B + 20C = 0 \\ -8A + 100B - 10C = 0 \\ 4A + 25B - 10C = 0 \end{array} \right. \Rightarrow D = E = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4A + 100B + 20C = 0 \\ -8A + 100B - 10C = 0 \\ 4A + 25B - 10C = 0 \end{array} \right. \Rightarrow A = B = C = 0$$

Conclusion $A = B = C = D = E = F = 0$, ça ne fait pas une jolie conique!

Preuve n°4 Je fais un changement de repère en prenant les deux asymptotes pour nouveaux axes.

$$y = 5x \rightarrow \vec{I} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad y = -\frac{5}{2}x \rightarrow \vec{J} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \text{matrice de passage } P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \text{ d'où}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, \text{ et par suite on a } \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 2(t - t^{-2}) \\ 5(2t + t^{-2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2t}{5} \\ -\frac{1}{t^2} \end{pmatrix}, \text{ de sorte que}$$

$$XY = -\frac{2}{t} \text{ n'est pas constant, } C \text{ n'est donc pas l'hyperbole tant espérée!... Dans le repère } (0, \vec{I}, \vec{J})$$

$$\text{non orthonormé certes, l'équation de } C \text{ est } Y = -\frac{4}{X^2}. \quad \textbf{Rideau.}$$

Partie IV:

Notations: **NB:** On définit une nouvelle fonction W avec une notation déjà utilisée dans la Partie III, et ayant d'autres propriétés a priori. Donc ça continue dans la mauvaise qualité du sujet.

$$W : R_+^* \times R_+^* \rightarrow R \text{ de classe } C^2 \text{ notée: } (I_1, I_2) \mapsto W(I_1, I_2).$$

Soient trois fonctions $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ éléments de $\mathcal{F}^+$.

Venant de dire que $(I_1, I_2) \in R_+^* \times R_+^*$, il est navrant de poser $I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$ et

$I_2 = \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2$ qui sont alors des fonctions. Nous sommes donc dans

l'éternelle

confusion entre fonction et valeur de la fonction en un point, ce qui fait que la définition de W_1 est vraiment très approximative!.

On aurait dû définir la fonction $W_1 : R_+^* \times R_+^* \times R_+^* \rightarrow R$ par la formule:

$$W_1(u_1, u_2, u_3) = W(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, u_1^2 u_3^2 + u_1^2 u_2^2 + u_2^2 u_3^2) = W(I_1, I_2) \text{ si on veut, en}$$

ayant posé $I_1 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$ et $I_2 = u_1^2 u_3^2 + u_1^2 u_2^2 + u_2^2 u_3^2$.

Pour $1 \leq i \leq 3$ on définit les fonctions s_i de R_+^* dans R par les formules:

$$s_i(R) = \lambda_i(R) \frac{\partial W_1}{\partial \lambda_i}(\lambda_1(R), \lambda_2(R), \lambda_3(R)) - h(R) \text{ où } h \text{ est un élément de } \mathbf{F}.$$

NB: Cette écriture est parmi les moins pires finalement de ce paragraphe de notations!

$$\text{On a les conditions suivantes: } \begin{cases} s'_1(R) + \frac{2}{R}(s_1(R) - s_2(R)) = 0 \\ s_2(R) = s_3(R) \\ s_1(a) = 0 \\ P(a) = s_1(b) \quad \rho_a(r) = \sqrt[3]{r^3 + a^3} \quad b = \rho_a(1) \end{cases}$$

1) On peut faire le schéma suivant:

$$R_+^* \times R_+^* \times R_+^* \xrightarrow{I} R_+^* \times R_+^* \xrightarrow{W} R \text{ défini par}$$

$$(u_1, u_2, u_3) \mapsto (I_1, I_2) = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, u_1^2 u_3^2 + u_1^2 u_2^2 + u_2^2 u_3^2) \mapsto W(I_1, I_2). \text{ de sorte que } W_1 = W \circ I.$$

I est de classe C^2 de $R_+^* \times R_+^* \times R_+^*$ vers $R_+^* \times R_+^*$ et W est de classe C^2 de $R_+^* \times R_+^*$ vers R , donc

W_1 est de classe C^2 de $R_+^* \times R_+^* \times R_+^*$ vers R , d'où $\frac{\partial W_1}{\partial u_i}$ est de classe C^1 de $R_+^* \times R_+^* \times R_+^*$ vers R .

On a également: $R_+^* \xrightarrow{\lambda} R_+^* \times R_+^* \times R_+^*$ définie par $R \mapsto (\lambda_1(R), \lambda_2(R), \lambda_3(R))$ est une application de classe C^1 de R_+^* vers $R_+^* \times R_+^* \times R_+^*$ de sorte que $\frac{\partial W_1}{\partial u_i} \circ \lambda$ est de classe C^1 de R_+^* vers R , il en est

par

suite de même des fonctions s_i .

Je reprends les notations du texte.

$$\frac{2}{R} \left(\lambda_2(R) \frac{\partial W_1}{\partial \lambda_2}(\lambda_1(R), \lambda_2(R), \lambda_3(R)) - \lambda_1(R) \frac{\partial W_1}{\partial \lambda_1}(\lambda_1(R), \lambda_2(R), \lambda_3(R)) \right) = \frac{2}{R} (s_2(R) - s_1(R)) = s'_1(R)$$

d'après la 1^{ère} condition donnée. Par suite l'intégrale proposée s'écrit:

$$\int_a^b s'_1(R) dR = s_1(b) - s_1(a) = s_1(b) = P(a) \quad \text{cqfd.}$$

2) Soit $r = \sqrt[3]{R^3 - a^3}$, $\lambda_1 = \rho'_a(r)$ **NB:** là encore quelle ambiguïté! ρ_a ayant été défini plus haut au

moyen de r il serait naturel de comprendre que $\lambda_1 = \frac{r^2}{(r^3 + a^3)^{\frac{2}{3}}}$ et bien pas du tout, il faut interpréter

sous la forme $\lambda_1(R) = \rho'_a(\sqrt[3]{R^3 - a^3})$ et pour $\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{\rho_a(r)}{r}$ idem! enfin pour $v = \frac{R}{r} = \frac{\rho_a(r)}{r}$

la remarque est la même...Moyennant quoi:

$$\text{a) } \lambda_1(R) = \frac{(R^3 - a^3)^{\frac{2}{3}}}{(R^3)^{\frac{2}{3}}} = \frac{r^2}{R^2} = \frac{1}{v^2}, \text{ on obtient ensuite } \lambda_2(R) = \lambda_3(R) = \frac{\sqrt[3]{R^3}}{r} = \frac{R}{r} = v \text{ puis}$$

$$I_1(R) = \frac{1}{v^4} + 2v^2 \text{ et } I_2(R) = \frac{1}{v^2} + \frac{1}{v^2} + v^4 = v^4 + \frac{2}{v^2}$$

Conclusion: $\mu_1(v) = \frac{1}{v^2}$, $\mu_2(v) = \mu_3(v) = v$, $J_1(v) = \frac{1}{v^4} + 2v^2$, $J_2(v) = v^4 + \frac{2}{v^2}$

On pose $\Phi(v) = W(J_1(v), J_2(v)) = W_1(\mu_1(v), \mu_2(v), \mu_3(v))$.

Calcul de $\Phi'(v)$.

$$\Phi'(v) = \frac{\partial W_1}{\partial \lambda_1}(\mu_1(v), \mu_2(v), \mu_3(v))\mu'_1(v) + \frac{\partial W_1}{\partial \lambda_2}(\mu_1(v), \mu_2(v), \mu_3(v))\mu'_2(v) + \frac{\partial W_1}{\partial \lambda_3}(\mu_1(v), \mu_2(v), \mu_3(v))\mu'_3(v)$$

$$\Phi'(v) = -\frac{2}{v^2} \frac{\partial W_1}{\partial \lambda_1}(\mu_1(v), \mu_2(v), \mu_3(v)) + \frac{\partial W_1}{\partial \lambda_2}(\mu_1(v), \mu_2(v), \mu_3(v)) + \frac{\partial W_1}{\partial \lambda_3}(\mu_1(v), \mu_2(v), \mu_3(v)) \cdot$$

$$\text{Or } \frac{\partial W_1}{\partial \lambda_2} = \frac{\partial W}{\partial I_1}(I_1, I_2)(2\lambda_2) + \frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1, I_2)(2\lambda_2)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \text{ et}$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial \lambda_3} = \frac{\partial W}{\partial I_1}(I_1, I_2)(2\lambda_3) + \frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1, I_2)(2\lambda_3)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \text{ et par suite quand on calcule au point}$$

$(\mu_1(v), \mu_2(v), \mu_3(v))$, avec $\mu_2(v) = \mu_3(v)$, on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_1}{\partial \lambda_2}(\mu_1(v), \mu_2(v), \mu_3(v)) &= \frac{\partial W_1}{\partial \lambda_3}(\mu_1(v), \mu_2(v), \mu_3(v)) \\ &= \frac{\partial W}{\partial I_1}(J_1(v), J_2(v))(2v) + \frac{\partial W}{\partial I_2}(J_1(v), J_2(v))(2v)\left(\frac{1}{v^4} + v^2\right) \end{aligned}$$

$$\text{On a donc: } \Phi'(v) = -\frac{2}{v^2} \frac{\partial W_1}{\partial \lambda_1}(\mu_1(v), \mu_2(v), \mu_3(v)) + 2 \frac{\partial W_1}{\partial \lambda_2}(\mu_1(v), \mu_2(v), \mu_3(v)) \text{ soit:}$$

$$\Phi'(v) = \frac{2}{v} \left(v \frac{\partial W_1}{\partial \lambda_2}(\mu_1(v), \mu_2(v), \mu_3(v)) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial W_1}{\partial \lambda_1}(\mu_1(v), \mu_2(v), \mu_3(v)) \right) \text{ soit enfin:}$$

$$\Phi'(v) = \frac{2}{v} \left(\mu_2(v) \frac{\partial W_1}{\partial \lambda_2}(\mu_1(v), \mu_2(v), \mu_3(v)) - \mu_1(v) \frac{\partial W_1}{\partial \lambda_1}(\mu_1(v), \mu_2(v), \mu_3(v)) \right).$$

b) Dans l'intégrale donnant $P(a)$ au **1)**

$$\text{posons: } v = \frac{R}{\sqrt[3]{R^3 - a^3}} \text{ soit } R^3(v^3 - 1) = a^3 v^3 \text{ soit enfin } R = \frac{av}{\sqrt[3]{v^3 - 1}} \text{ on a:}$$

$$dR = a \frac{\sqrt[3]{v^3 - 1} - v \frac{v^2}{(v^3 - 1)^{\frac{2}{3}}}}{(v^3 - 1)^{\frac{2}{3}}} dv = -\frac{a}{(v^3 - 1)^{\frac{4}{3}}} dv \text{ (ce qui assure le caractère bijectif de } R(v) \text{).}$$

$$\text{Pour les bornes: } \begin{cases} R = a^+ & v = +\infty \\ R = b & v = \frac{b}{\sqrt[3]{b^3 - a^3}} = \frac{b}{\sqrt[3]{1}} = b \end{cases} \text{ d'où:}$$

$$P(a) = a \int_b^{+\infty} \frac{2\sqrt[3]{v^3 - 1}}{av} \left(\mu_2(v) \frac{\partial W_1}{\partial \lambda_2}(\mu_1(v), \mu_2(v), \mu_3(v)) - \mu_1(v) \frac{\partial W_1}{\partial \lambda_1}(\mu_1(v), \mu_2(v), \mu_3(v)) \right) \frac{1}{(v^3 - 1)^{\frac{4}{3}}} dv$$

$$\text{Conclusion: } P(a) = \int_b^{+\infty} \frac{\Phi'(v)}{v^3 - 1} dv.$$

c) Limite de $P(a)$ quand $a \rightarrow 0$.

On peut écrire d'une autre façon $\Phi'(v)$.

$$\Phi'(v) = \frac{\partial W}{\partial I_1}(J_1(v), J_2(v))J'_1(v) + \frac{\partial W}{\partial I_2}(J_1(v), J_2(v))J'_2(v)$$

$$\text{Soit: } \Phi'(v) = \left(-\frac{4}{v^5} + 4v\right) \frac{\partial W}{\partial I_1}(J_1(v), J_2(v)) + \left(4v^3 - \frac{4}{v^3}\right) \frac{\partial W}{\partial I_2}(J_1(v), J_2(v))$$

$$\text{Soit encore: } \Phi'(v) = 4(v^3 - 1)(v^3 + 1) \left(\frac{1}{v^5} \frac{\partial W}{\partial I_1}(J_1(v), J_2(v)) + \frac{1}{v^3} \frac{\partial W}{\partial I_2}(J_1(v), J_2(v)) \right) \text{ de sorte que:}$$

$$P(a) = 4 \int_b^{+\infty} (v^3 + 1) \left(\frac{1}{v^5} \frac{\partial W}{\partial I_1}(J_1(v), J_2(v)) + \frac{1}{v^3} \frac{\partial W}{\partial I_2}(J_1(v), J_2(v)) \right) dv \text{ et par suite:}$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} P(a) = 4 \int_1^{+\infty} (v^3 + 1) \left(\frac{1}{v^5} \frac{\partial W}{\partial I_1}(J_1(v), J_2(v)) + \frac{1}{v^3} \frac{\partial W}{\partial I_2}(J_1(v), J_2(v)) \right) dv \text{ si cette intégrale est bien}$$

convergente, et alors on a bien $P = 4I$.

3) On pose $W(I_1, I_2) = (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j$ avec $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ $(i, j) \neq (0, 0)$. On a:

$$\frac{\partial W}{\partial I_1}(I_1, I_2) = i(I_1 - 3)^{i-1} (I_2 - 3)^j \text{ et } \frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1, I_2) = j(I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^{j-1} \text{ de sorte que:}$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_1}(J_1(v), J_2(v)) = i \left(\frac{1}{v^4} + 2v^2 - 3 \right)^{i-1} \left(v^4 + \frac{2}{v^2} - 3 \right)^j = i \frac{(v^2 - 1)^{2i+2j-2} (2v^2 + 1)^{i-1} (v^2 + 2)^j}{v^{4i+2j-4}}.$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_2}(J_1(v), J_2(v)) = j \left(\frac{1}{v^4} + 2v^2 - 3 \right)^i \left(v^4 + \frac{2}{v^2} - 3 \right)^{j-1} = j \frac{(v^2 - 1)^{2i+2j-2} (2v^2 + 1)^i (v^2 + 2)^{j-1}}{v^{4i+2j-2}}.$$

Donc si elle converge:

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{(v^2 - 1)^{2i+2j-2} (2v^2 + 1)^{i-1} (v^2 + 2)^{j-1} (v^3 + 1) (i(v^2 + 2) + j(2v^2 + 1))}{v^{4i+2j+1}} dv.$$

Au voisinage de $+\infty$, la fonction à intégrer est équivalente à $\frac{2^{i-1}(i+2j)}{v^{4-2(i+2j)}}$. L'intégrale est donc convergente

si $4 - 2(i + 2j) > 1$ soit $i + 2j < \frac{3}{2}$ le seul couple possible est donc: $(i, j) = (1, 0)$.

$$\text{Alors } I = \int_1^{+\infty} \frac{(v^3 + 1)(v^2 + 2)}{(v^2 + 2)v^5} dv = \int_1^{+\infty} \frac{v^3 + 1}{v^5} dv = \left(-\frac{1}{v} - \frac{1}{4v^4} \right)_1^{+\infty} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \text{ d'où } P = 5.$$

Fin.

